

扁平シェル構造の弾性曲げ解析

Bending Analysis of Elastic Shallow Shell Structures

松田 浩* 森田 千尋** 崎山 毅*** 鶴田 健**** 若菜 啓孝*****

By Hiroshi Matsuda, Chihiro Morita, Takeshi Sakiyama, Ken Tsuruta and Hirotaka Wakana

The purpose of this study is to develop the composite shell structures fabricated with shallow panels and cast-in-place concrete. As the first step, this paper describes an approximate method for analyzing shallow shells including geometrical nonlinearity. Numerical results by the present method agree with those obtained by other method. Moreover, it is found from numerical results for uniform distributed load that shallow shell panels have good characteristics compared with plates.

1. まえがき

近年新素材に関する技術の発達めざましく、土木建築の分野においても新材料の適用の可能性が十分にあり、素材生産者からは新材料の格好の市場としてたえず熱いまなざしが向けられている。一方、1990年代は、建設事業量の大幅な上昇、慢性的な技術者不足、建設用地の入手難と特殊工事の増加、構造物の高級化、環境問題に対する関心の高まり、などの社会構造や建設環境の変化の問題に直面すると報告されている。¹⁾

本研究は、以上の社会情勢を鑑み、鋼、プレストレストコンクリートあるいは高品質のポリマー含浸コンクリート(PIC)²⁾で製作された扁平シェルをプレキャスト部材として用い、現場打コンクリートとの組み合わせで構成される合成構造を開発するために、その基礎研究として扁平シェル部材の力学的特性を調べ、扁平シェル合成構造の実用化に資するための基礎データを得ることを最終目的としたものである。

シェル構造はライズの高いものについて理論的に発展し、またライズが高い方が力学的に有利であるが、構造形によってはライズ高さの制約があり、ライズを低くしなければならない場合もある。ライズが低いと周辺の推力も大きくなり、支持構造を強くする必要があるが、等分布満載荷重の荷重条件に限定すれば、平

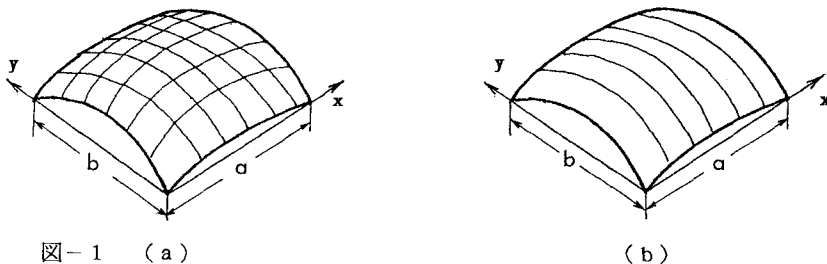
*	工博	長崎大学助教授	工学部構造工学科	(〒852 長崎市文教町1-14)
**	工修	長崎大学助手	工学部構造工学科	(〒852 長崎市文教町1-14)
***	工博	長崎大学教授	工学部構造工学科	(〒852 長崎市文教町1-14)
****	工修	小沢コンクリート工業株式会社技術研究所課長	(〒168 東京都杉並区上高井戸1-7-16)	
*****	工博	九州大学助手	工学部造船学科	(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

面板にわずかのライズをもたせて偏平シェルにすることは力学的に非常に有利な構造となり、板に作用する応力は大部分が圧縮膜応力状態になり、周辺の比較的小さな曲げ応力を処理すればよく、したがって、平面板に比べて経済的で、大スパン構造に適するものと考えられる。推力の支持方法としては、FRP ロッドなどを利用して、推力をアウトケーブル形式で受け持たせる構造も一方法と考えられる。さらに、等分布荷重作用時においては、面内応力は板全域にわたって圧縮であるので、曲げによる引張り応力は減少するから、コンクリートのひびわれ防止に面内応力自身が役立つことになる。すなわち、引張に弱いというコンクリートの補強法として、機械的に緊張材に引張力を与えることで部材に圧縮力を生じさせる《プレストレス》³⁾から、荷重作用により板に圧縮力を作用させる《ポストストレス》的な点に着目して、合成シェル構造を開発することを意図したものである。

シェル構造はライズの高いものについて理論的に発展し、偏平シェルに関しても今までに多くの研究成果がなされてきているが、限界状態設計法を基本とした『鋼構造設計指針』においてもシェル構造物の設計に関しては、検討すべき点が多く残されているといわれている。

本論文は、上述した内容を目的とし、その第1段階として、偏平シェル構造の力学的特性を調べるために、筆者らの一部が既に提示した平板の一離散化手法⁴⁾⁵⁾を偏平シェル構造に拡張適用し、弾性シェルを対象として、線形および幾何学的非線形解析を行い、既往の解析解および数値解と比較することにより本解析法の妥当性を検討したものである。

本解析手法は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより偏平シェルの支配方程式の解析的近似解を求め、これに基づいて偏平シェルの解析を行うものである。本論文では2つの解析手法を示す。①任意の境界条件、荷重条件および変断面性をもつ偏平シェルに対しては(図1(a))、偏平シェルの縦横の等分割線の交点における基礎微分方程式の解析的近似解が求められる。一方、②境界条件が対辺単純支持他対辺任意で、断面変化も単純支持辺に沿って、一方向に変化する偏平シェルに対しては(図1(b))、連立偏微分方程式で表わされた基礎微分方程式を一軸方向に級数展開して連立常微分方程式に変換後、さらに積分方程式に変換し積分方程式の近似解法を応用することにより、基礎微分方程式の近似解が求められる。②の方法は、有限要素法に対する有限帯板法に類似するものである。方法①は弾塑性有限変形解析に、方法②は動的応答解析に用いることを考えている。



2. 偏平シェルの基礎微分方程式

右手系直交座標系を考え、曲面板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w 、シェルの中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v 、面内力を N_{xy}, N_y, N_x 、および曲面板に作用する x, y, z 方向の外力を q_x, q_y, q_z と定義する。曲面の x, y 方向の曲率を k_x, k_y 、ねじれ率を k_{xy} とし、これらがあまり大きくなく、投影形状が矩形的の曲面板を考えると、せん断変形の影響を考慮した変厚偏平シェルの曲げの基礎微分方程式は次式のように表わせる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x + q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y + q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{\kappa G h} \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} + q_z = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{\kappa G h} \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \nu k_y) w = \frac{N_x}{F} \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_y + \nu k_x) w = \frac{N_y}{F} \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w = \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (1-13)$$

ここに、 $q_x = q_x(x, y)$, $q_y = q_y(x, y)$, $q_z = q_z(x, y)$: 面に対する接線方向および垂直方向荷重強度, E : 弾性係数, $G = E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数, ν : ポアソン比, $h = h(x, y)$: 板厚, $D = D(x, y) = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板の曲げ剛度, $F = F(x, y) = Eh/(1-\nu^2)$: 板の伸び剛度, $\kappa = 5/6$: せん断修正係数.

3. 基礎微分方程式の解析的近似解

式(1-1)～(1-13)の偏微分方程式を次の無次元量:

$$\begin{aligned} (X_1, X_2) &= \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)} (Q_y, Q_x), & (X_3, X_4, X_5) &= \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)} (M_{xy}, M_y, M_x), & (X_6, X_7) &= (\theta_y, \theta_x), \\ (X_8, X_9, X_{10}) &= \frac{1}{a} (w, v, u), & (X_{11}, X_{12}, X_{13}) &= \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)} (N_{xy}, N_y, N_x) \end{aligned} \quad (2)$$

を用いて無次元化したのち, 積分方程式に変換し, 積分方程式の近似解法を応用することにより, 式(1-1)～(1-13)の離散的近似解が得られる. 離散的近似解の誘導過程は平板の場合(文献4, 5)とほぼ同じであるので, ここでは結果のみを示すこととする.

【 解析法① 】

式(1-1)～(1-13)の各式を無次元化し, 積分方程式へ変換し, 積分方程式の近似解法を応用することにより偏平シェルの任意の離散点における離散的近似解は次式のように求められる.

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_{pijrd} X_{rr0} + \sum_{s=0}^{\infty} b_{pijsd} X_{s0s} \right\} + q_{pij} \quad (3)$$

$$a_{pijrd} = \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik} A_{pt} [a_{tk0rd} - a_{tkjrd}(1-\delta_{ki})] + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{js} B_{pt} [a_{t0srd} - a_{tisar}(1-\delta_{sj})] + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{ik} \beta_{js} C_{ptks} a_{tkrsd}(1-\delta_{ki}\delta_{sj}) \right\} \quad (3-a)$$

$$b_{pijsd} = \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik} A_{pt} [b_{tk0sd} - b_{tkjrd}(1-\delta_{ki})] + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{js} B_{pt} [b_{t0srd} - b_{tisar}(1-\delta_{sj})] + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{ik} \beta_{js} C_{ptks} b_{tkrsd}(1-\delta_{ki}\delta_{sj}) \right\} \quad (3-b)$$

$$q_{pij} = \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik} A_{pt} [q_{tk0} - q_{tkj}(1-\delta_{ki})] + \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{js} B_{pt} [q_{t0s} - q_{tisar}(1-\delta_{sj})] + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{ik} \beta_{js} C_{ptks} q_{tkrs} \right\} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{ik} \beta_{js} A_{piqs} \quad (3-c)$$

$A_{P1}=\gamma_{P3}$	$B_{P1}=0$	$C_{P1k2}=\gamma_{P2}\overline{k_{y k2}}+\mu\gamma_{P5}+\gamma_{P,10}\overline{\mu k_{k2}}$
$A_{P2}=0$	$B_{P2}=\mu\gamma_{P3}$	$C_{P2k2}=\gamma_{P1}\overline{k_{x k2}}+\mu\gamma_{P4}+\gamma_{P9}\overline{k_{k2}}$
$A_{P3}=\gamma_{P4}$	$B_{P3}=\mu\gamma_{P5}$	$C_{P3k2}=\gamma_{P6}\overline{j_{k2}}$
$A_{P4}=\gamma_{P5}$	$B_{P4}=0$	$C_{P4k2}=\overline{l_{k2}}(-\nu\gamma_{P6}+\mu\gamma_{P7})$
$A_{P5}=0$	$B_{P5}=\mu\gamma_{P4}$	$C_{P5k2}=\overline{l_{k2}}(-\mu\gamma_{P7}+\gamma_{P6})$
$A_{P6}=\gamma_{P7}$	$B_{P6}=\mu\gamma_{P8}$	$C_{P6k2}=-\mu\gamma_{P,10}$
$A_{P7}=\gamma_{P8}$	$B_{P7}=\gamma_{P6}$	$C_{P7k2}=-\gamma_{P9}$
$A_{P8}=\gamma_{P,10}$	$B_{P8}=\gamma_{P9}$	$C_{P8k2}=\gamma_{P,11}\overline{k_{x k2}}+\gamma_{P,12}\overline{k_{y k2}}+2\gamma_{P,13}\overline{k_{xy k2}}$
$A_{P9}=\gamma_{P,12}$	$B_{P9}=\mu\gamma_{P,13}$	$C_{P9k2}=0$
$A_{P,10}=\gamma_{P,13}$	$B_{P,10}=\mu\gamma_{P,11}$	$C_{P,10,k2}=0$
$A_{P,11}=\gamma_{P1}$	$B_{P,11}=\mu\gamma_{P2}$	$C_{P,11,k2}=-2\gamma_{P3}\overline{k_{xy k2}}+L_{2k2}\gamma_{P,13}$
$A_{P,12}=\gamma_{P2}$	$B_{P,12}=0$	$C_{P,12,k2}=-\gamma_{P3}\overline{k_{y k2}}+L_{1k2}\gamma_{P,12}-\nu\gamma_{P,11}\overline{l_{1k2}}$
$A_{P,13}=0$	$B_{P,13}=\mu\gamma_{P1}$	$C_{P,13,k2}=-\gamma_{P3}\overline{k_{x k2}}+L_{1k2}\gamma_{P,11}-\nu\gamma_{P,12}\overline{l_{1k2}}$

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= -\beta_{13}\overline{k_{x1j}}, \rho_{1,11} = \beta_{11}, \rho_{1,13} = \mu\beta_{3j}, \rho_{21} = -\beta_{13}\overline{k_{y1j}}, \rho_{2,11} = \mu\beta_{3j}, \rho_{2,12} = \beta_{11}, \rho_{31} = \beta_{11}, \\ \rho_{32} &= \mu\beta_{3j}, \rho_{3,11} = 2\beta_{13}\overline{k_{xy1j}}, \rho_{3,12} = \beta_{13}\overline{k_{y1j}}, \rho_{3,13} = \beta_{13}\overline{k_{x1j}}, \rho_{42} = -\mu\beta_{1j}, \rho_{43} = \beta_{11}, \\ \rho_{45} &= \mu\beta_{3j}, \rho_{51} = -\mu\beta_{1j}, \rho_{53} = \mu\beta_{3j}, \rho_{54} = \beta_{11}, \rho_{64} = \beta_{13}\overline{\nu l_{1j}}, \rho_{65} = -\beta_{13}\overline{l_{1j}}, \rho_{67} = \beta_{3j}, \\ \rho_{74} &= -\beta_{13}\overline{\mu l_{1j}}, \rho_{75} = \beta_{13}\overline{\mu \nu l_{1j}}, \rho_{77} = \beta_{11}, \rho_{83} = -\beta_{13}\overline{j_{1j}}, \rho_{86} = \mu\beta_{3j}, \rho_{87} = \beta_{11}, \rho_{92} = -\beta_{13}\overline{k_{1j}}, \\ \rho_{97} &= \beta_{1j}, \rho_{98} = \beta_{3j}, \rho_{10,1} = -\mu\beta_{3j}\overline{k_{1j}}, \rho_{10,6} = \mu\beta_{1j}, \rho_{10,8} = \beta_{11}, \rho_{11,8} = -\beta_{13}\overline{k_{x1j}}, \rho_{11,10} = \mu\beta_{3j}, \\ \rho_{11,12} &= \beta_{13}\overline{\nu l_{11j}}, \rho_{11,13} = -\beta_{13}\overline{l_{11j}}, \rho_{12,8} = -\beta_{13}\overline{k_{y1j}}, \rho_{12,9} = \beta_{11}, \rho_{12,12} = -\beta_{13}\overline{l_{11j}}, \\ \rho_{12,13} &= \beta_{13}\overline{\nu l_{11j}}, \rho_{13,8} = -2\beta_{13}\overline{k_{xy1j}}, \rho_{13,9} = \mu\beta_{3j}, \rho_{13,10} = \beta_{11}, \rho_{13,11} = -\beta_{13}\overline{l_{21j}}, \\ \text{その他 } \rho_{tp} &= 0, \beta_{1j} = \beta_{11}\beta_{3j}, [\gamma_{Pt}] = [\rho_{tp}]^{-1} \end{aligned}$$

($\rho_{1,j}$ ($i, j=1-13$), 表記上 $i, j \geq 10$ を含む場合は $\rho_{10,9}$ のようにコンマで区切っている。

他の係数についても同様。)

a, b : 偏平シエルの矩形Baseの辺長, $\mu = b/a$, $I = I(x, y) = D_0/D(x, y)$, $J = J(x, y) = 2\mu(1+\nu)D_0/D(x, y)$,
 $\overline{k_x} = bk_x$, $\overline{k_y} = bk_y$, $\overline{k_{xy}} = bk_{xy}$, $L_1 = (\mu/12)(h_0/a)^2[h_0/h(x, y)]$, $L_2 = [\mu(1+\nu)/6](h_0/a)^2[h_0/h(x, y)]$,
 $K = [(1+\nu)/5](h_0/a)^2[h_0/h(x, y)]$, D_0 : 基準シエル剛度, h_0 : 基準シエル厚

【 解析法② 】

$y = 0$, b を単純支持 (ローラー) とし, 変形量および断面力を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_m Q_{xam}(x) \sin a_m y \quad M_{xy} = -\sum_m M_{xym}(x) \cos a_m y \quad M_x = \sum_m M_{xam}(x) \sin a_m y \quad \theta_y = -\sum_m \theta_{ym}(x) \cos a_m y \quad \theta_x = \sum_m \theta_{xam}(x) \sin a_m y \\ w &= \sum_m w_m(x) \sin a_m y \quad v = -\sum_m v_m(x) \cos a_m y \quad u = \sum_m u_m(x) \sin a_m y \quad N_{xy} = -\sum_m N_{xym}(x) \cos a_m y \quad N_x = \sum_m N_{xam}(x) \sin a_m y \quad (4) \\ a_m &= (2m-1)\pi/b \quad (m=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

式(4)を式(1)に代入し, 三角級数関数の直交性を考慮して y 方向に積分すると, 連立偏微分方程式は連立常微分方程式に変換される。

$$\frac{dN_{xam}(x)}{dx} = -a_m N_{xym}(x) + k_x Q_{xam}(x) - Q_{xam}(x) \quad (5-1)$$

$$\frac{dN_{xym}(x)}{dx} = F(1-\nu^2)a_m^2 v_m(x) - F(1-\nu^2)k_y a_m w_m(x) + \nu a_m N_{xam}(x) - k_y \kappa G h a_m w_m(x) + k_y \kappa G h \theta_{ym}(x) + Q_{xam} \quad (5-2)$$

$$\frac{dQ_{xam}(x)}{dx} = \kappa G h a_m^2 w_m(x) - \kappa G h a_m \theta_{ym}(x) - k_x N_{xam}(x) - k_y F(1-\nu^2)a_m v_m(x) + k_y^2 F(1-\nu^2)w_m(x) - k_y \nu N_{xam}(x) - Q_{xam} \quad (5-3)$$

$$\frac{dM_{xam}(x)}{dx} = -a_m M_{xym}(x) + Q_{xam}(x) \quad (5-4)$$

$$\frac{dM_{<ym}(x)}{dx} = D(1-\nu^2)\alpha_m^2\theta_{ym}(x) + \nu\alpha_m M_{>am}(x) - \kappa Gh\alpha_m w_m(x) + \kappa Gh\theta_{ym}(x) \quad (5-5)$$

$$\frac{d\theta_{>am}(x)}{dx} = -\nu\alpha_m\theta_{ym}(x) + \frac{1}{D} M_{>am}(x) \quad (5-6)$$

$$\frac{d\theta_{ym}(x)}{dx} = \alpha_m\theta_{>am}(x) + \frac{1}{D(1-\nu)} M_{<ym}(x) \quad (5-7)$$

$$\frac{dw_m(x)}{dx} = -\theta_{xm}(x) + \frac{1}{\kappa Gh} Q_{>am}(x) \quad (5-8)$$

$$\frac{du_m(x)}{dx} = -\nu\alpha_m v_m(x) + (k_x + \nu k_y) w_m(x) + \frac{1}{F} N_{>am}(x) \quad (5-9)$$

$$\frac{dv_m(x)}{dx} = \alpha_m u_m(x) + \frac{1}{F(1-\nu)} N_{<ym}(x) \quad (5-10)$$

$$Q_y = \kappa Gh \sum_m [\alpha_m w_m(x) - \theta_{ym}(x)] \cos \alpha_m y \quad (5-11)$$

$$M_y = \sum_m [D(1-\nu^2)\alpha_m\theta_{ym}(x) + \nu M_{>am}(x)] \sin \alpha_m y \quad (5-12)$$

$$N_y = \sum_m [F(1-\nu^2)\alpha_m v_m(x) - F(1-\nu^2)k_y w_m(x) + \nu N_{>am}(x)] \sin \alpha_m y \quad (5-13)$$

この連立常微分方程式を式(2)を用いて無次元化したのち、積分方程式への変換と積分方程式の近似解法を応用することにより、任意の線要素における解析的近似解は次のように求められる。

$$\chi_{Pi} = \sum_{d=1}^0 a_{Pid} \chi_{do} + q_{Pi} \quad (6)$$

ここに、

$$a_{Pid} = \sum_{t=1}^0 \gamma_{Pt} a_{tdo} + \sum_{t=1}^0 \sum_{k=1}^{1-1} \beta_{ik} b_{Pt} a_{tkd}, \quad a_{dod}=1.0$$

$$q_{Pi} = \sum_{t=1}^0 \gamma_{Pt} q_{to} + \sum_{t=1}^0 \sum_{k=1}^{1-1} \beta_{ik} b_{Pt} q_{tk} - \sum_{k=1}^1 \gamma_{Pi} \overline{q_k}$$

$$B_{P1} = \gamma_{P3} C_{31} + \gamma_{P6} C_{61} + \gamma_{P,10} C_{10,1}$$

$$C_{14} = -K_2 \overline{a_m}, \quad C_{16} = K_2 + K_1 \overline{k_y}, \quad C_{17} = -K_1 \overline{k_y a_m},$$

$$B_{P2} = \gamma_{P3} C_{32} + \gamma_{P4} C_{42}$$

$$C_{1,10} = -\overline{k_x + \nu k_y}, \quad C_{23} = \nu \overline{a_m}, \quad C_{24} = \overline{1 a_m + K_2},$$

$$B_{P3} = \gamma_{P2} C_{23} + \gamma_{P5} C_{53}$$

$$C_{26} = -K_2 \overline{a_m}, \quad C_{31} = 1, \quad C_{32} = -\overline{a_m}, \quad C_{42} = 2(1+\nu)1,$$

$$B_{P4} = \gamma_{P1} C_{14} + \gamma_{P2} C_{24} + \gamma_{P5} C_{54} + \gamma_{P9} C_{94}$$

$$C_{45} = -\overline{a_m}, \quad C_{53} = 1(1-\nu^2), \quad C_{54} = -\nu \overline{a_m}, \quad C_{61} = 1/K_2,$$

$$B_{P5} = \gamma_{P4} C_{45} + \gamma_{P6} C_{65}$$

$$C_{78} = \overline{a_m}, \quad C_{79} = 2(1+\nu)/K_1, \quad C_{86} = \overline{k_x + \nu k_y},$$

$$B_{P6} = \gamma_{P1} C_{16} + \gamma_{P2} C_{26} + \gamma_{P6} C_{66} + \gamma_{P9} C_{96}$$

$$C_{87} = -\nu \overline{a_m}, \quad C_{8,10} = (1-\nu^2)/K_1, \quad C_{94} = K_2 \overline{k_y},$$

$$B_{P7} = \gamma_{P1} C_{17} + \gamma_{P8} C_{87} + \gamma_{P9} C_{97}$$

$$C_{96} = -(K_1 + K_2) \overline{k_y a_m}, \quad C_{97} = K_1 \overline{a_m}, \quad C_{9,10} = \nu \overline{a_m},$$

$$B_{P8} = \gamma_{P7} C_{78}$$

$$C_{10,1} = \overline{k_x}, \quad C_{10,9} = -\overline{a_m}$$

$$B_{P9} = \gamma_{P,10} C_{10,9} + \gamma_{P7} C_{79}$$

$$B_{P,10} = \gamma_{P1} C_{1,10} + \gamma_{P8} C_{8,10} + \gamma_{P9} C_{9,10}$$

$$\rho_{11}=1, \quad \rho_{14}=-\beta_{11}C_{14}, \quad \rho_{16}=-\beta_{11}C_{16}, \quad \rho_{17}=-\beta_{11}C_{17}, \quad \rho_{1,10}=-\beta_{11}C_{1,10}, \quad \rho_{22}=1, \quad \rho_{23}=-\beta_{11}C_{23},$$

$$\rho_{24}=-\beta_{11}C_{24}, \quad \rho_{26}=-\beta_{11}C_{26}, \quad \rho_{31}=-\beta_{11}C_{31}, \quad \rho_{32}=-\beta_{11}C_{32}, \quad \rho_{33}=1, \quad \rho_{42}=-\beta_{11}C_{42}, \quad \rho_{44}=1,$$

$$\rho_{45}=-\beta_{11}C_{45}, \quad \rho_{53}=-\beta_{11}C_{53}, \quad \rho_{54}=-\beta_{11}C_{54}, \quad \rho_{55}=1, \quad \rho_{61}=-\beta_{11}C_{61}, \quad \rho_{65}=-\beta_{11}C_{65}, \quad \rho_{66}=1, \quad \rho_{77}=1,$$

$$\rho_{78}=-\beta_{11}C_{78}, \quad \rho_{79}=-\beta_{11}C_{79}, \quad \rho_{86}=-\beta_{11}C_{86}, \quad \rho_{87}=-\beta_{11}C_{87}, \quad \rho_{88}=1, \quad \rho_{8,10}=-\beta_{11}C_{8,10}, \quad \rho_{94}=-\beta_{11}C_{94},$$

$$\rho_{96}=-\beta_{11}C_{96}, \quad \rho_{97}=-\beta_{11}C_{97}, \quad \rho_{99}=1, \quad \rho_{9,10}=-\beta_{11}C_{9,10}, \quad \rho_{10,1}=-\beta_{11}C_{10,1}, \quad \rho_{10,9}=-\beta_{11}C_{10,9},$$

$$\rho_{10,10}=1, \quad \text{その他 } \rho_{tP}=0, \quad [\gamma_{Pt}] = [\rho_{tP}]^{-1}$$

4. 積分定数と境界条件

離散的近似解式(3)および(6)を用いて偏平シェルの曲げ解析を行うことができるが、そのとき用いる積分定数と境界条件を四辺単純支持(ローラー)を例にとり、以下に示す。

解法①の離散的近似解(3)に含まれる積分定数 X_{rfo} および X_{soa} は、具体的にはそれぞれ $x=0$ および $y=0$ なる辺上の等分割点における断面力および変形を表わす。各分割点において10個ずつの積分定数が存在するが、偏平シェルの境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は既知となる。残りの5個の積分定数の値は対辺の境界条件によって決定される。図2(a)に四辺単純支持(ローラー)の場合の積分定数と境界条件を示す。隅角部における積分定数と境界条件は□で囲まれている。解法①の場合の最終的に解くべきマトリックスの大きさは $[(5m \times 5n - 1) \times (5m \times 5n)]$ である(m, n は縦横の分割数)。

一方、解法②の離散的近似解(6)に含まれる積分定数 X_{ao} は、具体的には $x=0$ なる辺上における断面力および変形($Q_{xam}, M_{xym}, M_{yam}, \theta_{ym}, \theta_{xm}, w_m, v_m, u_m, N_{xym}, N_{yam}$)を表わす。各辺において10個ずつの積分定数が存在するが、境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は既知となる。残りの5個の積分定数の値は対辺の境界条件によって決定される。図2(b)に四辺単純支持(ローラー)の場合の積分定数と境界条件を示す。解法②の場合の最終的に解くべきマトリックスの大きさは $[5 \times 6]$ である。

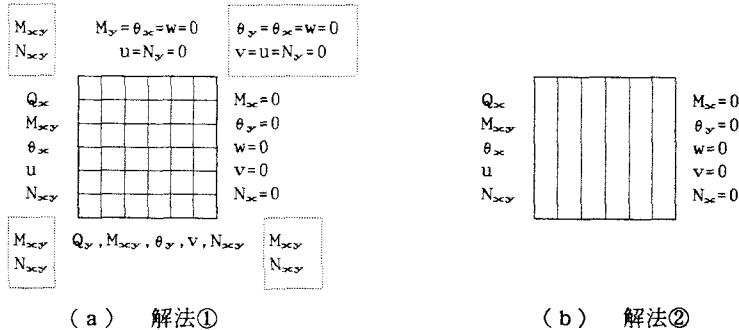


図-2 四辺単純支持(ローラー)の積分定数と境界条件

5. 数値計算例

表-1 等分布荷重を受ける四辺単純支持(ローラー)EPシェル
($a=b=1, h=0.01a, \nu=0.3, K^*=\sqrt{12(1-\nu^2)}/Rh$)

本解析法の偏平シェルの数値解の収束性および精度を検討するために、既往の近似解法による解析結果および解析解との比較を行う。

はじめに、本解析法による数値解の収束性および精度を明らかにするために、ライズ高さが極めて低い偏平シェルに等分布荷重を満載する四辺単純支持(ローラー)の境界条件を有する場合について断面力および変形の解析を解法①により行った。これらの数値解析結果を既往の解析結果⁶⁾⁷⁾とともに表1

	K^*	$m/2=2$ (19×20)	$m/2=4$ (39×40)	$m/2=6$ (59×60)	[2-4]	文献6)	文献7)
$\frac{-wD}{qa^4}$ ($\times 10^{-2}$)	0	0.413	0.408	0.407	0.406	0.406	0.405
	2	0.409	0.404	0.403	0.402	0.402	0.401
	4	0.399	0.392	0.391	0.390	0.390	0.389
	6	0.384	0.374	0.373	0.371	0.371	0.370
($x=a/2$)	8	0.364	0.352	0.352	0.348	0.348	0.347
($y=b/2$)	10	0.341	0.326	0.324	0.321	0.321	0.321
$\frac{-M_x}{qa^2}$ ($\times 10^{-1}$)	0	0.542	0.492	0.484	0.475	0.479	0.478
	2	0.537	0.486	0.479	0.469	0.473	0.473
	4	0.532	0.471	0.464	0.454	0.458	0.457
	6	0.501	0.448	0.440	0.430	0.434	0.434
($x=a/2$)	8	0.472	0.418	0.410	0.400	0.404	0.404
($y=b/2$)	10	0.440	0.385	0.377	0.367	0.371	0.371
$\frac{N_x}{qa}$ ($\times 10$)	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.135	0.133	0.133	0.132	0.133	0.132
	4	0.264	0.259	0.258	0.257	0.258	0.255
	6	0.380	0.371	0.369	0.368	0.369	0.365
($x=a/2$)	8	0.481	0.465	0.462	0.460	0.460	0.457
($y=b/2$)	10	0.564	0.539	0.535	0.531	0.532	0.529

に示す。表中、[2-4]は外挿公式による推定収束値である。また、等分布荷重を受ける対辺単純支持(□-□)他對辺固定の境界条件を有する偏平シェルについて、解法②(分割数10, 展開項数4)による中央点のたわみの解析結果を有限要素法⁹⁾および有限帯板法¹⁰⁾による解析結果とともに表2に示す。いずれの解析においても、本解析法に基づく断面力および変形の数値解は、分割数の増加とともに、一様に収束することが示されている。また、8~12程度の比較的粗い分割のもとでも十分に実用性のある解が得られている。

シェル厚が変化する変厚偏平シェルに対する解析結果を図3に示す。ここで取り扱った偏平シェルは、四辺単純支持(ローラー)の境界条件を有し、等分布荷重が満載する場合の解析結果である。また変厚性状は以下に示される式で表わされるような変厚偏平シェルである。

$$h(x, y) = h_0[2\alpha(x/a + y/b - 0.5) + 1]$$

$$(h_0 = 0.01a, \alpha = 0.0, 0.2, 0.4)$$

本解析手法によれば、荷重の分布状態やシェル厚、シェル剛度の場所的变化が不規則で関数表示されない場合でも離散点におけるこれらの諸量の値が与えられれば、諸量が規則的な場合とまったく同様に解析することができる。

次に比較的ライズ高さが高い場合の数値解の精度を明らかにするために、等分布荷重を満載する四辺単純支持(□-□)の境界条件を有する場合について断面力および変形の解析を行った。これらの結果($m/2=6$)をフーリエ級数解¹⁰⁾の結果とともに、図4に示す。図4には、EPシェル、円筒シェルおよび平板の場合の解析結果を併記している。これらの図よ

表-2 等分布荷重を受ける対辺単純支持(□-□)他對辺固定偏平シェルの中央点のたわみ ($\times 10^{-2} qa^2/D$), ($a=b=1, h=0.01a, \nu=0.3$)

(Rx, Ry)	本解析法	F.E.M8	F.S.M9
50.0, 50.0	0.1770	0.1764	0.1787
50.0, 20.0	0.1618	0.1610	0.1629
50.0, 10.0	0.1262	0.1256	0.1262
20.0, 20.0	0.1324	0.1318	0.1323
20.0, 10.0	0.1044	0.1038	0.1037
10.0, 10.0	0.0682	0.0680	0.0670
50.0, -20.0	0.1709	0.1704	0.1726
50.0, -10.0	0.1381	0.1375	0.1385
20.0, -20.0	0.1488	0.1486	0.1498
20.0, -10.0	0.1270	0.1268	0.1274
10.0, -10.0	0.0899	0.0907	0.0898

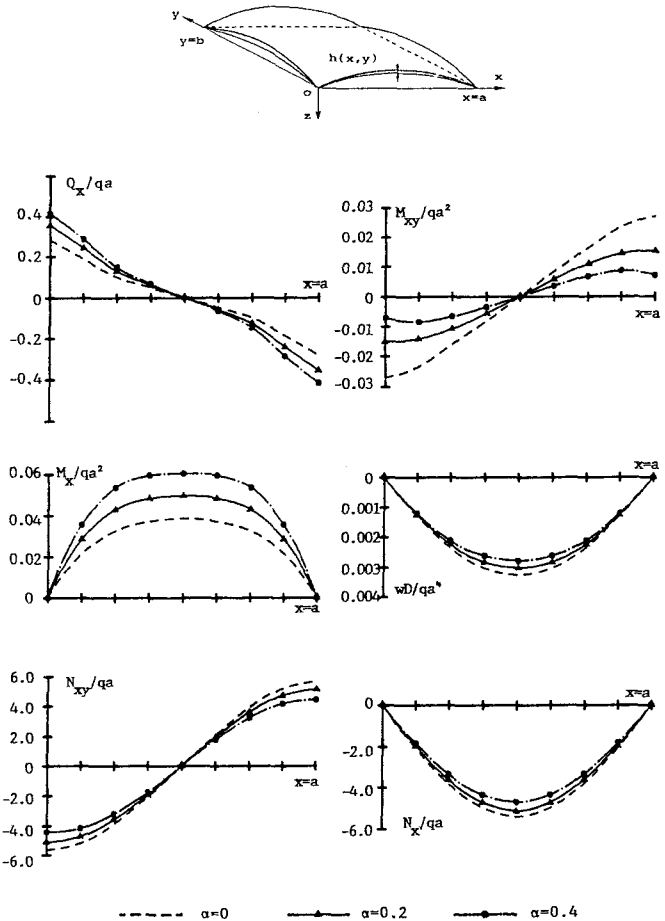
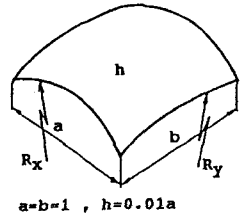


図-3 等分布荷重を受ける四辺単純支持(□-□)変厚EPシェル ($a=b=1, h=0.01a, \nu=0.3, K^*=\sqrt{12(1-\nu^2)}/Rh=10$)

り、曲率半径 $R = a$ すなわちライズ高さ $H = 0.125a$ 程度の偏平シェルに対する数値解の精度は、本法による解析で十分である。

等分布満載荷重に限定したことであるが、辺長 $a = 1\text{ m}$ に対するライズ高は $H = 0.125\text{ m}$ で、この程度のライズをつけることにより力学的性状が平板の場合と比較すると極めて優れていることがわかる。近年コンクリート床版の劣化対策としてプレストレスを導入した P C 板を埋設型枠として利用する工法が実用化されているが、このような力学的特性は、埋設型枠を偏平シェル構造とすることでプレストレスを導入したのと同じ効果、すなわちポストストレス的な効果が期待できるのではないかと考えられる。

このような構造を実際用いる場合、[1]推力をどのように処理するか、[2]偏載荷重あるいは局所的な荷重条件に対する検討、[3]座屈安定性の検討、などの問題点が考えられるが、[1]に対しては、まえがきの項で既述したように、推力の支持方法としては、FRP ロッドなどを利用して、推力をアウトケーブル形式で受け持たせる構造も一方法と考えられる。また[2]に関しては局所荷重などの種々の荷重条件に対する検討を行う必要があるが、これに関しては今後進めていく予定である。さらに、[3]に関しては、プレキャスト偏平シェル型枠として、可撓性の高い鋼製パネルを使用する場合には、浅いアーチにみられるような飛び移り現象などに対する検討も必要となり、有限変形理論による解析を行う必要がある。次項で飛び移り現象などの座屈解析をするための増分形基礎微分方程式法を示し、一数值解析例を示すこととする。

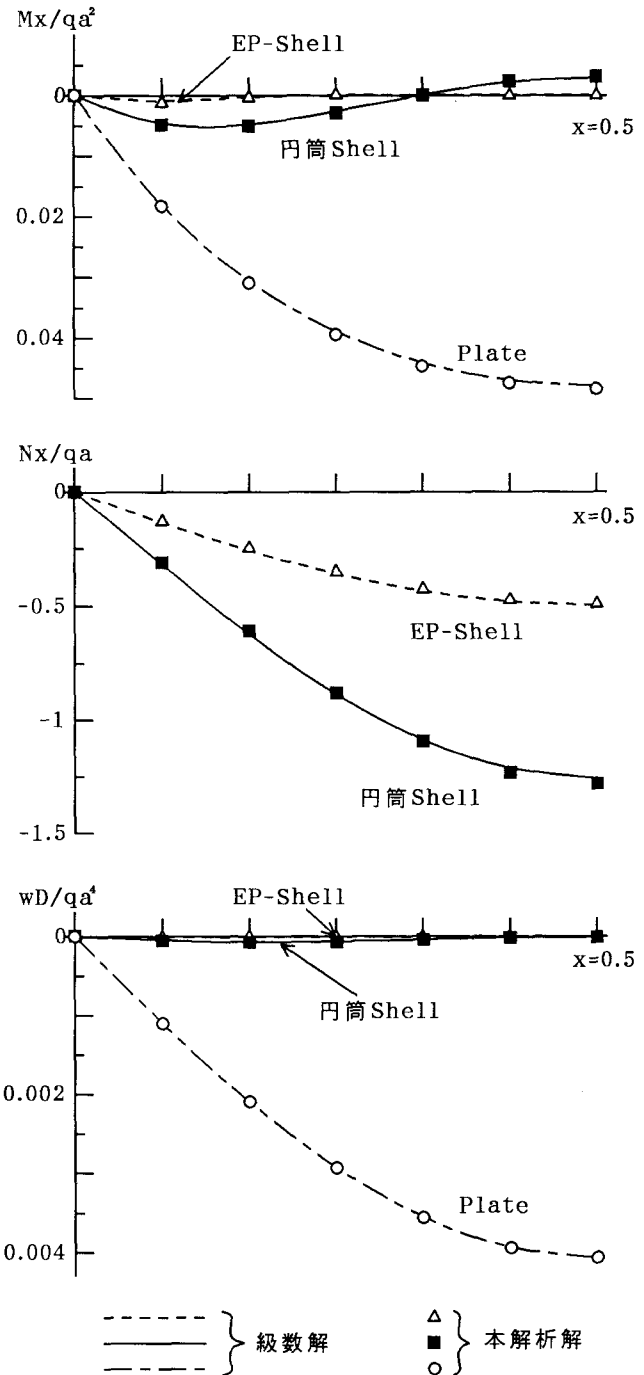


図-4 EPシェル、円筒シェル、正方形板の曲げ解析結果（四辺単純支持（□-□-□-□）, 一様分布荷重, $a=b=1$, $\nu=0.25$, EP_Shell: $R_x=R_y=1$, 円筒Shell: $R_x=1$ ）

6. 偏平シェルの増分形基礎微分方程式および幾何学的非線形解析例

偏平シェルの曲げの基礎微分方程式(1-1)～(1-13) (z方向外力 q_z のみが作用した場合)を増分形に書き換えると次式ようになる。これらの式で破線で囲まれた項は、増分形とすることで生じる項であり、 ΔN_x , Δw_{xc} , Δw_{yc} , Δw_{xyc} は各荷重増分段階で収束計算するものである。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (7-1)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (7-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + k_x \Delta N_x + k_y \Delta N_y + 2k_{xy} \Delta N_{xy} \\ + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \Delta N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} N_y + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \Delta N_y \\ + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} N_{xy} + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \Delta N_{xy} + \Delta N_c + \Delta q_z = 0 \end{aligned} \quad (7-3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (7-4)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (7-5)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} (\Delta M_x - \nu \Delta M_y) \quad (7-6)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} (\Delta M_y - \nu \Delta M_x) \quad (7-7)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu^2)} \Delta M_{xy} \quad (7-8)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{1}{\kappa G h} \Delta Q_x \quad (7-9)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{1}{\kappa G h} \Delta Q_y \quad (7-10)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} - k_x \Delta w + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta w_{xc} \right] = \frac{1}{E h} (\Delta N_x - \nu \Delta N_y) \quad (7-11)$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y} - k_y \Delta w + \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta w_{yc} \right] = \frac{1}{E h} (\Delta N_y - \nu \Delta N_x) \quad (7-12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - 2k_{xy} \Delta w \\ + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \Delta w_{xyc} \right] = \frac{2(1+\nu)}{E h} \Delta N_{xy} \end{aligned} \quad (7-13)$$

$$\Delta N_c = \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \Delta N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \Delta N_y + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \Delta N_{xy}$$

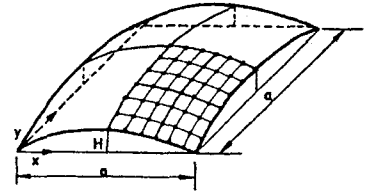
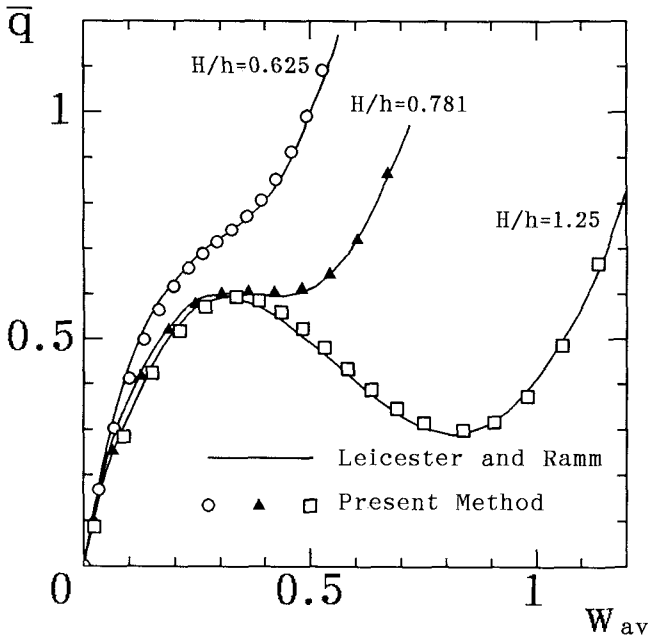
$$\Delta w_{xc} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right]^2, \quad \Delta w_{yc} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right]^2, \quad \Delta w_{xyc} = \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

増分形基礎微分方程式の離散的近似解を解法①と同様にして求めることができる。係数に関しては解析法①と異なる部分のみ記述しており、他は解法①の場合とまったく同じである。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^d a_{pijrd} \Delta X_{rfo} + \sum_{s=0}^d b_{pijsd} \Delta X_{s0s} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
C_{P1k\alpha} &= \gamma_{P2} \bar{k}_{y\alpha} + \mu \gamma_{P5} + \gamma_{P,10} \mu K_{k\alpha} - \gamma_{P,12} \mu K_{k\alpha} (K_{k\alpha} \chi_{1k\alpha} - \chi_{6k\alpha}) - \gamma_{P,13} \mu K_{k\alpha} (K_{k\alpha} \chi_{2k\alpha} - \chi_{7k\alpha}) \\
C_{P2k\alpha} &= \gamma_{P1} \bar{k}_{x\alpha} + \mu \gamma_{P4} + \mu \gamma_{P9} K_{k\alpha} - \gamma_{P,11} \mu K_{k\alpha} (K_{k\alpha} \chi_{2k\alpha} - \chi_{7k\alpha}) - \gamma_{P,13} \mu K_{k\alpha} (K_{k\alpha} \chi_{1k\alpha} - \chi_{6k\alpha}) \\
C_{P3k\alpha} &= \gamma_{P3} J_{k\alpha} \chi_{11,k\alpha} + \gamma_{P8} J_{k\alpha} \\
C_{P4k\alpha} &= I_{k\alpha} [\gamma_{P3} \mu (\chi_{12,k\alpha} - \nu \chi_{13,k\alpha}) - \nu \gamma_{P6} + \mu \gamma_{P7}] \\
C_{P5k\alpha} &= I_{k\alpha} [\gamma_{P3} \mu (\chi_{13,k\alpha} - \nu \chi_{12,k\alpha}) - \mu \nu \gamma_{P7} + \gamma_{P6}] \\
C_{P6k\alpha} &= -\mu \gamma_{P,10} + \gamma_{P,12} \mu (K_{k\alpha} \chi_{1k\alpha} - \chi_{6k\alpha}) + \gamma_{P,13} \mu (K_{k\alpha} \chi_{2k\alpha} - \chi_{7k\alpha}) \\
C_{P7k\alpha} &= -\gamma_{P8} + \gamma_{P,11} \mu (K_{k\alpha} \chi_{2k\alpha} - \chi_{7k\alpha}) + \gamma_{P,13} \mu (K_{k\alpha} \chi_{1k\alpha} - \chi_{6k\alpha}) \\
C_{P,11,k\alpha} &= L_{2k\alpha} \gamma_{P,13} + \gamma_{P3} (-2 \bar{k}_{x\alpha} + J_{k\alpha} \chi_{3k\alpha}) \\
C_{P,12,k\alpha} &= L_{1k\alpha} \gamma_{P,12} - \nu L_{1k\alpha} \gamma_{P,11} + \gamma_{P3} [-\bar{k}_{y\alpha} + \mu I_{k\alpha} (\chi_{4k\alpha} - \nu \chi_{5k\alpha})] \\
C_{P,13,k\alpha} &= L_{1k\alpha} \gamma_{P,11} - \nu L_{1k\alpha} \gamma_{P,12} + \gamma_{P3} [-\bar{k}_{x\alpha} + \mu I_{k\alpha} (\chi_{5k\alpha} - \nu \chi_{4k\alpha})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{33} &= -\beta_{13} J_{13} \chi_{11,13}, \quad \rho_{34} = -\beta_{13} \mu I_{13} (\chi_{12,13} - \nu \chi_{13,13}), \quad \rho_{35} = -\beta_{13} \mu I_{13} (\chi_{13,13} - \nu \chi_{12,13}), \\
\rho_{3,11} &= \beta_{13} (2 \bar{k}_{x13} - J_{13} \chi_{313}), \quad \rho_{3,12} = \beta_{13} [\bar{k}_{y13} - \mu I_{13} (\chi_{413} - \nu \chi_{513})], \\
\rho_{3,13} &= \beta_{13} [\bar{k}_{x13} - \mu I_{13} (\chi_{513} - \nu \chi_{413})], \quad \rho_{11,2} = \beta_{13} \mu K_{13} (K_{13} \chi_{213} - \chi_{713}), \\
\rho_{11,7} &= -\beta_{13} \mu (K_{13} \chi_{213} - \chi_{713}), \quad \rho_{12,1} = \beta_{13} \mu K_{13} (K_{13} \chi_{113} - \chi_{613}), \\
\rho_{12,6} &= -\beta_{13} \mu (K_{13} \chi_{113} - \chi_{613}), \quad \rho_{13,1} = \beta_{13} \mu K_{13} (K_{13} \chi_{213} - \chi_{713}), \\
\rho_{13,2} &= \beta_{13} \mu K_{13} (K_{13} \chi_{113} - \chi_{613}), \quad \rho_{13,6} = -\beta_{13} \mu (K_{13} \chi_{213} - \chi_{713}), \\
\rho_{13,7} &= -\beta_{13} \mu (K_{13} \chi_{113} - \chi_{613}),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a &= 10\text{m} \\
H &= 0.25\text{m} \\
E &= 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
\nu &= 0.3
\end{aligned}$$

$$\bar{q} = q \frac{a^4}{64 E h^2 H^2}$$

$$w_{av} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{w}{h} dx dy$$

図-5 等分布荷重を受ける四辺単純支持(t°)Shallow Spherical Shellの荷重-変位曲線
 (w_{av} : 積分平均値)

増分形基礎微分方程式(7-1)～(7-13)の離散的近似解に基づく偏平シェルの幾何学的非線形解析の数値解の精度を明らかにするために、図5の右部に示す四辺単純支持(ピン)の境界条件を有する偏平EPシェル($H/h=0.625, 0.781, 1.25$)に等分布荷重を満載する場合の荷重-変位曲線を既往の解析結果¹¹⁾¹²⁾とともに図5に示す。同図で w_{av} は図中に示すようにたわみの積分平均であり、 H/h ($h=0.4, 0.32, 0.2m, H=0.25m$)を変化させたときの解析結果であり、Leicesterによる級数解¹¹⁾およびRammによるFEM解¹²⁾と比較している。同図より、本法による偏平シェルの幾何学的非線形解析の数値結果は文献11), 12)の結果とよく一致していることがわかる。したがって、本法は、偏平シェルの幾何学的非線形解析にも十分な精度で適用できるものと考えられる。

7. あとがき

偏平シェル合成構造を土木構造物へ利用するための第1段階の基礎的研究として、偏平シェルの曲げの基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、偏平シェルの基礎微分方程式の離散的近似解を求め、これに基づく偏平シェルの幾何学的非線形性を含めた一般的な解法を提示した。

数値解析の結果から、本解法による数値解は一様な収束性をもつこと、また、比較的粗い分割による解析においても実用上十分の精度をもつ解が得られることが確認された。

偏平シェルを橋梁及び建築物の床版などへの利用を考える場合には、シェル形状が偏平であればあるほど、局所的な荷重に対しての検討が不可欠となるが、等分布満載荷重の荷重条件に限定すると、平板にわずかのライズをもたせて偏平シェル構造にすることは、力学的に非常に有利な構造となり、シェルに作用する応力は大部分が圧縮膜応力状態となることがわかった。

今後は、本論文で既述した検討事項に加えて、偏平シェル構造の座屈安定性を検討するために弾塑性有限変形解析を、また、ライズ高などの最適形状を決定するための最適設計などの解析的なパラメータ解析を行うとともに、実際に偏平シェル合成構造を作製して実験的な検討も行い、偏平シェル合成構造を開発するための基礎データを蓄積していく予定である。

参考文献

- 1) 小林茂敏：コンクリート系新材料の開発について－1990年代に期待される建設材料の展望－，平成2年度土木研究所講演会講演集，建設省土木研究所資料第2928号，pp.57-70，平成3年2月。
- 2) 土木系材料技術・技術審査証明書(第0107号)，ポリマー含浸コンクリートによる高耐久性埋設型枠材PICフォーム，財団法人土木研究センター，1990。
- 3) 例えば，渡辺明：PC埋設型枠の利用による新省力・迅速施工法に関する研究，昭和56,57年文部省科学研究費一般研究(B)研究成果報告書，昭和58年3月。
- 4) 崎山毅，松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法，土木学会論文集，第338号，pp.21-28，1983年10月。
- 5) 松田浩，崎山毅：変厚矩形板の曲げの一簡易解析法，長崎大学工学部研究報告，第19巻，第33号，pp.35-42，平成元年7月。
- 6) D.Bucco, J.Mazumdar and G.Sved: Static Analysis of Shallow Shells of Arbitrary Shape -A New Approach -, Int. J. Num. Methods in Engngs, Vol.18, pp.967-979 (1982)。
- 7) V.Z.Vlasov: General Theory of Shallow Shells and its Applications in Engineering, NASA

TT.F-99, Washington, D.C. (1964)

- 8) 福地信義, 若菜啓孝, 杉田憲彦: 板殻構造の弾塑性大たわみ挙動に関する解析, 西部造船会会報, 第78号, 1989
- 9) 福地信義: 有限帯板法による防撓曲面板構造の解析, 日本造船学会論文集, 第135号, 1974
- 10) 坪井善勝著: 連続体力学序説, 産業図書
- 11) R.H.Leicester : Finite Deformations of Shallow Shells, Proc. of ASCE, Vol.94, No.EM6, pp.1409-1423, 1968.
- 12) E.Ramm : Geometrisch Nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente, Habilitation, Universität Stuttgart Bericht, Nr.76-2, 1976.

(1991年9月30日受付)