

種々の境界条件を持つ長方形厚板の解析と
薄板理論の適用性についてON ANALYSES FOR RECTANGULAR THICK PLATES WITH VARIOUS BOUNDARY
CONDITIONS AND APPLICABILITY OF THE THIN PLATE THEORY

奥村 勇* 渡辺 午一**

By Isamu A. OKUMURA and Hirokazu WATANABE

Analyses for bending of rectangular thick plates with various boundary conditions are carried out by the refined theory of Love's theory. Boundary conditions are concerned with two opposite edges simply supported and the other two edges free, built-in or simply supported. Loading conditions are concerned with a partially or fully distributed uniform load over the top face. The refined theory consists of a particular solution obtained from a part of a three-dimensional elasticity solution and a homogeneous solution constituted by a plane stress solution, a generalized plane stress solution and an anti-symmetric stress solution. The effect of thickness-width ratios, the boundary conditions and the loading conditions on the applicability of the thin plate theory is examined.

1. 緒 言

長方形厚板の曲げに関する研究は、3次元弾性論による研究および厚板理論による研究の二つに大別される。3次元弾性論は、境界条件が変位成分あるいは応力成分によって厳密に規定されるため、精確性の最も高い解析方法であるが、反面、自由辺あるいは固定辺を持つ中程度の厚さの長方形厚板の解析には、数値計算上の困難性から、適用できなくなる。厚板理論は、Reissner¹⁾および Mindlin²⁾に代表されるように、せん断変形の効果を導入して、薄板理論を補正することから始まり、現在では、Lo³⁾に見られる高次理論にまで発展している。この三つの研究とは、理論構築がやや異なる研究として、古くに、Iyengar⁴⁾の初関数法(MIF)がある。3次元弾性論に基づいた理論であるが、周辺単純支持長方形厚板の場合に限り、厳密な理論になっている。これらの理論は、弾性論的には、近似理論に過ぎないが、弾性論的に厳密な理論として Love⁵⁾の理論がある。しかしながら、Loveの理論には、板の上、下面の荷重条件(境界条件)を満たすための特殊解を求めることが難しい点および曲げに関する境界条件を二つしか規定できない点の二つの難点が見受けられ、古くからある理論の割には、ほとんど応用されてこなかったようである。奥村⁶⁾は、Loveの理論に見られるこの二つの難点に改良を加えた一厚板理論を円柱座標において提案し、扇形厚板の曲げを

* 工博 北見工業大学教授 工学部土木工学科 (〒090 北見市公園町165)

** 工修 元北見工業大学大学院生 (土木開発工学専攻)

解析している。

長い間、攻勢を極めた厚板理論の考究も、最近は、あまり見受けられなくなり、等方性厚板に関しては、一応、峠を越えたようである。しかしながら、これは、等方性長方形厚板の実際的な曲げの解析が、すべてなされたことを意味するものではない。たとえば、自由辺あるいは固定辺を持つ長方形厚板の解析は、十分に研究されているとはいいがたく、また、部分等分布荷重を受けるそれは、薄板と共に、十分に、研究されていないようである。もし、これらの境界条件および荷重条件を持つ長方形厚板および長方形薄板の実際的な曲げが解析されると、長方形厚板の応力特性および薄板理論の適用性に及ぼす境界条件および荷重条件の影響を調べることができる。薄板理論の適用性には、板厚比のみならず、境界条件および荷重条件も影響因子になると考えられる。

本論文は、上述した視点から、Loveの理論に改良を加えた厚板理論により、相対する2辺が単純支持、他の2辺が自由、固定あるいは単純支持の長方形厚板が、部分等分布荷重あるいは全面等分布荷重を受ける場合の曲げを解析し、さらに、それらの解析結果と薄板理論による解析結果とを比較して、薄板理論の適用性に及ぼす板厚比、境界条件および荷重条件の影響を検討するものである。固定の境界条件は、3次元の完全固定の条件ではなく、厚板としての固定の条件が用いられている。本論文で用いる厚板理論の精確性については、座標系が異なるが、前述の奥村らの研究において、詳細に検討されている。

2. 厚板理論による長方形厚板の解析

Loveの理論に改良を加えた厚板理論により、種々の境界条件を持つ長方形厚板の解析を行う。

(1) 荷重条件および境界条件

厚板の変位成分を u , v および w , 応力成分を σ_{xx} , $\dots$, σ_{xy} で表すことにする。図-1に示したように、板の上面に部分等分布荷重あるいは全面等分布荷重を受け、下面が自由の場合を考えると、荷重条件（境界条件）は、次式となる。

$$z = h/2 \text{ において、 } \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = -p(x, y) \quad (1 \cdot a \sim c)$$

$$z = -h/2 \text{ において、 } \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad (2 \cdot a \sim c)$$

ここで、 $p(x, y)$ は荷重関数であり、荷重強度を q とすると、次のように表される。

$$\text{部分等分布荷重: } p(x, y) = \begin{cases} q & [|x| < c/2 \text{ かつ } |y| < d/2] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \quad (3 \cdot a)$$

$$\text{全面等分布荷重: } p(x, y) = q \quad (|x| < a/2, |y| < b/2) \quad (3 \cdot b)$$

板の周辺の境界条件として、 $x = \pm a/2$ の相対する2辺が単純支持の場合を考えると、境界条件は、次のようになる。

$$x = \pm a/2 \text{ において、 } T_{xx} = 0, v = 0, w = 0, M_x = 0, \partial v / \partial z = 0 \quad (4)$$

ここで、 T_{xx} および M_x は、それぞれ、合応力および合偶力である。

また、 $y = \pm b/2$ の2辺の境界条件として、自由、固定あるいは単純支持の三つの場合を考えると、境界条件は、それぞれ、次式となる。

$$\text{自由: } T_{yy} = 0, S_{yx} = 0, Q_y = 0, M_y = 0, M_{yx} = 0 \quad (5 \cdot a \sim e)$$

$$\text{固定: } (u)_{x=0} = 0, (v)_{x=0} = 0, (w)_{x=0} = 0, (\partial u / \partial z)_{x=0} = 0, (\partial v / \partial z)_{x=0} = 0 \quad (6 \cdot a \sim e)$$

$$\text{単純支持: } T_{yy} = 0, u = 0, w = 0, M_y = 0, \partial u / \partial z = 0 \quad (7 \cdot a \sim e)$$

ここで、 T_{yy} および M_{yx} などは、それぞれ、合応力および合偶力であり、次式で表される。

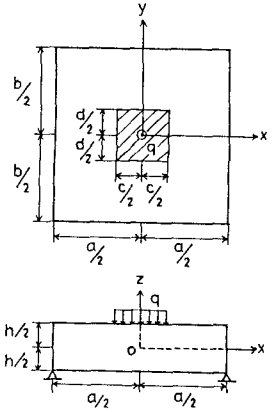


図-1 長方形厚板の座標系

$$T_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz, \quad S_{yz} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zy} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz, \quad M_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{zy} dz \quad (8)$$

(2) 特殊解

板の上, 下面における荷重条件を満足するために, 特殊解が必要になる。特殊解として, 一般化された Boussinesq の解⁷⁾を用いると, それは, 次のように表される。

$$2Gu = \frac{\partial}{\partial x}(\phi_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)\lambda_1 + 2\frac{\partial\theta_3}{\partial y} \quad (9 \cdot a)$$

$$2Gv = \frac{\partial}{\partial y}(\phi_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)\lambda_2 - 2\frac{\partial\theta_3}{\partial x} \quad (9 \cdot b)$$

$$2Gw = \frac{\partial}{\partial z}(\phi_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)\lambda_3 \quad (9 \cdot c)$$

ここで,

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_1 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_2 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0, \quad \nabla^2 \theta_3 = 0 \quad (10)$$

また, G および ν は, それぞれ, 材料のせん断弾性係数およびポアソン比を表し, ∇^2 は, 直交座標における Laplace の演算子を表す。

式 (9・a ~ c) に含まれる変位ポテンシャルの内, 特殊解として必要になる変位ポテンシャルは, ϕ_0 , λ_3 および θ_3 の三つだけである。 x および y に関する偶の問題に限定して, 式 (10) の第 1, 第 4 および第 5 式を解けば, 変位ポテンシャルが, 次のように求められる。

$$\phi_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(1)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(1)} \sinh n_{rs} z) \quad (11 \cdot a)$$

$$\lambda_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z) \quad (11 \cdot b)$$

$$\theta_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y (C_{rs}^{(3)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(3)} \sinh n_{rs} z) \quad (11 \cdot c)$$

ここで,

$$\alpha_r = r\pi/a \quad (r=1, 3, \dots), \quad \beta_s = s\pi/b \quad (s=1, 3, \dots), \quad n_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2} \quad (12)$$

また, $C_{rs}^{(1)}, \dots, \bar{C}_{rs}^{(3)}$ は, 荷重条件から定められる未定数である。

式 (11・a ~ c) を式 (9・a ~ c) に代入すると, 変位成分の表現が得られる。それより, ひずみ成分を求めて, Hooke の法則を用いると, 応力成分の表現が得られる。一例として, 応力成分 σ_{xx} , σ_{yz} および σ_{xz} について示せば, 次のとおりである。

$$\sigma_{xx} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} n_{rs} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \{ [n_{rs} C_{rs}^{(1)} - 2(1-\nu) C_{rs}^{(2)}] \cosh n_{rs} z + [n_{rs} \bar{C}_{rs}^{(1)} - 2(1-\nu) \bar{C}_{rs}^{(2)}] \sinh n_{rs} z + n_{rs} z (C_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z) \} \quad (13 \cdot a)$$

$$\sigma_{yz} = - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \sin \beta_s y \{ [\beta_s n_{rs} C_{rs}^{(1)} + \alpha_r n_{rs} C_{rs}^{(3)} - (1-2\nu) \beta_s C_{rs}^{(2)}] \sinh n_{rs} z + [\beta_s n_{rs} \bar{C}_{rs}^{(1)} + \alpha_r n_{rs} \bar{C}_{rs}^{(3)} - (1-2\nu) \beta_s \bar{C}_{rs}^{(2)}] \cosh n_{rs} z + \beta_s n_{rs} z (C_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z) \} \quad (13 \cdot b)$$

$$\sigma_{xz} = - \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_r x \cos \beta_s y \{ [\alpha_r n_{rs} C_{rs}^{(1)} - \beta_s n_{rs} C_{rs}^{(3)} - (1-2\nu) \alpha_r C_{rs}^{(2)}] \sinh n_{rs} z + [\alpha_r n_{rs} \bar{C}_{rs}^{(1)} - \beta_s n_{rs} \bar{C}_{rs}^{(3)} - (1-2\nu) \alpha_r \bar{C}_{rs}^{(2)}] \cosh n_{rs} z + \alpha_r n_{rs} z (C_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z) \} \quad (13 \cdot c)$$

後述する同次解は, 式 (1・a, b) および式 (2・a, b) の荷重条件を満足し, σ_{xx} は, 恒等的に 0 であるので, 式 (13・a ~ c) が, 式 (1・a ~ c) および式 (2・a ~ c) の荷重条件を満足すればよい。式 (3・a) あるいは式 (3・b) の $p(x, y)$ を Fourier 級数に展開して, 式 (13・a ~ c) に式 (1・a ~ c) および式 (2・a ~

c) の荷重条件を課すると、未定定数が次のように定められる。

$$\begin{aligned} C_{rs}^{(1)} &= -\frac{\ell_{rs}}{n_{rs}^2} \mathcal{Q}_{rs} (\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1 + 2\nu), \quad \bar{C}_{rs}^{(1)} = -\frac{\ell_{rs}}{n_{rs}^2} \mathcal{I}_{rs} (\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 1 + 2\nu); \\ C_{rs}^{(2)} &= \frac{\ell_{rs}}{n_{rs}} \mathcal{Q}_{rs}, \quad \bar{C}_{rs}^{(2)} = \frac{\ell_{rs}}{n_{rs}} \mathcal{I}_{rs}, \quad C_{rs}^{(3)} = \bar{C}_{rs}^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \zeta_{rs} &= \frac{n_{rs} h}{2}, \quad \mathcal{Q}_{rs} = \frac{\sinh \zeta_{rs}}{2(\sinh \zeta_{rs} \cosh \zeta_{rs} + \zeta_{rs})}, \quad \mathcal{I}_{rs} = \frac{\cosh \zeta_{rs}}{2(\sinh \zeta_{rs} \cosh \zeta_{rs} - \zeta_{rs})}; \\ e_{rs} &= \begin{cases} \frac{16Q}{\pi^2} \frac{1}{rs} \sin \frac{r\pi c}{2a} \sin \frac{s\pi d}{2b} & \text{[部分等分布荷重]} \\ \frac{16Q}{\pi^2} \frac{(-1)^{(r+s-2)/2}}{rs} & \text{[全面等分布荷重]} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

式 (14) により、特殊解に含まれていた未定定数がすべて厳密に定められ、特殊解は閉じた解になる。肩添字 (ρ) を付して、 $y = \pm b/2$ における境界条件に直接関係した変位成分および応力成分を示せば、次のとおりである。

$$\begin{aligned} 2G\mathcal{U}^{(\rho)} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_r \ell_{rs}}{n_{rs}^2} \sin \alpha_r x \cos \beta_s y \{ \mathcal{Q}_{rs} [(\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \cosh n_{rs} z - n_{rs} z \sinh n_{rs} z] \\ &\quad + \mathcal{I}_{rs} [(\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \sinh n_{rs} z - n_{rs} z \cosh n_{rs} z] \} \end{aligned} \quad (16 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} 2G\mathcal{V}^{(\rho)} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}^2} \cos \alpha_r x \sin \beta_s y \{ \mathcal{Q}_{rs} [(\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \cosh n_{rs} z - n_{rs} z \sinh n_{rs} z] \\ &\quad + \mathcal{I}_{rs} [(\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \sinh n_{rs} z - n_{rs} z \cosh n_{rs} z] \} \end{aligned} \quad (16 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} 2G\mathcal{W}^{(\rho)} &= -\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\ell_{rs}}{n_{rs}} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \{ \mathcal{Q}_{rs} [(\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} + 2 - 2\nu) \sinh n_{rs} z - n_{rs} z \cosh n_{rs} z] \\ &\quad + \mathcal{I}_{rs} [(\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} + 2 - 2\nu) \cosh n_{rs} z - n_{rs} z \sinh n_{rs} z] \} \end{aligned} \quad (16 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(\rho)} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\ell_{rs}}{n_{rs}^2} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \{ \beta_s^2 (\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1) - 2\nu \alpha_r^2 \} \cosh n_{rs} z - \beta_s^2 n_{rs} z \sinh n_{rs} z \\ &\quad + \mathcal{I}_{rs} \{ \beta_s^2 (\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 1) - 2\nu \alpha_r^2 \} \sinh n_{rs} z - \beta_s^2 n_{rs} z \cosh n_{rs} z \} \end{aligned} \quad (17 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^{(\rho)} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}} \cos \alpha_r x \sin \beta_s y [\mathcal{Q}_{rs} (\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} \sinh n_{rs} z - n_{rs} z \cosh n_{rs} z) \\ &\quad + \mathcal{I}_{rs} (\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} \cosh n_{rs} z - n_{rs} z \sinh n_{rs} z)] \end{aligned} \quad (17 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(\rho)} &= -\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_r \beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}^2} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y \{ \mathcal{Q}_{rs} [(\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \cosh n_{rs} z - n_{rs} z \sinh n_{rs} z] \\ &\quad + \mathcal{I}_{rs} [(\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \sinh n_{rs} z - n_{rs} z \cosh n_{rs} z] \} \end{aligned} \quad (17 \cdot c)$$

(3) 同次解

式 (16・a～c) および式 (17・a～c) に見るように、特殊解は、 $y = \pm b/2$ における式 (7・a～e) の単純支持の条件は満足しているが、自由あるいは固定の境界条件は満足していない。そのため、自由あるいは固定の境界条件を満足するために、同次解が必要になる。その同次解として、Loveの理論に見られる平面応力解および一般化平面応力解の二つと、さらに、板の中央面に関する逆対称応力解とを用いる。

a) 平面応力解 肩添字 ($h, 1$) を付して表わすと、平面応力解は、次式となる。

$$2G\mathcal{U}^{(h,1)} = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r x \left\{ P_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + P_r^{(3)} \left[\frac{1}{1+\nu} \{ 2 - \nu (\alpha_r z)^2 \} \cosh \alpha_r y + \alpha_r y \sinh \alpha_r y \right] \right\} \quad (18 \cdot a)$$

$$2Gv^{(h,1)} = - \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos \alpha_r x \left\{ P_r^{(1)} \sinh \alpha_r y - P_r^{(3)} \left[\frac{1}{1+\nu} (1-\nu + \nu(\alpha_r z)^2) \sinh \alpha_r y - \alpha_r y \cosh \alpha_r y \right] \right\} \quad (18 \cdot b)$$

$$2Gw^{(h,1)} = - \frac{2\nu}{1+\nu} z \sum_{r=1}^{\infty} P_r^{(3)} \alpha_r^2 \cos \alpha_r x \cosh \alpha_r y \quad (18 \cdot c)$$

$$\sigma_{yy}^{(h,1)} = - \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \cos \alpha_r x \left\{ P_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + P_r^{(3)} \left[\alpha_r y \sinh \alpha_r y - \frac{\nu}{1+\nu} (\alpha_r z)^2 \cosh \alpha_r y \right] \right\} \quad (19 \cdot a)$$

$$\sigma_{yz}^{(h,1)} = 0 \quad (19 \cdot b)$$

$$\sigma_{xz}^{(h,1)} = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \sin \alpha_r x \left\{ P_r^{(1)} \sinh \alpha_r y + P_r^{(3)} \left[\left\{ 1 - \frac{\nu}{1+\nu} (\alpha_r z)^2 \right\} \sinh \alpha_r y + \alpha_r y \cosh \alpha_r y \right] \right\} \quad (19 \cdot c)$$

ここで、 $P_r^{(1)}$ および $P_r^{(3)}$ は、境界条件から定められる未定定数である。

b) 一般化平面応力解 肩添字 ($h, 2$) を付して表すと、一般化平面応力解は、次式となる。

$$2Gu^{(h,2)} = z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r x \left\{ Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \left[\alpha_r y \sinh \alpha_r y - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r z)^2 \cosh \alpha_r y \right] \right\} \quad (20 \cdot a)$$

$$2Gv^{(h,2)} = -z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos \alpha_r x \left\{ Q_r^{(1)} \sinh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \left[\alpha_r y \cosh \alpha_r y + \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r z)^2 \right\} \sinh \alpha_r y \right] \right\} \quad (20 \cdot b)$$

$$2Gw^{(h,2)} = \sum_{r=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \left\{ Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \left[\alpha_r y \sinh \alpha_r y - \frac{\alpha_r^2}{2(1-\nu)} (h^2 - 2\nu z^2) \cosh \alpha_r y \right] \right\} \quad (20 \cdot c)$$

$$\sigma_{yy}^{(h,2)} = -z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \cos \alpha_r x \left\{ Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \left[\alpha_r y \sinh \alpha_r y + \frac{1}{1-\nu} \left\{ 2 - \frac{2-\nu}{3} (\alpha_r z)^2 \right\} \cosh \alpha_r y \right] \right\} \quad (21 \cdot a)$$

$$\sigma_{yz}^{(h,2)} = - \frac{h^2 - 4z^2}{4(1-\nu)} \sum_{r=1}^{\infty} Q_r^{(3)} \alpha_r^2 \cos \alpha_r x \sinh \alpha_r y \quad (21 \cdot b)$$

$$\sigma_{xz}^{(h,2)} = z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \sin \alpha_r x \left\{ Q_r^{(1)} \sinh \alpha_r y + Q_r^{(3)} \left[\alpha_r y \cosh \alpha_r y + \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r z)^2 \right\} \sinh \alpha_r y \right] \right\} \quad (21 \cdot c)$$

ここで、 $Q_r^{(1)}$ および $Q_r^{(3)}$ は、境界条件から定められる未定定数である。

c) 逆対称応力解 この解は、Kromm⁸⁾ が求めているが、式 (10) の第 5 式における θ_s を

$$\theta_s = \sin \lambda z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} \sin \alpha_r x \sinh m_r y \quad (22)$$

ここで、

$$\lambda = \pi/h, \quad m_r = \sqrt{\lambda^2 + \alpha_r^2} \quad (23)$$

とおくと得られる。肩添字 ($h, 3$) を付して表すと、逆対称応力解は、次式となる。

$$2Gu^{(h,3)} = 2 \sin \lambda z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} m_r \sin \alpha_r x \cosh m_r y \quad (24 \cdot a)$$

$$2Gv^{(h,3)} = -2 \sin \lambda z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} \alpha_r \cos \alpha_r x \sinh m_r y \quad (24 \cdot b)$$

$$2Gw^{(h,3)} = 0 \quad (24 \cdot c)$$

$$\sigma_{yy}^{(h,3)} = -2 \sin \lambda z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} \alpha_r m_r \cos \alpha_r x \cosh m_r y \quad (25 \cdot a)$$

$$\sigma_{yz}^{(h,3)} = -\lambda \cos \lambda z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} \alpha_r \cos \alpha_r x \sinh m_r y \quad (25 \cdot b)$$

$$\sigma_{xz}^{(h,3)} = \sin \lambda z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} (\alpha_r^2 + m_r^2) \sin \alpha_r x \sinh m_r y \quad (25 \cdot c)$$

ここで、 $E_r^{(1)}$ は、境界条件から定められる未定定数である。

求める解は、特殊解と同次解とを加えたものであり、次のように表される。

$$u = u^{(p)} + u^{(h, 1)} + u^{(h, 2)} + u^{(h, 3)}, \dots, \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^{(p)} + \sigma_{xy}^{(h, 1)} + \sigma_{xy}^{(h, 2)} + \sigma_{xy}^{(h, 3)} \quad (26)$$

式(4)の $x = \pm a/2$ における単純支持の条件は、式(12)の第1式により、すべて自明に満足されるので、 $y = \pm b/2$ における境界条件のみを考えればよい。以下では、 $y = \pm b/2$ における式(5・a～e)の自由の条件、式(6・a～e)の固定の条件および式(7・a～e)の単純支持の条件を考える。

(4) 未定定数の決定

a) 2辺自由の場合 この場合の境界条件は、すべて、断面力によって規定されるので、式(17・a～c)，(19・a～c)，(21・a～c)および式(25・a～c)を式(8)に代入して、合応力および合偶力を求め、それらに、式(5・a～e)の境界条件を課すると、二組の連立1次方程式が得られる。

式(5・a, b)から、次の2元連立1次方程式を得る。

$$P_r^{(1)} \cosh \xi_r + P_r^{(3)} \left[\xi_r \sinh \xi_r - \frac{\nu(\alpha_r h)^2}{12(1+\nu)} \cosh \xi_r \right] = 0 \quad (27 \cdot a)$$

$$P_r^{(1)} \sinh \xi_r + P_r^{(3)} \left\{ \xi_r \cosh \xi_r + \left[1 - \frac{\nu(\alpha_r h)^2}{12(1+\nu)} \right] \sinh \xi_r \right\} = \frac{4\nu}{\alpha_r h} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}^3} Q_{rs} \sinh \zeta_{rs} \quad (27 \cdot b)$$

ここで、 $\xi_r = \alpha_r b/2$ 。

上の二つの式を解けば、未定定数が次のように定められる。

$$P_r^{(1)} = -\frac{4\nu}{\alpha_r h d_s \sinh \xi_r} \left[\xi_r \tanh \xi_r - \frac{\nu(\alpha_r h)^2}{12(1+\nu)} \right] \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(1)}, \quad P_r^{(3)} = \frac{4\nu}{\alpha_r h d_s \sinh \xi_r} \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(1)} \quad (28)$$

ここで、

$$d_1 = 1 + \frac{\xi_r}{\sinh \xi_r \cosh \xi_r}, \quad \mathcal{I}_{rs}^{(1)} = \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}^3} Q_{rs} \sinh \zeta_{rs} \quad (29)$$

式(5・c～e)から、次の3元連立1次方程式を得る。

$$\frac{(\alpha_r h)^3}{6(1-\nu)} Q_r^{(3)} \sinh \xi_r + 2\alpha_r E_r^{(1)} \sinh \eta_r = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}^2} \quad (30 \cdot a)$$

$$Q_r^{(1)} \cosh \xi_r + Q_r^{(3)} \left\{ \xi_r \sinh \xi_r + \frac{1}{1-\nu} \left[2 - \frac{2-\nu}{20} (\alpha_r h)^2 \right] \cosh \xi_r \right\} + \frac{48m_r}{\alpha_r h^3 \lambda^2} E_r^{(1)} \cosh \eta_r = 0 \quad (30 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} Q_r^{(1)} \sinh \xi_r + Q_r^{(3)} \left\{ \xi_r \cosh \xi_r + \left[1 - \frac{2-\nu}{20(1-\nu)} (\alpha_r h)^2 \right] \sinh \xi_r \right\} + \frac{24}{h^3 \lambda^2} \left(1 + \frac{m_r^2}{\alpha_r^2} \right) E_r^{(1)} \sinh \eta_r \\ = -\frac{12}{\alpha_r h^3} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s \ell_{rs}}{n_{rs}^4} [1 - 4\nu \Gamma_{rs} (\zeta_{rs} \cosh \zeta_{rs} - \sinh \zeta_{rs})] \end{aligned} \quad (30 \cdot c)$$

ここで、 $\eta_r = m_r b/2$ 。

上の三つの式を解けば、未定定数が次のように定められる。

$$\begin{aligned} Q_r^{(1)} &= \frac{12}{\alpha_r h^3 \sinh \xi_r} \left[\frac{d_2}{d_3} \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(2)} - \frac{1}{(\alpha_r \lambda)^2} \left(2\alpha_r m_r \coth \eta_r + \frac{f_r d_2}{d_3} \right) \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(3)} \right]; \\ Q_r^{(3)} &= -\frac{12}{\alpha_r h^3 d_3 \sinh \xi_r} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(2)} - \frac{f_r}{(\alpha_r \lambda)^2} \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(3)} \right]; \\ E_r^{(1)} &= \frac{1}{\sinh \eta_r} \left\{ \frac{\alpha_r}{d_3(1-\nu)} \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(3)} + \frac{1}{2\alpha_r} \left[1 - \frac{2f_r}{\lambda^2 d_3(1-\nu)} \right] \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{I}_{rs}^{(3)} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、

$$f_r = 2\alpha_r m_r \tanh \xi_r \coth \eta_r - m_r^2 - \alpha_r^2, \quad d_3 = \frac{\xi_r}{\sinh \xi_r \cosh \xi_r} - \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{2f_r}{\lambda^2(1-\nu)};$$

$$d_2 = \left[\xi_r - \frac{4\alpha_r m_r}{\lambda^2(1-\nu)} \coth \eta_r \right] \tanh \xi_r + \frac{1}{1-\nu} \left[2 - \frac{2-\nu}{20} (\alpha_r h)^2 \right];$$

$$\mathbb{I}_{rs}^{(2)} = \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s e_{rs}}{n_{rs}^4} [1 - 4\nu f_{rs}(\zeta_{rs} \cosh \zeta_{rs} - \sinh \zeta_{rs})], \quad \mathbb{I}_{rs}^{(3)} = \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s e_{rs}}{n_{rs}^2} \quad (32)$$

b) 2 辺固定の場合 この場合の境界条件は、変位成分あるいは横断面の回転によって規定されるので式 (16・a ~ c), (18・a ~ c), (20・a ~ c) および式 (24・a ~ c) に式 (6・a ~ e) の境界条件を課すると、二組の連立 1 次方程式が得られる。

式 (6・a, b) から、次の 2 元連立 1 次方程式を得る。

$$P_r^{(1)} \cosh \xi_r + P_r^{(3)} \left(\frac{2}{1+\nu} \cosh \xi_r + \xi_r \sinh \xi_r \right) = 0 \quad (33 \cdot a)$$

$$P_r^{(1)} \alpha_r \sinh \xi_r - P_r^{(3)} \alpha_r \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \sinh \xi_r - \xi_r \cosh \xi_r \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s e_{rs}}{n_{rs}^2} d_{rs} (\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \quad (33 \cdot b)$$

上の二つの式を解けば、未定定数が次のように定められる。

$$P_r^{(1)} = \frac{1}{\alpha_r d_4 \sinh \xi_r} \left(\frac{2}{1+\nu} + \xi_r \tanh \xi_r \right) \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{I}_{rs}^{(4)}, \quad P_r^{(3)} = -\frac{1}{\alpha_r d_4 \sinh \xi_r} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{I}_{rs}^{(4)} \quad (34)$$

ここで、

$$d_4 = \frac{3-\nu}{1+\nu} - \frac{\xi_r}{\sinh \xi_r \cosh \xi_r}, \quad \mathbb{I}_{rs}^{(4)} = \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s e_{rs}}{n_{rs}^2} d_{rs} (\zeta_{rs} \coth \zeta_{rs} - 1 + 2\nu) \quad (35)$$

式 (6・c ~ e) から、次の 3 元連立 1 次方程式を得る。

$$Q_r^{(1)} \cosh \xi_r + Q_r^{(3)} \left[\xi_r \sinh \xi_r - \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \cosh \xi_r \right] = 0 \quad (36 \cdot a)$$

$$Q_r^{(1)} \alpha_r \cosh \xi_r + Q_r^{(3)} \alpha_r \xi_r \sinh \xi_r + 2E_r^{(1)} \lambda m_r \cosh \eta_r = 0 \quad (36 \cdot b)$$

$$Q_r^{(1)} \alpha_r \sinh \xi_r + Q_r^{(3)} \alpha_r (\xi_r \cosh \xi_r + \sinh \xi_r) + 2E_r^{(1)} \lambda \alpha_r \sinh \eta_r$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s e_{rs}}{n_{rs}} f_{rs} (\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 2 + 2\nu) \quad (36 \cdot c)$$

上の三つの式を解けば、未定定数が次のように定められる。

$$Q_r^{(1)} = -\frac{1}{\alpha_r d_5 \sinh \xi_r} \left[\xi_r \tanh \xi_r - \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \right] \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{I}_{rs}^{(5)}, \quad Q_r^{(3)} = \frac{1}{\alpha_r d_5 \sinh \xi_r} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{I}_{rs}^{(5)};$$

$$E_r^{(1)} = -\frac{(\alpha_r h)^2 \coth \xi_r}{4(1-\nu) \lambda m_r d_5 \cosh \eta_r} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbb{I}_{rs}^{(5)} \quad (37)$$

ここで、

$$d_5 = 1 + \frac{\xi_r}{\sinh \xi_r \cosh \xi_r} + \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{\alpha_r}{m_r} \coth \xi_r \tanh \eta_r \right);$$

$$\mathbb{I}_{rs}^{(5)} = \frac{(-1)^{(s-1)/2} \beta_s e_{rs}}{n_{rs}} f_{rs} (\zeta_{rs} \tanh \zeta_{rs} - 2 + 2\nu) \quad (38)$$

c) 2 辺単純支持の場合 この場合の境界条件は、前述したように、特殊解によってすでに満足されているので、同次解は不要になり、未定定数は、次式となる。

$$P_r^{(1)} = P_r^{(3)} = Q_r^{(1)} = Q_r^{(3)} = E_r^{(1)} = 0 \quad (39)$$

以上見たように、周辺単純支持の場合には、3 次元弾性論により、厳密に解析され、 $y = \pm b/2$ の 2 辺が自由あるいは固定の場合には、Saint-Venant の原理あるいは幾何学的条件を用いて近似的に解析される。

(5) 計算結果

数値計算は、辺長比 $b/a = 1.0$ およびポアソン比 $\nu = 0.3$ を持つ正方形厚板が、部分等分布荷重 ($c/$

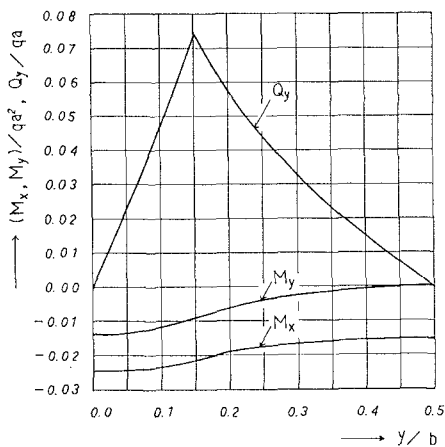


図-2 断面力の y 方向の分布
(2辺自由, $x=0, e=1/4$)

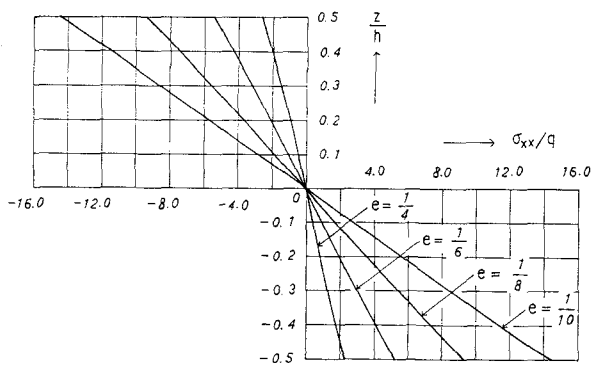


図-3 σ_{xx} の板厚方向の分布
(2辺自由, $x=y=0$)

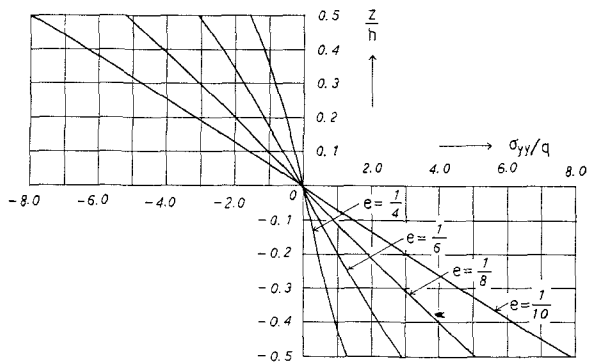


図-4 σ_{yy} の板厚方向の分布
(2辺自由, $x=y=0$)

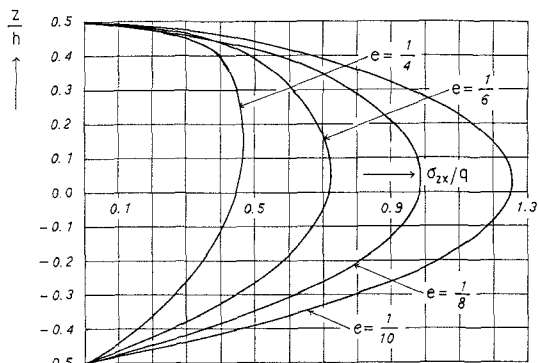


図-5 σ_{zx} の板厚方向の分布
(2辺自由, $x=0.15a, y=0$)

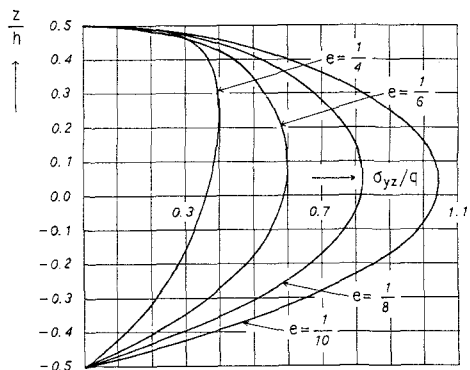


図-6 σ_{yz} の板厚方向の分布
(2辺自由, $x=0, y=0.15b$)

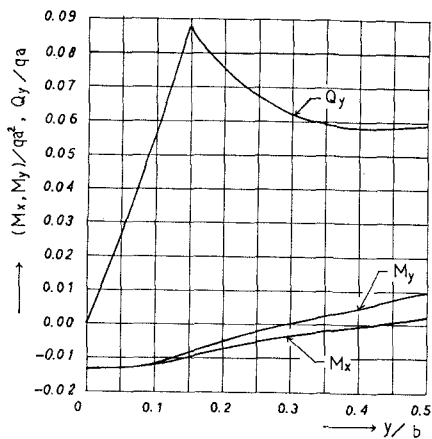


図-7 断面力の y 方向の分布
(2辺固定, $x=0, e=1/4$)

$a = d/b = 0.3$)あるいは全面等分布荷重 ($c/a = d/b = 1.0$)を受ける場合について行った。この場合に、板厚比 $e = h/a$ は、 $1/4$ から $1/20$ まで変化させた。級数の項数は、 r および s の奇数のみに関して、最初の54項を用いた。厳密な級数解のため、収束は極めて早い。部分等分布荷重の局所性の影響を考えて、十分な項数を用いた。以下に、部分等分布荷重を受ける正方形厚板の2辺自由および2辺固定の場合に関する計算結果を示す。

a) 2辺自由の場合 図-2に、

$e = 1/4$ の場合のせん断力 Q_y および曲げモーメント M_x , M_y の y 軸に沿った分布を示した。 M_y および M_x の変化は、ゆるやかであるが、 Q_y は、荷重の分布境界 ($y/b = 0.15$) において急激に変化している。図-3および図-4に、垂直応力 σ_{xx} および σ_{yy} の z 軸に沿った分布をそれぞれ示した。 $e = 1/4$ の場合には、直線分布からの隔たりが著しいが、 $e = 1/10$ の場合には、ほぼ直線分布になっている。図-5および図-6に、 $x = 0.15a$, $y = 0$ におけるせん断応力 σ_{xz} および $x = 0$, $y = 0.15b$ におけるせん断応力 σ_{yz} の z 方向の分布をそれぞれ示した。 $x = 0.15a$ および $y = 0.15b$ は、荷重の分布境界であるため、 $e = 1/10$ の場合でも、やや、放物線分布からの隔たりが見られ、最大値を示す位置が、板の上側に移っている。

図-3から図-6に見るように、 $e = 1/8$ の場合でも、曲げ応力の分布に直線あるいは放物線からの隔たりがやや見られる。この点に注目すれば、Reissner¹⁾の理論は、板厚比 e が $1/8$ 以下の平板の解析に適していると考えられる。

b) 2辺固定の場合 図-7に、 $e = 1/4$ の場合の Q_y , M_y および M_x の y 軸に沿った分布を示した。 Q_y は、荷重の分布境界において急激に変化し、 $y/b = 0.5$ の固定辺で大きな値を示している。 M_y は、 $y/b = 0.3$ の近くに変曲点を持ち、薄板に比較して、変曲点の位置が、やや、内側に移っている。図-8

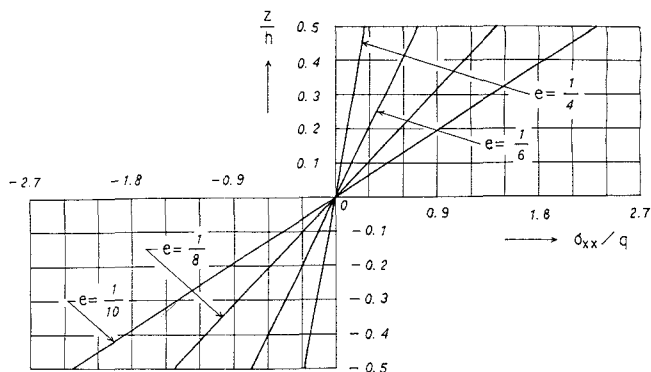


図-8 σ_{xx} の板厚方向の分布
(2辺固定, $x=0, y=0.5b$)

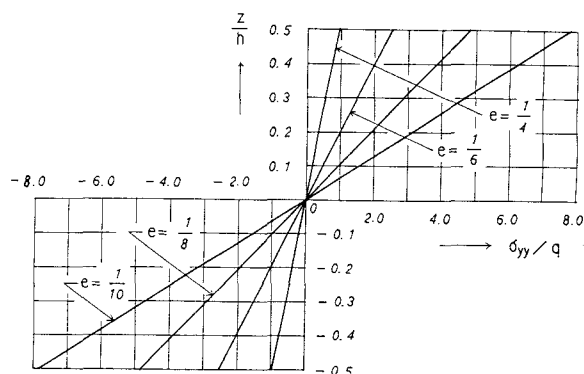


図-9 σ_{yy} の板厚方向の分布
(2辺固定, $x=0, y=0.5b$)

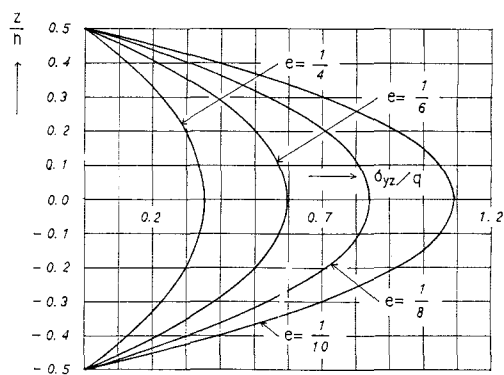


図-10 σ_{yz} の板厚方向の分布
(2辺固定, $x=0, y=0.5b$)

および図-9に、固定辺の $x=0$ における σ_{xx} および σ_{yy} の z 方向の分布をそれぞれ示した。本論文で用いた固定の条件は、3次元の完全固定の条件ではないため、固定辺においても、 $e=1/10$ の場合には、ほぼ直線分布になっている。図-10に、固定辺の $x=0$ における σ_{yz} の z 方向の分布を示した。荷重の分布境界を離れた位置では、 $e=1/8$ の場合でも、ほぼ放物線分布になっている。

3. 厚板理論と薄板理論とによる解析結果の比較

長方形平板の曲げに関する薄板理論の適用性を吟味するために、板厚比 $e = h/a$ ，境界条件および荷重

表1 部分等分布荷重の場合の w の比較
($x=z=0$)

h/a	w/w _c					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.243	1.316	1.101	1.066	1.058	1.037
1/12	1.111	1.146	1.045	1.030	1.026	1.017
1/16	1.063	1.084	1.025	1.017	1.015	1.009
1/20	1.041	1.054	1.016	1.011	1.009	1.006

表2 全面等分布荷重の場合の w の比較
($x=z=0$)

h/a	w/w _c					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.274	1.451	1.072	1.080	1.035	1.039
1/12	1.126	1.207	1.032	1.035	1.014	1.017
1/16	1.072	1.118	1.018	1.020	1.006	1.008
1/20	1.046	1.076	1.011	1.013	1.003	1.004

表3 部分等分布荷重の場合の σ_{xx} の比較
($x=0, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{xx}/\sigma_{xx,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.080	1.377	1.022	1.007	1.014	1.005
1/12	1.038	1.183	1.010	1.003	1.006	1.002
1/16	1.022	1.106	1.006	1.002	1.003	1.001
1/20	1.014	1.070	1.004	1.001	1.002	1.001

表4 全面等分布荷重の場合の σ_{xx} の比較
($x=0, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{xx}/\sigma_{xx,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.150	1.555	1.007	1.009	1.000	1.003
1/12	1.070	1.255	1.003	1.004	0.997	0.999
1/16	1.040	1.145	1.002	1.002	0.997	0.998
1/20	1.026	1.093	1.001	1.001	0.997	0.997

表5 部分等分布荷重の場合の σ_{yy} の比較
($x=0, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{yy}/\sigma_{yy,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.5b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.032	0.888	1.022	0.989	1.023	0.947
1/12	1.015	0.948	1.010	0.995	1.010	0.971
1/16	1.008	0.988	1.006	0.997	1.005	0.980
1/20	1.005	0.979	1.004	0.998	1.003	0.985

表6 全面等分布荷重の場合の σ_{yy} の比較
($x=0, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{yy}/\sigma_{yy,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.5b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.028	0.820	1.007	1.012	0.950	0.952
1/12	1.014	0.965	1.003	1.005	0.968	0.904
1/16	1.008	0.981	1.002	1.003	0.977	0.930
1/20	1.005	0.988	1.001	1.002	0.982	0.945

表7 部分等分布荷重の場合の σ_{xz} の比較
($y=z=0$)

h/a	$\sigma_{xz}/\sigma_{xz,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a
1/8	0.920	1.036	0.918	1.000	0.924	0.998
1/12	0.949	1.017	0.950	1.000	0.955	0.999
1/16	0.964	1.010	0.965	1.000	0.967	0.999
1/20	0.975	1.007	0.975	1.000	0.976	0.999

表8 全面等分布荷重の場合の σ_{xz} の比較
($y=z=0$)

h/a	$\sigma_{xz}/\sigma_{xz,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a
1/8	1.114	1.084	1.000	1.000	0.982	0.983
1/12	1.054	1.040	1.000	1.000	0.987	0.989
1/16	1.031	1.024	1.000	1.000	0.990	0.991
1/20	1.020	1.015	1.000	1.000	0.992	0.993

表9 部分等分布荷重の場合の σ_{yz} の比較
($x=z=0$)

h/a	$\sigma_{yz}/\sigma_{yz,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.3b
1/8	0.907	0.849	0.908	1.000	0.900	1.004
1/12	0.940	0.902	0.939	1.000	0.933	1.002
1/16	0.956	0.930	0.954	1.000	0.950	1.002
1/20	0.965	0.946	0.963	1.000	0.960	1.001

表10 全面等分布荷重の場合の σ_{yz} の比較
($x=z=0$)

h/a	$\sigma_{yz}/\sigma_{yz,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.3b
1/8	0.966	0.918	1.000	0.955	1.175	1.154
1/12	0.985	0.952	1.000	0.970	1.121	1.116
1/16	0.991	0.966	1.000	0.977	1.095	1.092
1/20	0.994	0.973	1.000	0.982	1.079	1.077

表11 部分等分布荷重の場合の σ_{xy} の比較
($x=0.15a, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{xy} / \sigma_{xy,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0.15b	y=0.3b	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.3b
1/8	0.999	1.010	1.008	1.009	1.005	1.019
1/12	1.004	1.002	1.008	1.004	1.009	1.005
1/16	1.004	1.000	1.007	1.002	1.007	1.001
1/20	1.004	1.000	1.005	1.001	1.006	1.000

表12 全面等分布荷重の場合の σ_{xy} の比較
($x=0.15a, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{xy} / \sigma_{xy,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0.15b	y=0.3b	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.3b
1/8	1.028	1.069	1.007	1.008	1.172	1.155
1/12	1.016	1.036	1.003	1.003	1.098	1.097
1/16	1.011	1.022	1.002	1.002	1.065	1.068
1/20	1.007	1.015	1.001	1.001	1.048	1.048

条件を変えて、厚板理論と薄板理論とによる計算結果の比較を行う。辺長比 $b/a=1.0$ およびポアソン比 $\nu=0.3$ の正方形平板が、部分等分布荷重 ($c/a=d/b=0.3$) あるいは全面等分布荷重 ($c/a=d/b=1.0$) を受ける場合を取扱う。表1から表12に、厚板理論の値と薄板理論の値とを比の形で示す。薄板理論の値は、添字 c を付して、分母に取る。表1および表2に、中央面のたわみ w の比較を示した。2辺固定の場合には、全面等分布荷重が部分等分布荷重よりもやや相異が大きく、 $y=0.3b$ における値が、 $e=1/12$ でも、20.7%相異している。2辺自由および周辺単純支持の場合には、 $e=1/12$ 以下で良く一致している。この二つの表から、 w に及ぼす板厚比、荷重条件および境界条件の影響は、極めて大きいことがわかる。表3および表4に、 σ_{xx} の比較を示した。周辺単純支持および2辺自由の場合には、 $e=1/8$ 以下で、部分等分布荷重および全面等分布荷重共に良く一致するが、2辺固定の場合には、 $e=1/12$ でも、部分等分布荷重および全面等分布荷重の $y=0.3b$ における値が、それぞれ、18.3%および25.5%の相異を示している。表5および表6に、 σ_{yy} の比較を示した。周辺単純支持の場合には、 $e=1/8$ 以下で、部分等分布荷重および全面等分布荷重共に良く一致するが、2辺自由の場合には、全面等分布荷重が部分等分布荷重よりも相異が大きく、 $y=0.3b$ における値が、 $e=1/12$ でも、9.6%相異している。2辺固定の場合には、 $e=1/12$ でも、 $y=0.5b$ の固定辺における部分等分布荷重の値が、5.2%の相異を示している。表7および表8に、 σ_{xz} の比較を示した。部分等分布荷重の場合には、荷重の分布境界 ($x=0.15a$) で相異が大きく、 $e=1/12$ でも、2辺固定、周辺単純支持および2辺自由の値が、それぞれ、5.1%、5.0%および4.5%の相異を示している。 $x=0.3a$ における値は、 $e=1/12$ 以下で、三つの境界条件共に良く一致している。表9および表10に、 σ_{yz} の比較を示した。部分等分布荷重の場合には、 σ_{xx} と同様に、荷重の分布境界で相異が大きく、 $e=1/12$ でも、2辺固定、周辺単純支持および2辺自由の値が、それぞれ、6.0%、6.1%および6.7%の相異を示している。全面等分布荷重の場合には、2辺固定の $y=0.5b$ の固定辺における値が、 $e=1/12$ で、4.8%の相異を示すが、周辺単純支持の場合には、 $e=1/12$ 以下で良く一致している。他方、2辺自由の場合には、全面等分布荷重の $y=0.15b$ および $y=0.3b$ における値が、 $e=1/12$ でも、それぞれ、12.1%および11.6%の相異を示している。表11および表12に、せん断応力 σ_{xy} の比較を示した。部分等分布荷重の場合には、 $e=1/8$ 以下で、三つの境界条件共に良く一致している。全面等分布荷重の場合には、2辺固定および周辺単純支持共に、 $e=1/12$ 以下で良く一致するが、2辺自由の $y=0.15b$ および $y=0.3b$ における値は、 $e=1/12$ でも、それぞれ、9.8%および9.7%の相異を示している。

自由および固定の境界条件の場合には、厚板理論と薄板理論とでは、条件の規定の仕方が異なるために、板の周辺およびその近くで、相異が大きくなることは、理論的にも理解できることであり、本計算結果は、妥当な解析結果を与えていると考える。

4. 結 論

Loveの理論に改良を加えた厚板理論により、相対する2辺が単純支持、他の2辺が自由、固定あるいは単純支持の長方形厚板が、板の上面に部分等分布荷重あるいは全面等分布荷重を受ける場合を解析し、長方形厚板の応力特性を明らかにした。また、その解析結果と薄板理論による解析結果とを比較し、変位および応力に及ぼす板厚比、境界条件および荷重条件の影響を調べ、薄板理論の適用性を吟味した。解析結果から以

下の結論が導き出される。

(1) 2 辺自由, 2 辺固定および周辺単純支持の場合において、 σ_{xx} および σ_{yy} は、板厚比が $1/10$ で、ほぼ直線分布になるが、部分等分布荷重の分布境界における σ_{xx} および σ_{yz} は、板厚比が $1/10$ でも、放物線分布とやや異なる。

(2) σ_{xx} および σ_{yz} は、荷重の分布境界以外では、板厚比が $1/8$ 以下で、ほぼ放物線分布になる。

(3) 2 辺自由および周辺単純支持に比べ、2 辺固定の場合が薄板理論による解析結果と大きく相異し、荷重条件、着目量および着目点の違いによっても、相異の程度が変わる。

(4) 周辺単純支持の場合には、部分等分布荷重よりも全面等分布荷重の方が薄板理論による解析結果と良く一致する。 σ_{xx} 、 σ_{yy} および σ_{xy} は、板厚比が $1/8$ でも、良く一致するが、荷重の分布境界における σ_{xx} および σ_{yz} は、板厚比が $1/12$ でも、やや相異なる。

(5) 2 辺自由の場合には、全面等分布荷重の自由辺近くにおける σ_{yy} 、 σ_{yz} および σ_{xy} が、薄板理論による解析結果と極めて大きな相異を示し、板厚比が $1/16$ でも、あまり一致しない。また、 w 、 σ_{xx} および荷重の分布境界以外の σ_{xx} は、板厚比が $1/8$ でも良く一致する。

(6) 2 辺固定の場合には、固定辺あるいはその近くにおける w 、 σ_{xx} および σ_{yz} が、板厚比が $1/16$ でも、薄板理論による解析結果と大きく相異なる。

(7) 部分等分布荷重を受ける場合の薄板理論の板厚比に関する適当限界は、おおそ、周辺単純支持および 2 辺自由では、 $h/a=1/12$ 以下、2 辺固定では、 $h/a=1/20$ 以下である。

(8) 全面等分布荷重を受ける場合の薄板理論の板厚比に関する適用限界は、おおそ、周辺単純支持では、 $h/a=1/8$ 以下、2 辺自由および 2 辺固定では、 $h/a=1/20$ 以下である。

(9) 固定の境界条件は、厚板理論および薄板理論共に、近似的に規定されるので、3 次元弾性論による厳密な解析をまたなければ、固定辺を持つ場合の薄板理論の適用性は、明確にできない。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 12, pp. A69~A77, 1945.
- 2) Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31~38, 1951.
- 3) Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M.: A high-order theory of plate deformation, J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663~668, 1977.
- 4) Iyengar, K. T. S., Chandrashekhara, K. and Sebastian, V. K.: On the analysis of thick rectangular plates, Ing.-Arch., Vol. 43, pp. 317~330, 1974.
- 5) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XXII, 4th ed., Dover Publ., 1944.
- 6) 奥村 勇・本多祐也・芳村 仁: 一厚板理論による扇形平板の解析について, 土木学会論文報告集, 第326号, pp. 15~28, 1982.
- 7) 宮本 博: 3 次元弾性論, p. 18, 裳華房, 1967.
- 8) Kromm, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, Ing.-Arch., Vol. 21, pp. 266~286, 1953.

(1991年9月30日受付)