

ケーブルにモード座標を用いた桁・ケーブル系の 固有値および応答解析

Eigen value and dynamic analysis of girder-cable system
using modal co-ordinate in cables

長井正嗣* 川畑 治** 岸本節二*** 奥井義昭**** 菊池昭仁*****

By Masatsugu Nagai, Osamu Kawabata, Setsuji Kishimoto, Yoshiaki Okui and Akihito Kikuchi

This paper presents the dynamic analysis of girder-cable system, in which the cable response is expressed using modal co-ordinate. Since the coupled vibration between girder and cables is identified to occur in torsional vibration of the girder of cable-stayed bridges, to develop an efficient method for three-dimensional dynamic analysis of cable-stayed bridges including the cable local vibration, an approach using modal co-ordinate in cables to reduce the freedom of cable is investigated. Eigen value and dynamic response calculations of a simple girder-cable system are carried out, and then the accuracy of this method is mainly examined.

1. まえがき

斜張橋の振動問題に関する話題の一つとして、風によるケーブルの振動、また桁、ケーブル系の連成振動(線形共振、パラメトリック振動等)¹⁾²⁾³⁾の発現と、またなんらかの振動が発現した場合の原因同定が挙げられる。そして、これらケーブルの振動問題が、その制振対策⁴⁾を含め実務上重要な検討課題となっている。

このうち、斜張橋の桁、塔系(ケーブルはトラス部材として扱われる)の振動(全体振動)とケーブルの振動(曲げ振動)の連成振動を扱う場合、まず両者の振動数の関係を明らかにしておくことが重要と考える。このような観点から、著者らは両者の低次での振動数の関係について検討を行なった⁵⁾。その結果、a). 桁の曲げ振動について、支間に関係なく桁、ケーブルの振動数の関係が1:1になる可能性はきわめて少なく、また2:1の関係は有り得ないこと、b). 一方、桁のねじれ振動については、桁、ケーブルで、支間、構造形態(塔形状、桁断面形式)に応じて、1:1、2:1の振動数比の関係が生じること、を明らかにした。したがって、走行荷重、風、地震等による桁振動でもって励起されるケーブルの振動性状の把握、例えば曲げ疲労の問題の検討を行なう場合等、また不安定振動の可能性を含む振動数比2:1の状態での振動性状を明らかにしていくためには、ねじれ振動を対象とした桁、ケーブル系の立体連成振動解析が欠かせなくなるものと考え。ところで、これまでのケーブル弦振動を考慮した斜張橋の解析では、ケーブルに少ない質点を設けた平面解析に限定されている⁶⁾。また、立体振動解析においては、ケーブルをトラス部材でモデル化し張力の応答のみが対象となっている⁷⁾⁸⁾。

*	工博	長岡技術科学大学	助教授	建設系	(〒940-21	長岡市上富岡町 1603-1)
**		長岡技術科学大学大学院修士課程			(〒940-21	長岡市上富岡町 1603-1)
***		川崎重工業(株)	橋梁技術総括部	計画部	(〒675-01	加古郡播磨町新島 8 番地)
****	工修	埼玉大学	助手	建設基礎工学科	(〒338	浦和市下大久保 255)
*****		埼玉大学大学院修士課程		建設基礎工学科	(〒338	浦和市下大久保 255)

さて、斜張橋のねじれ振動(桁は1軸対象断面)を扱う場合、構造形態に応じて連成の度が異なるものの、必ず水平(横)振動と連成することから、全系の立体解析が欠かせなくなる⁹⁾。その場合、離散化解析のための自由度は大きくなり、さらにケーブルの振動までも考慮すると、データ量とともに自由度はもとより、周知の通りバンド幅も大幅に増大する。

そこで、以上の問題に対応する一手法として、ケーブルの運動を表現する座標としてモード座標を用いて解析する手法を考えることとし、その適用性について検討を行なうこととした。この方法は基本的にモード解析法と呼ばれるものであるが、ケーブルに着目した部分構造法と呼ばれる手法を採用するものである。

大規模の構造物を小さな部分(分系)領域に分けて固有値解析を行い、モード座標に変換してさらにそれらを接続して全体系の固有値解析なり応答解析を行なう部分構造法は古くから提案されており、最近では文献10)、11)にそれらの成果がまとめられている。この手法は大別すると、伝達関数合成法、モード合成法、特性行列合成法がある。本文では、数値的に解の安定性が期待できる拘束モードを用いた区分モード法¹⁰⁾を適用することとし、主に精度よい解が得られるかについて検討、考察を行なう。

このような手法を用いる理由は、前述の通り斜張橋の連成解析を目的とし、

- a). ケーブル単独の固有値解析には多くの時間を要しない。また、データの作成も容易である。
- b). もし、何本かのケーブルについて全体振動との連成の可能性が予測できれば⁵⁾、一部のケーブルについてモード変換を行い、従来のケーブルをトラスとした解析自由度に加えて少ない自由度の追加で精度よく解析することもできる。とくに、ケーブル本数が多い長大橋では隣接ケーブルの振動数がかかり接近し、共振を対象とする場合のケーブルの数はかなりなものとなる。その場合でも、少ない自由度での対応が期待できる。
- c). ケーブルをモード座標に変換後、さらに桁、塔についてもモード変換する場合、効率的に固有値解析が行え、また、ケーブルの精度よい応答値を得るための必要モード数が事前に予測できる。

この他に、

- d). 本方法(後述)では、一度静縮約の操作が行なわれる。したがって、モード座標を導入しない場合、初期張力、サグの影響が考慮される。

なる点を期待したものである。本文では、斜張橋システム⁹⁾へのケーブルの組み込みに当り、まず簡単な桁、ケーブル系(ケーブルの角折れ緩衝材、バッファの取り扱いを含めて)の非減衰系の線形解析を行ない、とくに精度を中心に検討した結果について報告を行なう。

2. 基礎式

桁はそれを考慮した7自由度のはり要素でモデル化する。ケーブルは直線要素の集合でモデル化する。直線要素は初期軸力(完成状態での張力)を考慮したはり要素(6自由度)である。それぞれの自由度を図-1に示すが、ケーブルについては、解の安定性の関係でねじれ剛性を考慮している(桁の曲げ剛性とケーブルの曲げ剛性のオーダーがかなり異なるため)。

2-1 ケーブルの縮約(拘束モード法)

図-2に示すケーブルについて、拘束モード法による縮約法を説明する。

ケーブル全体の剛性方程式を、取り付け点(桁、塔)の変位と内部変位に分割して表示すると以下のように書ける(外力なし)。

$$\begin{bmatrix} k_{G,G} & k_{G,i} & \mathbf{0} \\ k_{i,G} & k_{i,i} & k_{i,P} \\ \mathbf{0} & k_{P,i} & k_{P,P} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $[k]$ はケーブルの剛性マトリックス、 $d = \{d_G, d_i, d_P\}^t$ は節点変位ベクトルで $\{ \}^t$ はベクトルの転置を表わす。また、添字 G, P はケーブル取り付け点での量、 i はケーブル内部の量を表わす。

ケーブル内部の変位を取り付け点の変位で表わすと(静縮約)、

$$\begin{aligned} d_i &= -k_{i,i}^{-1} k_{i,G} d_G - k_{i,i}^{-1} k_{i,P} d_P \\ &= T_1 d_G + T_2 d_P \end{aligned} \quad (2)$$

となる。 T_1, T_2 は、それぞれ G, P 点に単位の変位を与えた場合の内部変位を表わす。

次に、ケーブルの振動方程式(非減衰)

$$m\ddot{d} + kd = 0 \quad (3)$$

を作成し、取り付け点を固定して固有値解析を行なう(拘束モード)。そして、得られた固有ベクトルから成るマトリックス Φ を作成する。

ここで、 m はケーブルの質量マトリックス、 $\ddot{}$ は時間に関する2階微分である。

式(2)の関係とマトリックス Φ を用いて、ケーブルの変位ベクトル d に対する以下の座標変換マトリックスを得る。

$$\begin{Bmatrix} d_G \\ d_i \\ d_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ T_1 & T_2 & \Phi \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_G \\ d_P \\ \xi \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} d_G \\ d_P \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 I は単位マトリックス、 ξ は固有モードに対応する一般化変位ベクトルで、選んだモードの数が自由度数となる。

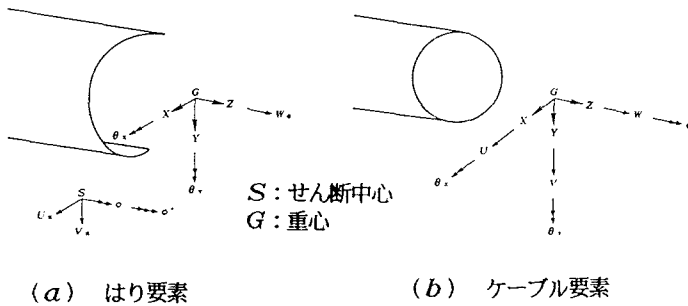


図-1 はり、ケーブル要素の自由度

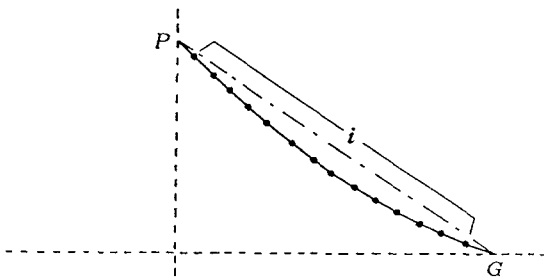


図-2 ケーブル質点モデル

さて、変位 d で記述したケーブルの振動方程式に、変換マトリックスを用いて座標系の変換を行なうと、以下の取り付け点の変位自由度と選んだモード数の合計の自由度に縮約された振動方程式が得られる。

$$T^t m T \begin{Bmatrix} \ddot{d}_G \\ \ddot{d}_P \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} + T^t k T \begin{Bmatrix} d_G \\ d_P \\ \xi \end{Bmatrix} = T^t f \quad (5)$$

ここで、 T^t は T の転置マトリックス、 f は外力ベクトルである。

式(5)を用いて、ケーブル端部に集中質量、バネを取り付けた系の固有値、応答解析が可能となる。

2-2 桁、ケーブル系の振動解析

図-3 に示す簡単な構造について解析手法を説明する。まず、桁をケーブル取り付け点とそれ以外に分離し、後者の変位に添字(1)、前者に(2)を付ける。また、ケーブル他端に(3)を、ケーブルの内部変位に(i)を付ける。まず、ケーブルの振動方程式(外力なし)は、

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{(2)} \\ \ddot{d}_{(i)} \\ \ddot{d}_{(3)} \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} d_{(2)} \\ d_{(i)} \\ d_{(3)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (6)$$

と与えられ、前節の変換マトリックス T を用いて、

$$T^t m T \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{(2)} \\ \ddot{d}_{(3)} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} + T^t k T \begin{Bmatrix} d_{(2)} \\ d_{(3)} \\ \xi \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

と書き改める。

式(7)に桁の質量、剛性マトリックスを加えることにより、

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{(1)} \\ \ddot{d}_{(2)} \\ \ddot{d}_{(3)} \\ \ddot{\xi} \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} d_{(1)} \\ d_{(2)} \\ d_{(3)} \\ \xi \end{Bmatrix} = F \quad (8)$$

なる、ケーブルの自由度数がモードの数に縮約された振動方程式を得る。

そして、応答変位および固有モードに対応する一般化変位 $\{d_{(2)}, d_{(3)}, \xi\}$ 、が計算されると、式(4)よりケーブルの内部変位が計算できる。

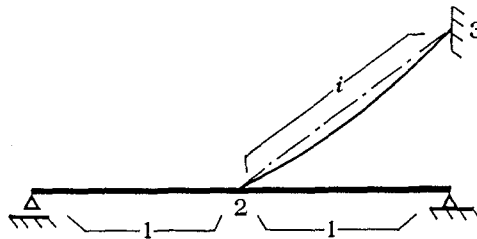


図-3 桁・ケーブル系のモデル

さらに、式(8)で $F=0$ とにおいて、固有値解析を行ない、

$$\begin{Bmatrix} d_{(1)} \\ d_{(2)} \\ d_{(3)} \\ \xi \end{Bmatrix} = \psi \eta \quad (9)$$

を作成して、モード座標への変換を行なうと、

$$\psi^t M \psi \ddot{\eta} + \psi^t K \psi \eta = \psi^t F \quad (10)$$

となり、式(7)に対してさらに縮小された振動方程式を得る。

次に、図-5に示すケーブルの端部に角折れ緩衝材(バッファーと呼ぶ)が取り付けいた場合の解析手法を説明する。なお、バッファーはトラス部材として取り扱う。

図-5を参照して、静縮約のための剛性方程式(外力なし)は以下のように書ける。なお、バッファー部材の剛性マトリックスは $k_{G1,G1}$, $k_{G1,i}$, $k_{i,G1}$, $k_{i,i}$ に含まれる。

$$\begin{bmatrix} k_{G,G} & 0 & k_{G,i} & 0 \\ 0 & k_{G1,G1} & k_{G1,i} & 0 \\ k_{i,G} & k_{i,G1} & k_{i,i} & k_{i,P} \\ 0 & 0 & k_{P,i} & k_{P,P} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_G \\ d_{G1} \\ d_i \\ d_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式(11)を用いて、ケーブルの内部変位 d_i を以下のように表わす。

$$\begin{aligned} d_i &= -k_{i,i}^{-1} k_{i,G} d_G - k_{i,i}^{-1} k_{i,G1} d_{G1} - k_{i,i}^{-1} k_{i,P} d_P \\ &= T_1 d_G + T_2 d_{G1} + T_3 d_P \end{aligned} \quad (12)$$

次に、図-5の G, G_1, P 点を固定してケーブルの固有値解析を行なう。そして、固有ベクトルより成るマトリックスを前節同様 Φ とおくと、変換マトリックスは、

$$\begin{Bmatrix} d_G \\ d_{G1} \\ d_i \\ d_P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ T_1 & T_2 & T_3 & \Phi \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_G \\ d_{G1} \\ d_P \\ \xi \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} d_G \\ d_{G1} \\ d_P \\ \xi \end{Bmatrix} \quad (13)$$

と与えられる。 ξ は前節同様、一般化変位ベクトルである。

式(13)の変換マトリックスを用いて、ケーブルの自由度数がモード数に低減される。バッファーのない場合に比して、変換マトリックス作成操作は若干煩雑となるが、それ以降の取り扱いは同じである。

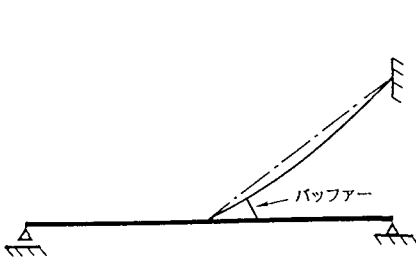


図-4 桁・ケーブルモデル(バッファー付)

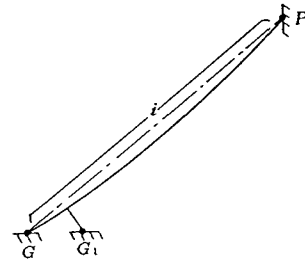


図-5 バッファー付きの縮約

3. 数値計算例

3-1 固有値解析

図-6 に示す単一ケーブルの両端をバネ支持し、一端に集中質量が取り付けモデルを対象に、集中質量位置の上下方向のバネ定数を変化させて固有値解析を行なった。モデルの諸元を図-6 に示すが、本例題ではケーブルは初期軸力を有するトラス部材でモデル化している。

図-7 に固有値の解析結果を示す。図中、○印はケーブルを質点モデルで計算した結果、△印はケーブルにモード座標を用いて固有値解析を行なった結果である。モード数として、5、10 モードを採用して計算を行なったが、両者で差異がみられなかったことから、5 モードを採用した結果を示す。

図-7 より、両者がよい一致を示していることがわかる。とくに、バネ支持ケーブル単独および集中質量(バネ付き)単独の振動数が近くなっても、両者はよい一致を示すことがわかる。

表-1 にケーブル張力の比較(モードの最大値を1.0 として最大張力を比較)結果を示す。ケーブルの張力値についてもよい一致を示すことがわかる。

著者らは、別途ケーブル単体をバネ支持したモデルについてバネ定数を変化させて検討を行なっている¹²⁾。そこでは、バネ定数がかなり小さい場合でも精度のよい固有値が得られることを確認している。

なお、本問題のモード変換では、まずケーブルの両端を固定した固有値解析が行なわれ、そこから何個かのモードを選び座標変換マトリックスを作成する。そして、変換マトリックスを用いて縮小された系に対して固有値解析が行なわれる。そのため、計算時間は当然質点モデルの固有値解析を直接行なった方が短い。

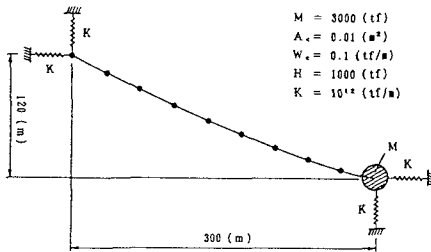


図-6 一端に集中質量を有するケーブルの計算モデル

表-1 ケーブル最大張力の比較

(tf)		
K (tf/m)	縮約なし	縮約あり (5モード)
2000	204.6	208.3
2500	128.8	128.5
2750	81.8	81.7
3000	41.9	41.9
3250	52.0	53.6
3500	98.5	102.2

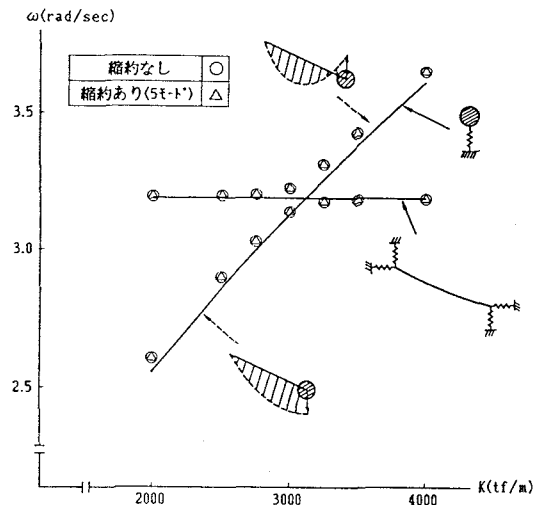


図-7 1 次の固有円振動数

3-2 応答解析

図-8 に示す単純桁を1本のケーブルで支持したモデルについて、応答解析を行なった。なお、桁とケーブルはバッファを取り付くケースとバッファのないケースを考える。図-9 に桁、ケーブルの要素分割を示す。桁は24要素に分割し、ケーブルは桁取り付け点と固定点の近傍を細分割して、全体で24要素に分割した。

計算方法としては次の3方法を用いた。1. 質点モデルを直接時間積分する方法(方法-1、399自由度)、2. 質点モデルの固有値解析から30モードを採用した通常モード法(方法-2)、3. ケーブルを一旦モード座標系に縮約し、ケーブルのモード数として9、18モードを採用し、全体のモード数としてそれぞれ21、30モードを採用したモード法(方法-3)。方法-3のケーブルモード数は、方法-2の全モード数と同じになるよう18モードを採用した。また、その半分の9モードを採用した場合の計算も行った。なお、時間積分はNewmarkの β 法で、荷重は桁中央に載荷し、調和加振周期を桁、ケーブルの1次周期に比較的近い0.63sec.、また、その2倍の1.26sec.とした。

応答解析に先立って固有値解析を行なったが、質点モデルの固有値解析結果とケーブルに9、18モードを採用した場合の結果を表-2に示す。モードを用いた場合の固有値は0.1%程度の誤差で、質点系の結果と一致していることがわかる。

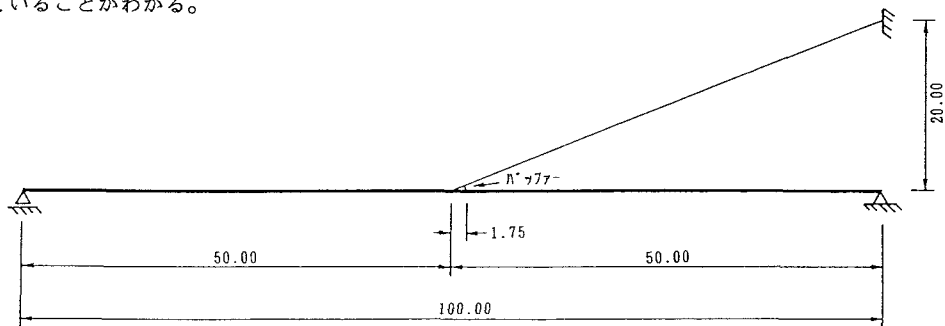


図-8 桁・ケーブル計算モデル

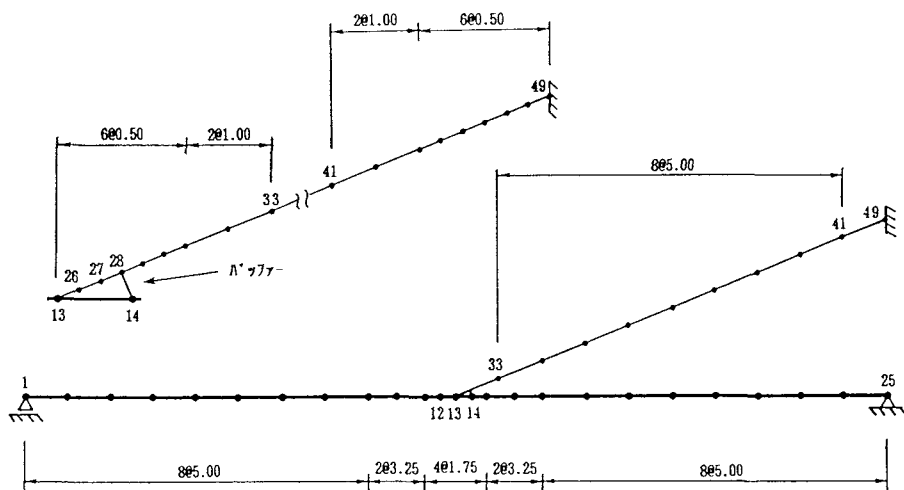


図-9 要素分割図

表-2 桁・ケーブルモデルの固有周期(sec.)

バッファーなし		バッファーあり		備考
質点モデル	本手法	質点モデル	本手法	
0.54062	0.54072 (0.018)	0.53892	0.53893 (0.002)	桁1次
0.53640	0.53673 (0.062)	0.52217	0.52246 (0.056)	
0.53190	0.53212 (0.041)	0.51956	0.51984 (0.054)	
0.26767	0.26785 (0.067)	0.26053	0.26071 (0.069)	
0.26761	0.26779 (0.067)	0.26048	0.26065 (0.065)	
0.17785	0.17800 (0.084)	0.17308	0.17322 (0.081)	
0.17783	0.17798 (0.084)	0.17306	0.17320 (0.081)	桁2次
0.13901	0.13901 (0.000)	0.13901	0.13901 (0.000)	
0.13277	0.13291 (0.105)	0.12917	0.12931 (0.108)	
0.13276	0.13291 (0.113)	0.12917	0.12930 (0.101)	

(): 誤差 %表示
注: 本手法では9モード, 18モードいずれも同じ結果となった

図-10にケーブル中央の張力(バッファーなし)の応答を示す。この場合、方法-1、2、3いずれもよい一致を示している。また、ケーブルの位置に関係なく、バッファーあり、なしに関係なく同様のことが言える。

図-11に0.63sec.で加振した(桁、ケーブルの1次周期に比較的近い周期での加振)場合のケーブルの曲げモーメントの応答(バッファーなし、節点26)を示す。図中、実線が方法-1、破線が方法-2、一点鎖線が方法-3(ケーブルモード数9)、二点鎖線が方法-3(ケーブルモード数18)の結果である。いずれもよい一致を示しているが、方法-3(ケーブルモード数18)が方法-1と最もよい一致を示した。

図-12はバッファー付きの結果(節点28)で、この場合も同様のことが言える。

図-13、14に加振周期を1.26 sec.にした場合のケーブル曲げモーメントの応答を示す。このケースも加振周期が接近している場合と同様、いずれも精度よく解析できることがわかる。ただ、加振周期が近い場合と異なり、方法-2での精度が多少悪くなる。これは、高次の振動モードまで必要になる場合にはモード選択に

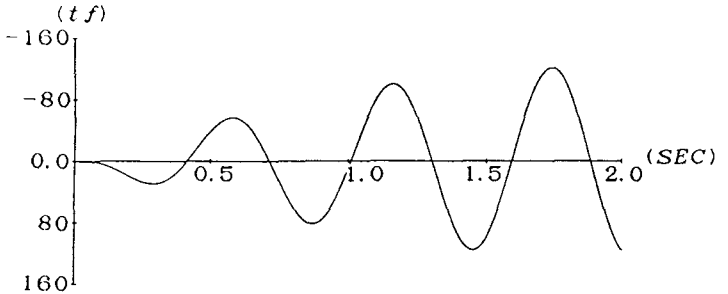


図-10 張力の応答図(ケーブル中央)

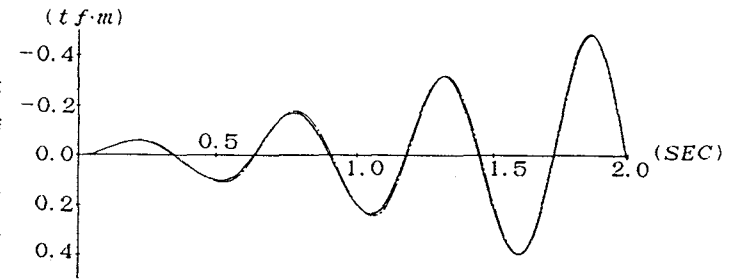


図-11 曲げモーメントの応答図($T=0.63(sec.)$, バッファーなし, 節点26)

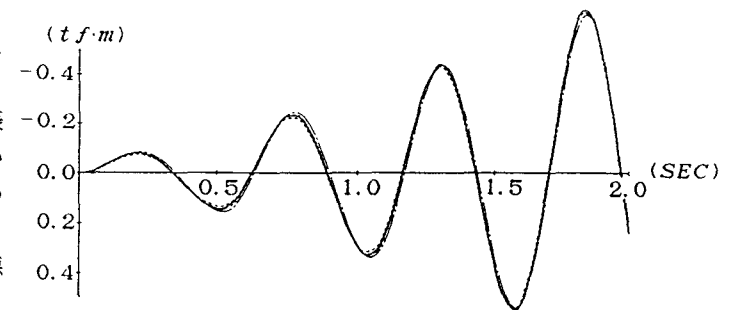


図-12 曲げモーメントの応答図($T=0.63(sec.)$, バッファー付, 節点28)

注意が必要になることを示しており、
本法のようにケーブルを一旦モード
変換したほうが対応しやすいことを
示している。

以上、簡単な桁、ケーブル系での
一例題ではあるが、本手法によって
十分な精度で解析が可能となること
がわかった。

4. まとめ

桁・ケーブル系について、非減衰
振動系の固有値、応答解析を行い主
に精度よく解析可能か、という点に
ついて検討を行なった。

質点モデルを直接時間積分した結
果との比較から、ケーブルに拘束モ
ードを用いた本手法によって精度のよ
い結果が得られることが確認できた。
本文では極めて簡単なモデルを対象

したため、質点モデルを直接固有値解
析し、モード座標に変換した方法ー

2 と比べて、計算時間、精度に関する有意な差異はみられなかった。しかしながら、斜張橋において、とくに
長大橋ではそれぞれのケーブルの振動数が接近するが、複数のケーブルとの連成応答挙動を対象とする場合
には有効な手法になると考える。

また、本論文の応答解析結果は平面系の応答に限定されているが、精度に関する考察は立体挙動に対しても
同様である。

なお、モード縮約法では、できる限り少ないモードが選べることが大切であり、今後斜張橋の特性を考慮
しつつ必要モード数の検討を行なう予定である。

参考文献

- 1) H.E.Langso and O.D.Larsen: Generating Mechanisms for Cable Stay Oscillations at the Farø Bridge、
Proc. of International Conference on Cable-Stayed Bridges、1987
- 2) 藤野陽三、P.Warnitchai and B.M.Pacheco: ケーブル・はりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関す
る実験と解析、土木学会論文集、No.432/ I- 16、1991
- 3) 高橋和雄、一ノ瀬寛幸、町田健一郎、夏秋義広: 変動軸力を受けるケーブルの動的安定性、土木学会構
造工学論文集、Vol.37A、1991
- 4) 藤野陽三: 構造物の制振対策(土木分野)、日本風工学会誌、No.44、1990
- 5) 川畑治、長井正嗣、有村英樹: 斜張橋のケーブル、桁鉛直曲げ、ねじれ1次振動数比に関する考察、土
木学会年次学術講演会概要集、1991
- 6) 川谷充郎、難波宗行、大松正行、亀井正博、中出収: 斜張橋の走行荷重による動的応答実験と理論解
析、土木学会構造工学論文集、Vol.37A、1991

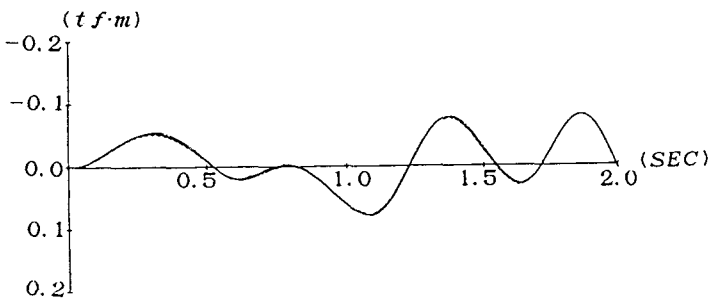


図-1 3 曲げモーメントの応答図 ($T=1.26(sec.)$, バッファなし, 節点 26)

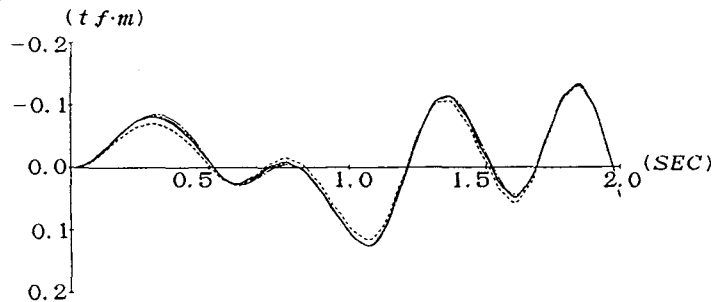


図-1 4 曲げモーメントの応答図 ($T=1.26(sec.)$, バッファ付, 節点 28)

- 7) A.S.Nazmy and A.M.A.Ghaffar: Non-linear Earthquake-response Analysis of Long-span Cable-stayed Bridges ; Theory 、 Earthquake Engineering and Structural Dynamics 、 Vol.19 、 1990
- 8) C.Y.Kim 、 S.P.Chang : Coupled Flexural-torsional Analysis of Cable-stayed Bridges Subjected to Earthquake Loading 、 Proc. of the Korea-Japan Joint Seminar on Steel Bridges 、 1990
- 9) 勝俣徹、安田正明、長井正嗣: 薄肉はりの曲げ、ねじれ連成振動解析と斜張橋主桁の連成振動特性、土木学会年次学術講演概要集、1991
- 10) 長松昭男: モード解析、培風館、1985
- 11) 長松昭男、大熊政昭: 部分構造合成法、培風館、1991
- 12) 菊池昭仁、奥井義昭、秋山成興、水上義彦、長井正嗣: ケーブルの振動解析における縮約法の適用、土木学会年次学術講演概要集、1991

(1991 年 9 月 30 日受付)