

和分変換による格子平板の衝撃応答解析

Impulse Response Analysis of Grid Plates
by Means of Finite Fourier Integration Transforms.

岩崎 正二* 能町 純雄** 木田 哲量** 宮本 裕***

By Shoji IWASAKI, Sumio NOMACHI, Tetsukazu KIDA and Yutaka MIYAMOTO

The purpose of this paper is to clarify the initial behavior of grid plates to the traverse impacts of a linear spring-dashpot-mass system (the Maxwell model) or a rigid sphere.

The magnitude of surface pressure on a grid plate caused by impact can be obtained by solving numerically the Volterra integral equation of the second kind which is derived by combining the force-deflection law of Maxwell model with the equations of motion for a grid plate and a mass point of impactor.

As numerical examples, the dynamic response curves of impact force of grid plates with four hinged sides, are represented graphically.

1. ま え が き

衝撃力を受ける構造物の過渡応答問題は、工学上重要な問題で古くから実験的、理論的研究が数多くなされている。最近では、ロックシェッドの落石衝撃力を求める問題、橋梁の高欄やガードフェンス等への自動車の衝突問題、海洋構造物への船舶等の衝突問題、原子力施設や電力施設における事故時に発生する内外飛来物体に対する耐衝撃性の問題など、土木の分野でも衝撃力に対する安全性の検討のために衝撃問題解析の重要性が指摘されている。

構造物が衝撃力を受ける場合、入力が瞬発的なので構造全体に入力が行き渡る以前の初期過渡応力はかなりの大きさになる。それゆえ衝撃破壊に対する安全性を評価するためには、衝突により生ずる構造物の初期挙動の動的応答解析が必要となる。

本論文では最初に離散的弾性衝撃問題として桁要素が直交かつ規則正しく配列された多自由度系の格子平板を考え、衝撃力が関数として与えられた場合の過渡応答問題について最大変位応答の立場から論じたものである。解析にあたっては、格点の力の釣合より時間を連続変数とし空間座標を離散的とする三連微分差

* 工修 岩手大学助手 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

** 工博 日本大学教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1丁目2-1)

*** 工博 岩手大学教授 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

分方程式を導き、これをフーリエ定和分変換理論¹⁾とノーマル・モード法を組み合わせる新しい手法を提案するものである。また、衝撃応答解析における格点に質量を集中させる方法としてコンシステン・マス法とランプト・マス法を採用し両者の比較も行なっている。

また、現実の衝撃現象は物体が衝突することで初めて衝撃力が発生するので衝撃力はあくまで未知量としなければならない。従って衝撃現象に対する正しいアプローチは次のようになる。第一に構造物の部材に物体が衝突したときの衝撃力を導く。第二にその衝撃力によって構造物内部にどのような応力、変形が生じるかを正しく見積る。第三にはそれらの内部応力によって構造物にどのような形式の破壊が生じるかを検討することである。

本論文では第一の衝撃力を導くことに主眼をおき、衝撃問題を衝突物体と被衝突物体の接触条件を仮定する2体問題として取り扱う。例として衝突物体をモデル化したバネ・ダッシュポット質点系モデルあるいは弾性球が格子平板の任意点に衝突する場合を取り上げ、積分方程式法とフーリエ定和分変換理論を組み合わせる新しい手法により理論的に衝撃力を求め、格子平板が衝撃力によってどのような初期挙動を示すかを明らかにしようとしたものである。

2. フーリエ定和分変換公式

2. 1 サイン関数及びコサイン関数に関する逆変換公式

整数 x に関する離散関数 $f(x)$ に対して次のような Symbolic Notation を導入すると

$$S_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{m-1} f(x) \sin \frac{i\pi}{m} x \quad (1)$$

$$C_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{m-1} f(x) \cos \frac{i\pi}{m} x \quad (2)$$

上式の逆変換公式はそれぞれ次式のようになる。

$$f(x) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} S_i[f(x)] \sin \frac{i\pi}{m} x \quad (0 < x < m) \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^n R_i[f(x)] \cos \frac{i\pi}{m} x \quad (0 \leq x \leq m) \quad (4)$$

$$\text{ただし、} R_0[f(x)] = \frac{1}{2} \{C_0[f(x)] + \frac{1}{2} f(m) + \frac{1}{2} f(0)\},$$

$$R_i[f(x)] = C_i[f(x)] + \frac{1}{2} (-1)^i f(m) + \frac{1}{2} f(0),$$

$$R_n[f(x)] = \frac{1}{2} \{C_n[f(x)] + \frac{1}{2} (-1)^n f(m) + \frac{1}{2} f(0)\},$$

$$x, i = 0, 1, 2, 3, \dots, m.$$

2. 2 関 連 公 式

本論文で用いるサイン変換及びコサイン変換の関連公式は次式のようなものである。

$$S_i[\Delta^2 f(x-1)] = -\sin \frac{i\pi}{m} \{(-1)^i f(m) - f(0)\} - D_i S_i[f(x)] \quad (5)$$

$$C_i[\Delta^2 f(x-1)] = (-1)^i \Delta f(m-1) - \Delta f(0) - D_i R_i[f(x)] \quad (6)$$

$$S_i[\Delta f(x)] = -2 \sin \frac{i\pi}{m} R_i[f(x)] \quad (7)$$

$$C_i[\Delta f(x)] = -\{(-1)^i \Delta f(m-1) + \Delta f(0)\} + (1 + \cos \frac{i\pi}{m}) \{(-1)^i f(m) - f(0)\} + 2 \sin \frac{i\pi}{m} S_i[f(x)] \quad (8)$$

ここで、 $\Delta^2 f(x-1) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x-1), \quad D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{m}).$$

2. 3 二変数に関する逆変換公式

整数 x, y を変数とする離散的関数 $f_{x,y}$ に対して一変数の逆変換公式を二変数に拡張すると

$$S_i S_r [f_{x,y}] = \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} f_{x,y} \sin \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \quad (9)$$

$$C_i S_r [f_{x,y}] = \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} f_{x,y} \cos \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \quad (10)$$

式(9)、(10)より二変数の逆変換公式は

$$f_{x,y} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} S_i S_r [f_{x,y}] \sin \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \quad (0 < x < m, 0 < y < n) \quad (11)$$

$$f_{x,y} = \frac{4}{mn} \sum_{i=0}^m \sum_{r=1}^{n-1} R_i S_r [f_{x,y}] \cos \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \quad (0 \leq x \leq m, 0 < y < n) \quad (12)$$

$$\text{ただし, } R_0 S_r [f_{x,y}] = \frac{1}{2} \{ C_0 S_r [f_{x,y}] + \frac{1}{2} S_r [f_{m,y}] + \frac{1}{2} S_r [f_{0,y}] \},$$

$$R_i S_r [f_{x,y}] = C_i S_r [f_{x,y}] + \frac{1}{2} (-1)^i S_r [f_{m,y}] + \frac{1}{2} S_r [f_{0,y}],$$

$$R_m S_r [f_{x,y}] = \frac{1}{2} \{ C_m S_r [f_{x,y}] + \frac{1}{2} (-1)^m S_r [f_{m,y}] + \frac{1}{2} S_r [f_{0,y}] \}.$$

$$x, i = 0, 1, 2, 3, \dots, m, \quad y, r = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

3. 格子平板の解析理論

3. 1 直交格子平板の動的基礎式

図-1のように $m+1, n+1$ 本の桁が等間隔 λ_1, λ_2 に剛結直交する格子構造を格子平板と呼ぶことにする。

ただし x, y は整数値のみをとる離散的座標である。

この格子平板が衝撃的な外力を受ける場合の曲げ振動問題について考える。

今、 x 方向桁は曲げ剛性 $E I_x$ 、捩り剛性 $G J_x$ 、断面積 A_1 、断面2次極モーメント I_{p1} 、単位体積質量 ρ_1 、 y 方向桁はこれをそれぞれ、 $E I_y, G J_y, A_2, I_{p2}, \rho_2$ とする。

x, y 方向桁の力と変位の向きは図-2のように定義する。

(x, y) 格点の y 軸まわりの回転角を $\theta_{x,y}$ 、 x 軸まわりの回転角を $\theta'_{x,y}$ 、たわみを $\delta_{x,y}$ とするとモーメントの式は次のように表わされる²⁾。

$$\begin{aligned} M_{x,x+1} = & 2K_1 \{ 2\theta_{x,y} + \theta_{x+1,y} - \frac{3}{\lambda_1} (\delta_{x+1,y} - \delta_{x,y}) \} \\ & + C_1 \lambda_1 \left(\frac{11}{210} \ddot{\delta}_{x,y} + \frac{13}{420} \ddot{\delta}_{x+1,y} \right) \\ & + C_1 \lambda_1^2 \left(\frac{1}{105} \ddot{\theta}_{x,y} - \frac{1}{140} \ddot{\theta}_{x+1,y} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_{x,x-1} = & 2K_1 \{ 2\theta_{x,y} + \theta_{x-1,y} - \frac{3}{\lambda_1} (\delta_{x,y} - \delta_{x-1,y}) \} \\ & - C_1 \lambda_1 \left(\frac{13}{420} \ddot{\delta}_{x-1,y} + \frac{11}{210} \ddot{\delta}_{x,y} \right) + C_1 \lambda_1^2 \left(\frac{1}{105} \ddot{\theta}_{x,y} - \frac{1}{140} \ddot{\theta}_{x-1,y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

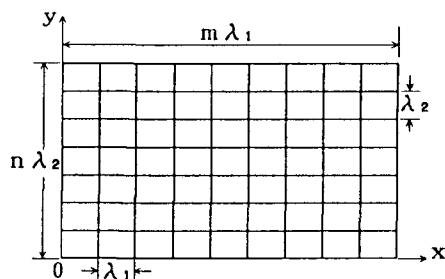


図-1 直交格子平板

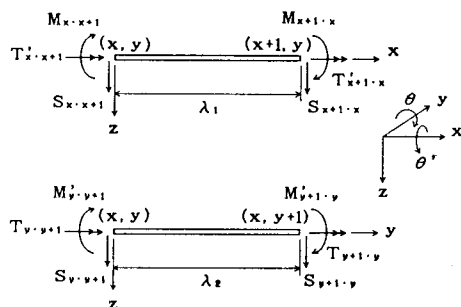


図-2 x, y 方向桁の力と変位

$$M_{y \cdot y+1} = 2K_2 \{ 2\theta'_{x \cdot y} + \theta'_{x \cdot y+1} - \frac{3}{\lambda_2} (\delta_{x \cdot y+1} - \delta_{x \cdot y}) \} + C_2 \lambda_2 \left(\frac{11}{210} \ddot{\delta}_{x \cdot y} + \frac{13}{420} \ddot{\delta}_{x \cdot y+1} \right) + C_2 \lambda_2^2 \left(\frac{1}{105} \ddot{\theta}'_{x \cdot y} - \frac{1}{140} \ddot{\theta}'_{x \cdot y+1} \right) \quad (15)$$

$$M_{y \cdot y-1} = 2K_2 \{ 2\theta'_{x \cdot y} + \theta'_{x \cdot y-1} - \frac{3}{\lambda_2} (\delta_{x \cdot y} - \delta_{x \cdot y-1}) \} - C_2 \lambda_2 \left(\frac{13}{420} \ddot{\delta}_{x \cdot y-1} + \frac{11}{210} \ddot{\delta}_{x \cdot y} \right) + C_2 \lambda_2^2 \left(\frac{1}{105} \ddot{\theta}'_{x \cdot y} - \frac{1}{140} \ddot{\theta}'_{x \cdot y-1} \right) \quad (16)$$

また振りモーメント T 及びせん断力 S は、

$$T_{y \cdot y+1} = B_2 (\theta_{x \cdot y} - \theta_{x \cdot y+1}) + \frac{\rho_2 I_{p2} \lambda_2}{6} (2\ddot{\theta}_{x \cdot y} + \ddot{\theta}_{x \cdot y+1}) \quad (17)$$

$$T_{y \cdot y-1} = B_2 (\theta_{x \cdot y} - \theta_{x \cdot y-1}) + \frac{\rho_2 I_{p2} \lambda_2}{6} (2\ddot{\theta}_{x \cdot y} + \ddot{\theta}_{x \cdot y-1}) \quad (18)$$

$$T'_{x \cdot x+1} = B_1 (\theta'_{x \cdot y} - \theta'_{x+1 \cdot y}) + \frac{\rho_1 I_{p1} \lambda_1}{6} (2\ddot{\theta}'_{x \cdot y} + \ddot{\theta}'_{x+1 \cdot y}) \quad (19)$$

$$T'_{x \cdot x-1} = B_1 (\theta'_{x \cdot y} - \theta'_{x-1 \cdot y}) + \frac{\rho_1 I_{p1} \lambda_1}{6} (2\ddot{\theta}'_{x \cdot y} + \ddot{\theta}'_{x-1 \cdot y}) \quad (20)$$

$$S_{x \cdot x+1} = K_1 \left\{ \frac{6}{\lambda_1} (\theta_{x \cdot y} + \theta_{x+1 \cdot y}) - \frac{12}{\lambda_1^2} (\delta_{x+1 \cdot y} - \delta_{x \cdot y}) \right\} + C_1 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}_{x \cdot y} + 9\ddot{\delta}_{x+1 \cdot y}) + \frac{\lambda_1}{420} (22\ddot{\theta}_{x \cdot y} - 13\ddot{\theta}_{x+1 \cdot y}) \right\} \quad (21)$$

$$S_{x \cdot x-1} = K_1 \left\{ -\frac{6}{\lambda_1} (\theta_{x \cdot y} + \theta_{x-1 \cdot y}) - \frac{12}{\lambda_1^2} (\delta_{x-1 \cdot y} - \delta_{x \cdot y}) \right\} + C_1 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}_{x \cdot y} + 9\ddot{\delta}_{x-1 \cdot y}) + \frac{\lambda_1}{420} (-22\ddot{\theta}_{x \cdot y} + 13\ddot{\theta}_{x-1 \cdot y}) \right\} \quad (22)$$

$$S_{y \cdot y+1} = K_2 \left\{ \frac{6}{\lambda_2} (\theta'_{x \cdot y} + \theta'_{x \cdot y+1}) - \frac{12}{\lambda_2^2} (\delta_{x \cdot y+1} - \delta_{x \cdot y}) \right\} + C_2 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}_{x \cdot y} + 9\ddot{\delta}_{x \cdot y+1}) + \frac{\lambda_2}{420} (22\ddot{\theta}'_{x \cdot y} - 13\ddot{\theta}'_{x \cdot y+1}) \right\} \quad (23)$$

$$S_{y \cdot y-1} = K_2 \left\{ -\frac{6}{\lambda_2} (\theta'_{x \cdot y} + \theta'_{x \cdot y-1}) - \frac{12}{\lambda_2^2} (\delta_{x \cdot y-1} - \delta_{x \cdot y}) \right\} + C_2 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}_{x \cdot y} + 9\ddot{\delta}_{x \cdot y-1}) + \frac{\lambda_2}{420} (-22\ddot{\theta}'_{x \cdot y} + 13\ddot{\theta}'_{x \cdot y-1}) \right\} \quad (24)$$

ここで、 $K_1 = EI_x / \lambda_1$ 、 $K_2 = EI_y / \lambda_2$ 、

$B_1 = GJ_x / \lambda_1$ 、 $B_2 = GJ_y / \lambda_2$ 、 $C_1 = \rho_1 A_1 \lambda_1$ 、

$C_2 = \rho_2 A_2 \lambda_2$ 、 $\ddot{f} = \partial^2 f / \partial t^2$ 。

図-3より格点の任意格点 (x, y) 点の x 軸、 y 軸まわりのモーメントの釣合、せん断力の釣合をとると、

$$M_{x \cdot x+1} + M_{x \cdot x-1} + T_{y \cdot y+1} + T_{y \cdot y-1} = 0 \quad (25)$$

$$M'_{y \cdot y+1} + M'_{y \cdot y-1} + T'_{x \cdot x+1} + T'_{x \cdot x-1} = 0 \quad (26)$$

$$S_{x \cdot x+1} + S_{x \cdot x-1} + S_{y \cdot y+1} + S_{y \cdot y-1} = P(t) \quad (27)$$

式(25)、(26)、(27)に式(13)～(24)を代入し整理すると、格子平板の動的基礎式として次のような三連微分差分方程式が得られる。

$$2K_1 \{ \Delta_x^2 \theta_{x-1 \cdot y} + 6\theta_{x \cdot y} - \frac{3}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{x-1 \cdot y} \} - B_2 \Delta_x^2 \theta_{x \cdot y-1} + C_1 \left\{ \frac{13\lambda_1}{420} \Delta_x \delta_{x-1 \cdot y} - \frac{\lambda_1^2}{420} (3\Delta_x^2 \ddot{\theta}_{x-1 \cdot y} - 2\ddot{\theta}_{x \cdot y}) \right\} + C_2 \frac{\gamma_{22}^2}{6} (\Delta_x^2 \ddot{\theta}_{x \cdot y-1} + 6\ddot{\theta}_{x \cdot y}) = 0 \quad (28)$$

$$2K_2 \{ \Delta_y^2 \theta'_{x \cdot y-1} + 6\theta'_{x \cdot y} - \frac{3}{\lambda_2} \Delta_y \delta_{x \cdot y-1} \} - B_1 \Delta_x^2 \theta'_{x-1 \cdot y} + C_2 \left\{ \frac{13\lambda_2}{420} \Delta_y \delta'_{x \cdot y-1} - \frac{\lambda_2^2}{420} (3\Delta_y^2 \ddot{\theta}'_{x \cdot y-1} - 2\ddot{\theta}'_{x \cdot y}) \right\} + C_1 \frac{\gamma_{21}^2}{6} (\Delta_x^2 \ddot{\theta}'_{x-1 \cdot y} + 6\ddot{\theta}'_{x \cdot y}) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{6K_1}{\lambda_1} \{ \Delta_x \theta_{x-1 \cdot y} - \frac{2}{\lambda_1} \Delta_x^2 \delta_{x-1 \cdot y} \} + \frac{6K_2}{\lambda_2} \{ \Delta_y \theta_{x \cdot y-1} - \frac{2}{\lambda_2} \Delta_y^2 \delta_{x \cdot y-1} \} + C_1 \left\{ \frac{1}{70} (9\Delta_x^2 \ddot{\delta}_{x-1 \cdot y} + 70\ddot{\delta}_{x \cdot y}) \right\}$$

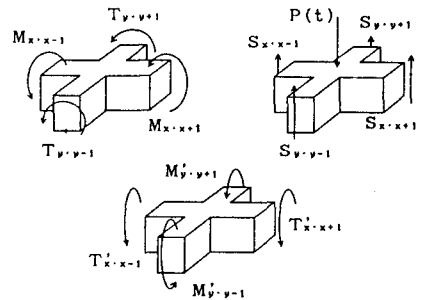


図-3 格点 (x, y) の力と変位

$$-\frac{13\lambda_1}{420}\Delta_x\ddot{\theta}_{x-1,y} + C_2\left\{\frac{1}{70}(9\Delta_y^2\ddot{\theta}_{x,y-1} + 70\ddot{\theta}_{x,y}) - \frac{13\lambda_2}{420}\Delta_y\ddot{\theta}'_{x,y-1}\right\} = P(t) \quad (30)$$

ただし、 $\Delta_x^2\theta_{x-1,y} = \theta_{x+1,y} - 2\theta_{x,y} + \theta_{x-1,y}$ 、 $\Delta_y\delta_{x-1,y} = \delta_{x+1,y} - \delta_{x-1,y}$ 、 $\Delta_y\delta_{x,y-1} = \delta_{x,y+1} - \delta_{x,y-1}$ 、 $\gamma_{s1}^2 = I_{p1}/A_1$ 、 $\gamma_{s2}^2 = I_{p2}/A_2$ 。

3. 2 境 界 条 件

4本の端桁の格点における釣合状態は、前述の3本の釣合式とは異なる形をとる。なぜなら式(28)～(30)で表わされる格点は4本の桁により規定されているが端桁の格点は3本の桁により構成されているからである。一例として(0, y)点でのy軸回り、(m, y)点でのy軸回り、(x, 0)点でのx軸回り、(x, n)点でのx軸回りの釣合式を示すと、それぞれ次のように表わされる。ただしx, yは前述したように整数値のみをとる離散変数である。

$$M_{0,y} + T_{y,y+1}^{x=0} + T_{y,y-1}^{x=0} + M_0 = 0 \quad (31)$$

$$M_{m,m-1} + T_{y,y+1}^{x=m} + T_{y,y-1}^{x=m} + M_m = 0 \quad (32)$$

$$M'_{0,y} + T_{x,x-1}^{y=0} + T_{x,x+1}^{y=0} + M'_0 = 0 \quad (33)$$

$$M'_{n,n-1} + T_{x,x-1}^{y=n} + T_{x,x+1}^{y=n} + M'_n = 0 \quad (34)$$

式(31)、(32)、(33)、(34)に式(13)～(24)を代入すると、

$$2K_1\{2\theta_{0,y} + \theta_{1,y} - \frac{3}{\lambda_1}(\delta_{1,y} - \delta_{0,y})\} - B_{20}\Delta_y^2\theta_{0,y-1} + C_1\left\{\frac{\lambda_1}{420}(22\ddot{\theta}_{0,y} + 13\ddot{\theta}'_{1,y}) + \frac{\lambda_1^2}{420}(4\ddot{\theta}_{0,y} - 3\ddot{\theta}'_{1,y})\right\} + C_2\frac{\gamma_{s20}^2}{6}(\Delta_y^2\ddot{\theta}_{0,y-1} + 6\ddot{\theta}_{0,y}) + M_0 = 0 \quad (35)$$

$$2K_1\{2\theta_{m,y} + \theta_{m-1,y} - \frac{3}{\lambda_1}(\delta_{m,y} - \delta_{m-1,y})\} - B_{20}\Delta_y^2\theta_{m,y-1} + C_1\left\{-\frac{\lambda_1}{420}(13\ddot{\theta}_{m-1,y} + 22\ddot{\theta}_{m,y}) + \frac{\lambda_1^2}{420}(4\ddot{\theta}_{m,y} - 3\ddot{\theta}_{m-1,y})\right\} + C_2\frac{\gamma_{s20}^2}{6}(\Delta_y^2\ddot{\theta}_{m,y-1} + 6\ddot{\theta}_{m,y}) + M_m = 0 \quad (36)$$

$$2K_2\{2\theta'_{x,0} + \theta'_{x,1} - \frac{3}{\lambda_2}(\delta_{x,1} - \delta_{x,0})\} - B_{10}\Delta_x^2\theta'_{x-1,0} + C_2\left\{\frac{\lambda_2}{420}(22\ddot{\theta}'_{x,0} + 13\ddot{\theta}_{x,1}) + \frac{\lambda_2^2}{420}(4\ddot{\theta}'_{x,0} - 3\ddot{\theta}_{x,1})\right\} + C_1\frac{\gamma_{s10}^2}{6}(\Delta_x^2\ddot{\theta}'_{x-1,0} + 6\ddot{\theta}'_{x,0}) + M'_0 = 0 \quad (37)$$

$$2K_2\{2\theta'_{x,n} + \theta'_{x,n-1} - \frac{3}{\lambda_2}(\delta_{x,n} - \delta_{x,n-1})\} - B_{10}\Delta_x^2\theta'_{x-1,n} + C_2\left\{-\frac{\lambda_2}{420}(13\ddot{\theta}'_{x,n-1} + 22\ddot{\theta}'_{x,n}) + \frac{\lambda_2^2}{420}(4\ddot{\theta}'_{x,n} - 3\ddot{\theta}'_{x,n-1})\right\} + C_1\frac{\gamma_{s10}^2}{6}(\Delta_x^2\ddot{\theta}'_{x-1,n} + 6\ddot{\theta}'_{x,n}) + M'_n = 0 \quad (38)$$

ただし、 $\lambda_1 B_{10}$ 、 I_{p10} と $\lambda_2 B_{20}$ 、 I_{p20} はそれぞれx方向及びy方向端桁の捩り剛性、断面2次極モーメントを表わし ($\gamma_{s10}^2 = I_{p10}/A_1$ 、 $\gamma_{s20}^2 = I_{p20}/A_2$)、 M_0 、 M_m は $x=0$ 、 $x=m$ に作用する外力モーメント、 M'_0 、 M'_n は $y=0$ 、 $y=n$ に作用する外力モーメントを表わす。ヒンジ端、自由端の場合には M_0 、 M_m 、 M'_0 、 M'_n は0となる。

3. 3 $\theta_{x,y}$ 、 $\theta'_{x,y}$ 、 $\delta_{x,y}$ のフーリエ定和分変換¹⁾

式(28)、(29)、(30)にそれぞれ $C_r S_r$ 、 $S_r C_r$ 、 $S_r S_r$ 変換を作用させ、式(35)～(38)等の境界条件を考慮して整理すると、次のようなマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{Sym.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i S_r [\theta_{x,y}] \\ S_i R_r [\theta'_{x,y}] \\ S_i S_r [\delta_{x,y}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ & M_{22} & M_{23} \\ \text{Sym.} & & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i S_r [\ddot{\theta}_{x,y}] \\ S_i R_r [\ddot{\theta}'_{x,y}] \\ S_i S_r [\ddot{\theta}_{x,y}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

ただし、

$$R_i S_r [\theta_{x,y}] = \frac{(-1)^i}{2} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{m,y} \sin \frac{r\pi}{n} y + \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{0,y} \sin \frac{r\pi}{n} y + \sum_{x=1}^{n-1} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{x,y} \cos \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y,$$

$$S_i R_r [\theta_{x \cdot y}'] = \frac{(-1)^r}{2} \sum_{x=1}^{m-1} \theta_{x \cdot n} \sin \frac{i\pi}{m} x + \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{m-1} \theta_{x \cdot 0} \sin \frac{i\pi}{m} x + \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{x \cdot y} \sin \frac{i\pi}{m} x \cos \frac{r\pi}{n} y ,$$

$$S_i S_r [\delta_{x \cdot y}] = \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} \delta_{x \cdot y} \sin \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y ,$$

$$K_{11} = 2K_1(6 - D_i) + B_2 D_r, \quad K_{12} = 0, \quad K_{13} = -\frac{12K_1}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m}, \quad K_{22} = 2K_2(6 - D_r) + B_1 D_i,$$

$$K_{23} = -\frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{r\pi}{n}, \quad K_{33} = \frac{12K_1}{\lambda_1^2} D_i + \frac{12K_2}{\lambda_2^2} D_r, \quad M_{11} = \frac{C_1 \lambda_1^2}{420} (2 + 3D_i) + \frac{C_2}{6} \gamma_{s2}^2 (6 - D_r),$$

$$M_{12} = 0, \quad M_{13} = \frac{13C_1}{210} \lambda_1 \sin \frac{i\pi}{m}, \quad M_{22} = \frac{C_2 \lambda_2^2}{420} (2 + 3D_r) + \frac{C_2}{6} \gamma_{s1}^2 (6 - D_i),$$

$$M_{12} = \frac{13C_2}{210} \lambda_2 \sin \frac{r\pi}{n}, \quad M_{33} = C_1 (1 - \frac{9}{70} D_i) + C_2 (1 - \frac{9}{70} D_r) .$$

ここで、 $D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{m})$ 、 $D_r = 2(1 - \cos \frac{r\pi}{n})$ 、 $i = 1, 2, 3, \dots, m$ 、 $r = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

今、四辺ヒンジの場合には、境界条件は次のようになる。

$$M_0 = \theta_{0 \cdot y} = \delta_{0 \cdot y} = 0, \quad M_m = \theta_{m \cdot y} = \delta_{m \cdot y} = 0, \quad M_0' = \theta_{x \cdot 0} = \delta_{x \cdot 0} = 0, \quad M_n' = \theta_{x \cdot n} = \delta_{x \cdot n} = 0.$$

さらに、 $B_{10} = B_1/2$ 、 $B_{20} = B_2/2$ 、 $\gamma_{s10}^2 = \gamma_{s1}^2/2$ 、 $\gamma_{s20}^2 = \gamma_{s2}^2/2$ の仮定を加えると 式(39)の右辺は $F_1 = 0$ 、 $F_2 = 0$ 、 $F_3 = S_i S_r [P(t)]$ となる。

さて、構造物の動的解析にあたり質量を格点に集中させる方法としてはランプト・マス法とコンシステント・マス法がある。式(39)の質量マトリックスはコンシステント・マス法を用いて求めたものであり、ランプト・マス法を採用すると式(39)の内容は次のようになる。ただし回転慣性は無視する。

$$M_{11} = M_{12} = M_{13} = M_{22} = M_{23} = F_1 = F_2 = 0, \quad M_{33} = W_1 / g.$$

ここで、 W_1 は格点の支配する重量、 g は重力加速度を表わす。

3. 4 格子平板の振動解析

和分変換を作用させた後の変位ベクトル、外力ベクトル、剛性マトリックス、質量マトリックスをそれぞれ $\{w_s\}$ 、 $\{F\}$ 、 $[K]$ 、 $[M]$ で表わすと、式(39)は次式のようにになる。

$$[M] \{\ddot{w}_s\} + [K] \{w_s\} = \{F(t)\} \quad (40)$$

動的変位 $\{w_s\}$ は固有振動波形の組合せによって表わすことができるとすると次式のように表わされる。

$$\{w_s\} = [V] \{z\} \quad (41)$$

ここで、 $[V] = [\{V_1\} \{V_2\} \{V_3\}]$ 、 $[V]$ は式(40)の右辺を0とおいた自由振動方程式を解いて得られた固有ベクトル $\{V_k\} = \{V_{1k}, V_{2k}, V_{3k}\}^T$ ($k = 1, 2, 3$) からなるマトリックスである。また $\{z\} = \{z_1(t), z_2(t), z_3(t)\}^T$ は一般化座標を表わしている。

式(41)を式(40)に代入し $[V]^T$ を左側から乗じると固有ベクトルの直交関係より次のような $3 \times (m-1) \times (n-1)$ 個の非連成運動方程式が得られる。

$$M_k^*(i, r) \ddot{z}_k + K_k^*(i, r) z_k = P_k^*(i, r, t) \quad (42)$$

$$(k = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1, \quad r = 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

ここで、 $M_k^* = \{V_k\}^T [M] \{V_k\}$ 、 $K_k^* = \{V_k\}^T [K] \{V_k\}$ 、 $P_k^* = \{V_k\}^T \{F(t)\}$ 、 $\{V_k\}$ はマトリックス $[V]$ の k 番目の固有ベクトルを表わす。

式(42)を M_k^* で除し、次式が得られる。

$$\ddot{z}_k + n_k^2(i, r) z_k = \frac{1}{M_k^*} P_k^*(i, r, t) \quad (43)$$

ここで、 $n_k^2 = K_k^*(i, r) / M_k^*(i, r)$ 、 n_k は固有円振動数を表わす。

今、格子平板の (ξ, η) 点に衝撃力 $P(t)$ が垂直方向に作用する場合、 $z_k(0) = \dot{z}_k(0) = 0$ の初期条件のもとで式(43)を解くと次式が得られる。

$$z_k = \frac{V_{3k}}{M_k n_k} \sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t - \tau) d\tau \quad (44)$$

ここで、 V_{3k} はマトリックス $[V]$ の3行 k 列要素を表わしている。

従って、式(41)における s 番目の点の変位は次式のようにになる。

$$w_s = \sum_{k=1}^3 \frac{V_{sk} \cdot V_{3k}}{M_k n_k} \sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t - \tau) d\tau \quad (s=1, 2, 3) \quad (45)$$

ここで、 $\{w_1, w_2, w_3\} = \{R_i S_r [\theta_{x,y}], S_i R_r [\theta'_{x,y}], S_i S_r [\delta_{x,y}]\}$ であるから、最終的な変位は上式をフーリエ変換と分逆変換することにより次式のように求められる。

$$\theta_{x,y} = \frac{4}{m n} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^3 \frac{V_{1k} \cdot V_{3k}}{M_k n_k} \sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta \cos \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t - \tau) d\tau \quad (46)$$

$$\theta'_{x,y} = \frac{4}{m n} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^3 \frac{V_{2k} \cdot V_{3k}}{M_k n_k} \sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta \sin \frac{i\pi}{m} x \cos \frac{r\pi}{n} y \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t - \tau) d\tau \quad (47)$$

$$\delta_{x,y} = \frac{4}{m n} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^3 \frac{V_{3k}^2}{M_k n_k} \sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta \sin \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t - \tau) d\tau \quad (48)$$

衝撃点での変位 $\delta_{\xi, \eta}$ は次式のようにになる。

$$\delta_{\xi, \eta} = \frac{4}{m n} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^3 \frac{V_{3k}^2}{M_k n_k} (\sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta)^2 \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t - \tau) d\tau \quad (49)$$

ランプトマス法による変位は式(46)～(48)において k は1項のみでよく、ランプトマス法の固有円振動数 n_1 は具体的に次のように表わされる。

$$n_1^2(i, r) = \frac{g}{W_1} \cdot \frac{12K_1}{\lambda^2} \left\{ \frac{D_i (D_i + \alpha_{12} D_r)}{2(6 - D_i) + \alpha_{12} D_r} + \gamma \beta^2 \frac{D_r (D_r + \alpha_{21} D_i)}{2(6 - D_r) + \alpha_{21} D_i} \right\} \quad (50)$$

ここで、 $\alpha_{12} = B_2/K_1$ 、 $\alpha_{21} = B_1/K_2$ 、 $\beta = \lambda_1/\lambda_2$ 、 $\gamma = K_2/K_1$ 。

以上、各格点の動的変位が求められたなら、式(13)から式(24)より各要素のモーメント、せん断力の動的応答も計算することができる。

4. 積分方程式法による衝撃問題の解析

衝撃現象は、衝突物体と被衝突物体との接触によってはじめて衝撃力が発生する。したがって発生する衝撃力はいくまで未知量である。ここでは衝突物体が初速度 V_0 で格子平板の任意点 (ξ, η) に衝突する場合に発生する衝撃力を定める積分方程式を誘導する。最初に衝突物体として減衰バネー質点系を考える。バネーダッシュポット系モデルとしては図-4のようなマックスウェルモデルを考える。

以上のモデル化において被衝突物である格子平板の方に緩衝材としてバネーダッシュポット系モデル⁴⁾ (例えばマックスウェルモデル、フォークトモデル、三要素モデル

等)を取り付けることも可能であり、この手法のロックシェッドの落石問題等への適用が考えられる。

今、質量の重心の変位を w_m とする。質点系の運動方程式はニュートンの法則より、

$$M \ddot{w}_m(t) = -P(t) + Mg \quad (51)$$

式(51)を $w_m(0) = 0$ 、 $\dot{w}_m(0) = V_0$ の条件のもとで解くと、

$$w_m(t) = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t - \tau) d\tau \quad (52)$$

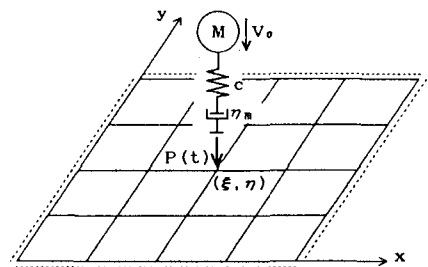


図-4 マックスウェルモデル

上式における右辺第2項は衝突時間が短い場合他の項にくらべて値が小さくなるので無視してもかまわない。

マックスウェルモデルの変位 $w_d(t)$ と荷重 $P(t)$ の関係は、

$$w_d(t) = \frac{1}{c} P(t) + \frac{1}{\eta_m} \int_0^t P(\tau) d\tau \quad (53)$$

ここで、 c はバネ定数、 η_m は粘性係数を表わす。

また、マックスウェルモデルの変位 w_d は質量の変位 w_m と衝撃点における構造物の変位 $\delta_{\xi, \eta}$ との差に等しいから、

$$w_d(t) = w_m(t) - \delta_{\xi, \eta}(t) \quad (54)$$

式(49)、(52)、(53)を式(54)に代入すると、次のような衝撃力 $P(t)$ を求める第2種ボルテラ型の積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} P(t) + \frac{1}{\eta_m} \int_0^t P(\tau) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau \\ & + \frac{4}{m n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^3 \frac{V_{3k}^2}{M k n k} (\sin \frac{i \pi}{m} \xi \sin \frac{r \pi}{n} \eta)^2 \int_0^t P(\tau) \sin n k (t-\tau) d\tau = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (55)$$

式(55)において左辺第2項を省略することで、バネ-質点系の衝突物体の場合も計算することができる。

減衰バネ-質点系が剛体平面に衝突する場合は剛体平面にたわみは生じないので、式(55)の左辺第4項を省略した式にラプラス変換をほどこし次式のようなになる。

$$P(t) = \frac{V_0 c}{\omega \sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\omega \alpha t} \sin \omega \sqrt{1-\alpha^2} \cdot t + W \left\{ 1 - \frac{e^{-\omega \alpha t}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sin(\omega \sqrt{1-\alpha^2} \cdot t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}) \right\} \quad (56)$$

ここで、 $\omega = \sqrt{c/M}$ 、 $\alpha = \sqrt{M c} / 2 \eta_m$ 、 $W = M g$ 、 $\alpha^2 < 1$ 。

バネ-質点系モデルが剛体平面に衝突する場合は、

$$P(t) = \frac{V_0 c}{\omega} \sin \omega t + W(1 - \cos \omega t) \quad (57)$$

次に図-5 a)のような格子平板の任意点に弾性球が初速度 V_0 で衝突する問題を扱う。弾性球の運動方程式は、弾性球の質量を M 、弾性球の衝撃点の部材へのくい込み深さ(局所変形)を δ とすると次式のようなになる。

$$M(\ddot{\delta}_{\xi, \eta} + \ddot{\delta}) = -P(t) + M g \quad (58)$$

式(58)を解くと弾性球の重心の変位 $u(t)$ は、

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta_{\xi, \eta}(t) + \delta(t) \\ &= V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

一方、衝撃部の局所変形 δ (図-5 b)を Hertz の接触理論より次式のように仮定する。

$$\delta(t) = k P^{\frac{2}{3}}(t) \quad (60)$$

ここで、 $k = \sqrt[3]{(9 \pi^2 / 16) \{ (k_1 + k_2)^2 / R \}}$ 、 $k_1 = (1 - \nu_1^2) / \pi E_1$ 、 $k_2 = (1 - \nu_2^2) / \pi E_2$ 、 R は弾性球の半径。 ν_1 、 E_1 は衝撃部の部材のポアソン比と弾性係数を、 ν_2 、 E_2 は弾性球のポアソン比と弾性係数を表わす。

式(49)、(60)を式(59)に代入すると弾性球が衝突した場合に発生する衝撃力を定める次のような非線型積分方程式が得られる。

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau$$

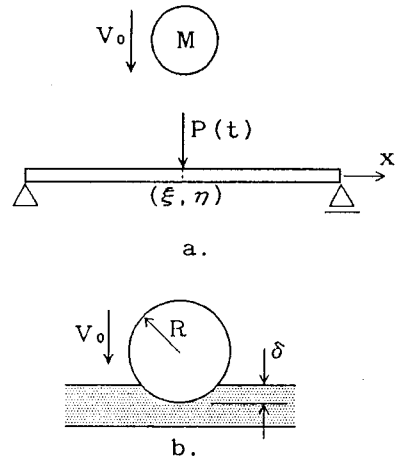


図-5 弾性球による衝突

$$+ \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^3 \frac{V_3 k^2}{M_k n_k} (\sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta)^2 \int_0^t P(\tau) \sin n_k (t-\tau) d\tau = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (61)$$

無限板に弾性球が衝突する場合には次のような非線型積分方程式が得られる³⁾。

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau + \frac{c_b}{8D} \int_0^t P(\tau) d\tau = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (62)$$

ここで、 $D = E_1 h^3 / 12(1-\nu_1^2)$ 、 $c_b^2 = D / \rho h$ 、 E_1 は板の弾性係数、 ν_1 は板のポアソン比、 h は板厚、 ρ は板の単位体積質量。

弾性球が半無限平面に衝突する場合は左辺第3項を無視して、

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (63)$$

以上衝撃力が求められたなら、その値を式(46)～(48)に代入し数値積分することで動の変位が求められる。また式(13)～(24)より各要素のモーメント、せん断力の動的応答も計算することができる。

このように積分方程式を用いて衝撃力を求める手法は、被衝突構造物の衝撃点での動の変位を求めることができるなら、格子平板に限らず種々の構造物に適用できる。

5. 衝突問題の簡略理論

減衰バネ-質量系（マックスウェルモデル）が格子平板に衝突する場合の簡略解法を示す。簡略解法として衝撃力を受ける構造物のたわみ曲線を衝撃点に静的な力を加えたときのたわみ曲線と仮定することにより、衝撃力を求める方法を採用する。

格子平板の衝撃点 (ξ, η) に集中荷重が作用した場合の静的なたわみ解¹⁾を用いて動的なたわみを表わすと次式ようになる。

$$\delta \xi \cdot \eta(t) = P(t) / c_p \quad (64)$$

$$\text{ここで、} \frac{1}{c_p} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} (\sin \frac{i\pi}{m} \xi \sin \frac{r\pi}{n} \eta)^2 / A_{ir}^2, \quad A_{ir}^2 = \frac{W_1 n_1^2(i, r)}{g}.$$

式(55)の第4項に式(64)を用いると、

$$\frac{1}{c} P(t) + \frac{1}{\eta_m} \int_0^t P(\tau) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau + \frac{1}{c_p} P(t) = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (65)$$

上式にラプラス変換を施し整理すると、

$$L[P(t)] = \frac{V_0 c + g c / s}{(1+\kappa)(s^2 + \frac{2\omega\alpha}{1+\kappa}s + \frac{\omega^2}{1+\kappa})} \quad (66)$$

ここで、 s はラプラス演算子、 $L[P(t)] = \int_0^\infty P(t) e^{-st} dt$ 、 $\omega = \sqrt{c/M}$ 、 $\kappa = c/c_p$ 、 $\alpha = \sqrt{Mc}/2\eta_m$ は減衰定数を表わす。

上式をラプラス逆変換すると衝撃力の簡略解は次式ようになる。

$$P(t) = \frac{V_0 C}{\omega \sqrt{1+\kappa-\alpha^2}} e^{-\frac{\omega}{1+\kappa} t} \sin\left(\frac{\omega}{1+\kappa} \sqrt{1+\kappa-\alpha^2} t\right) + W \left\{ 1 - \frac{\sqrt{1+\kappa}}{\sqrt{1+\kappa-\alpha^2}} e^{-\frac{\omega}{1+\kappa} t} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{1+\kappa} \sqrt{1+\kappa-\alpha^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+\kappa-\alpha^2}}{\alpha}\right) \right\} \quad (1+\kappa > \alpha^2) \quad (67)$$

ただし、 $P(t) = 0$ とにおいて得られた時間を衝撃の終了時間とする。また、 $P(t)$ の式を時間に関して1回微分して得られる式を0とにおいて解くとき次のような最大衝撃力を与える時間 $T_{\max}$ が求められる。

$$T_{\max} = \frac{1+\kappa}{\omega \sqrt{1+\kappa-\alpha^2}} \tan^{-1} \left(\frac{V_0 \omega \sqrt{1+\kappa-\alpha^2}}{V_0 \omega \alpha - g(1+\kappa)} \right) \quad (68)$$

上式を式(67)に代入することにより最大衝撃力 $P_{\max}$ を求めることができる。

また、減衰バネ-質点系が剛体平面に衝突する場合の衝撃力は式(65)の左辺第4項を省略した式にラプラ

ス変換を施し解くことができる。つまり、式(67)において $\kappa=0$ とおき前述した式(56)となる。

6. 数 値 計 算 例

最初に図-6 aに示す長方形波パルス P_0 が格子平板の中央点に集中荷重として t_1 時間だけ作用する場合の応答を考える。

数値計算にあたっては格子平板に次のような値を用いた。

分割数: $m=n=10$

格間長: $\lambda_1=10(\text{cm})$, $\lambda_2=8(\text{cm})$

単位体積重量: $\rho_1 g=\rho_2 g=7.85 \times 10^{-2}(\text{kgf/cm}^3)$

断面二次モーメント: $I_x=I_y=8.3333 \times 10^{-2}(\text{cm}^4)$

断面ねじりモーメント: $J_x=J_y=0.146(\text{cm}^4)$

ヤング率: $E=2.1 \times 10^6(\text{kgf/cm}^2)$

断面積: $A_1=A_2=1.0(\text{cm}^2)$

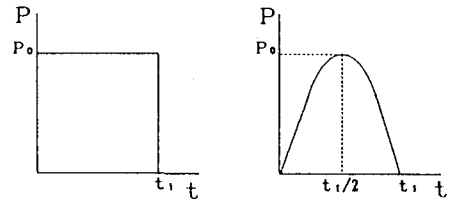
図-7は長方形波パルスの作用時間 t_1 と格子平板の第1次の固有周期 T_1 との比(インパルス長比)によって、格子平板の中央点のたわみの動的応答がどのようになるかを応答倍率 L で示したものである。ここでいう応答倍率は動的変位を外力 P_0 が静的に作用した場合の最大変位で割ったものである。 t_1/T_1 が大きくなるに従ってたわみの高周波成分は少なくなる傾向にあり、応答倍率は2に近づく結果となった。ただし、以上述べた時間変位曲線はランプト・マス法によって計算した結果である。

図-8は格子平板中央の応答倍率の時間的变化についてランプト・マス法(LM法)とコンシステント・マス法(CM法)の結果を比較したものである。時間が経過するに従い両者にわずかな位相のずれが生じているようであるが最大変位の値については大きな違いはない。この違いはどこからくるのであろうか。

図-9は格子平板の固有円振動数 $n_k(i, r)$ についてランプト・マス法とコンシステント・マス法の値を比較したものであり、高次の振動数になるほど両者の差が大きくなるのがわかる。ただし、縦軸はランプト・マス法の第1次の円振動数 P_1 で割ることで無次元化している。

次に図-10は、図-6 a及びbのインパルス荷重が格子平板中央点に作用したときの応答倍率の最大値

$L_{\max}$ (動的増幅率)を t_1/T_1 の関数として表わしたもので変位応答スペクトル(ショックスペクトル)と呼んでいる。



a. 長方形波パルス b. 半サイン波パルス

図-6 衝撃力の関数

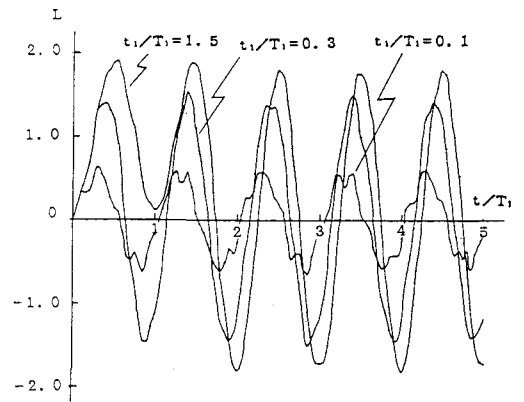


図-7 応答倍率の時間的变化(中央点)

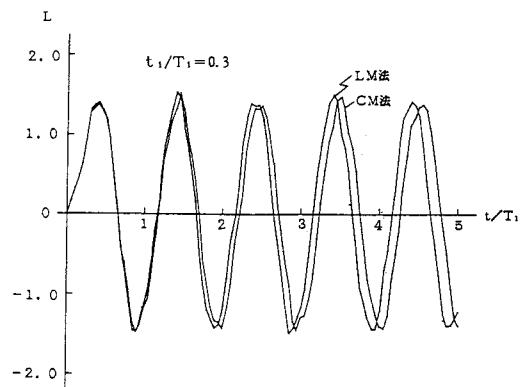


図-8 LM法とCM法の比較

図より明らかなように長方形パルスにおいては、 $t_1/T_1 \geq 0.5$ の範囲では静的荷重による応答の約2倍に近い最大応答を示しており、1自由度系のショックスペクトルと同じ傾向にあるといえる。また長方形波パルス及び半サイン波パルスいずれの場合においてもランプト・マス法とコンシステント・マス法による差異はみられないので今後は扱いの簡単なランプト・マス法で衝撃応答問題を取り扱う。

次に図-4に示すような格子平板の中央点にバネ・ダッシュポット質点系モデル（マックスウェルモデル）が衝突する問題を取り扱う。計算にあたっては以下のような数値を用いた。ただし格子桁の断面形状は箱型断面を用いている。

衝突物諸元

衝撃速度： $V_0 = 442.71887 \text{ (cm/sec)}$

物体重量： $W = 1000 \text{ (kgf)}$

バネ定数： $c = 1500 \text{ (kgf/cm)}$

減衰定数： $\alpha = 0.0000 \text{ } [\eta_m = \infty]$

$\alpha = 0.1956 \text{ } [\eta_m = 30 \text{ (kgf}\cdot\text{sec/cm)}]$

$\alpha = 0.3912 \text{ } [\eta_m = 50 \text{ (kgf}\cdot\text{sec/cm)}]$

$\alpha = 0.6520 \text{ } [\eta_m = 100 \text{ (kgf}\cdot\text{sec/cm)}]$

格子平板諸元

分割数： $m = n = 10$

格間長： $\lambda_1 = 100 \text{ (cm)}, \lambda_2 = 80 \text{ (cm)}$

単位体積重量： $\rho_1 g = \rho_2 g = 7.85 \times 10^{-2} \text{ (kgf/cm}^3\text{)}$

断面二次モーメント： $I_x = I_y = 200.1667 \text{ (cm}^4\text{)}$

断面ねじりモーメント： $J_x = J_y = 8000 \text{ (cm}^4\text{)}$

ヤング率： $E = 2.1 \times 10^6 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$

断面積： $A_1 = A_2 = 80 \text{ (cm}^2\text{)}$

格点集中荷重： $W_1 = 105.5170 \text{ (kgf)}$

数値積分の時間の刻み： $\Delta t = 1 \times 10^{-3} \text{ (sec)}$

なお、この問題では式(61)を解くのに t を細分して数値積分する方法を用いている。また式(61)を数値積分で展開するにあたり微小時間 Δt 内の衝撃力 $P(t)$ は線形変化すると仮定した。

図-11は格子平板衝撃点での P/W の時間的变化を減衰定数 α をパラメータとして表わしたものである。図より減衰定数 α が大きくなると、最大衝撃力は小さくなるが衝撃作用時間は逆に長くなる傾向にある。4つの曲線の最大衝撃力に達するまでの時間はほとんど変わらないが、ピーク後は α が増大するに従い第2ピーク点が生ずるために衝撃作用時間は $\alpha = 0$ の場合に比べ 1.5倍程長くなっている。ただし $\alpha = 0$ の曲線

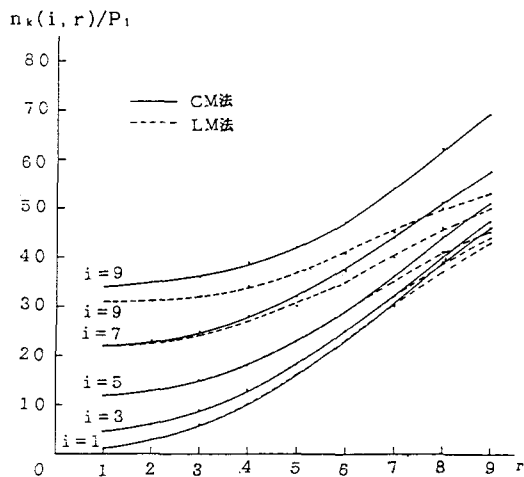


図-9 固有円振動数の比較

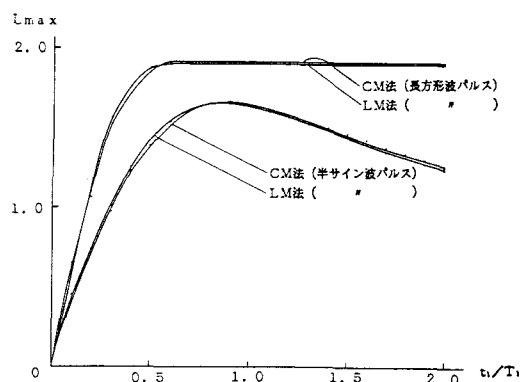


図-10 変位応答スペクトル

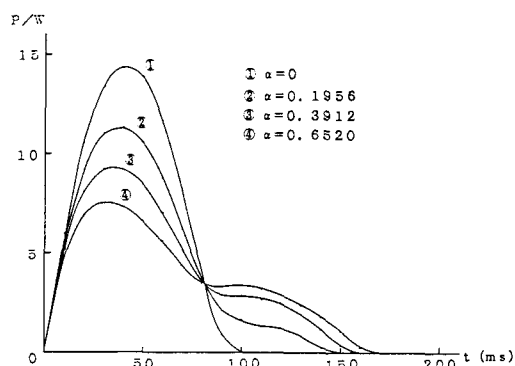


図-11 P/W の時間的变化

板に衝突する場合を表わしており衝撃力の波形はサイン波に近い形状となっている。

図-12は積分方程式法と簡略解法を比較するために、 $\alpha = 0$ と $\alpha = 0.3912$ について P/W の時間的応答を表わしたグラフである。図中で①と④の曲線は衝突モデルが剛体平面に衝突する場合で動的応答値の上限を表わしている。簡略解の最大衝撃力は剛体平面衝突解と積分方程式法解の間に入っており、衝撃力の概略を見積る上では有効な方法であると思われる。

最後に図-5に示すような格子平板に弾性球が自然落下する問題を扱った。なお計算にあたっては図-7から図-10までの計算に用いた格子平板を採用した。また新たに次のような数値を用いた。

弾性球諸元

落下高さ: $H = 0.1 \sim 5$ (m)

半径: $R = 2$ (cm)

ヤング率: $E_2 = 2.1 \times 10^6$ (kgf/cm²)

ポアソン比: $\nu_2 = 0.3$

単位体積重量: $\rho_2 g = 7.85 \times 10^{-2}$ (kgf/cm³)

数値積分の時間の刻み: $\Delta t = 1$ (μ sec)

格子平板諸元

桁の断面積 (桁幅×桁高): 0.5×0.5 (cm²)

1.0×1.0 (cm²)

1.5×1.5 (cm²)

ポアソン比: $\nu_1 = 0.3$

図-13は同じ格子平板に対して弾性球の落下高さを变化させたときの衝撃力の時間的変化を表わしたグラフである。図より落下高さを高くするほど衝撃力は大きくなるが、弾性球の接触時間は短くなることがわかる。

図-14は衝撃力の最大値を、格子桁の断面寸法をパラメータとして落下高さ $H = 0.1 \sim 5$ m の場合について示したものである。図中点線で表わされているのは桁高と同じ板厚をもつ無限板に弾性球が落下した場合の計算結果である。格子平板の剛性を大きくするほど、無限板に弾性球を落下させた場合の解に近づくことがわかる。このような問題では図-13からもわかるように衝撃力が瞬間的に作用するので変形はもっぱら力積に比例することになる。

なお、数値計算例はすべて16ビットパーソナルコンピュータで行なった。

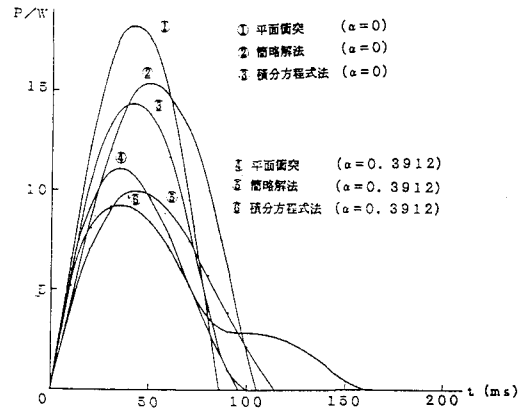


図-12 積分方程式法と簡略解法の比較

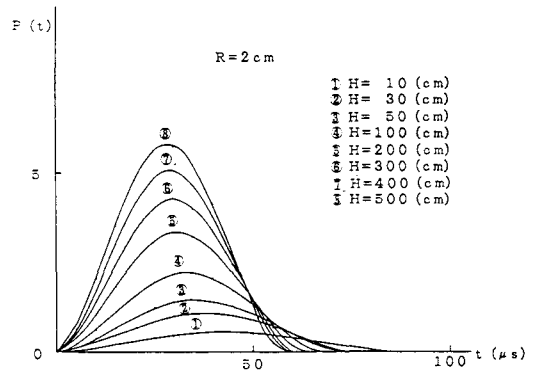


図-13 剛球の落下高さによる衝撃力の変化

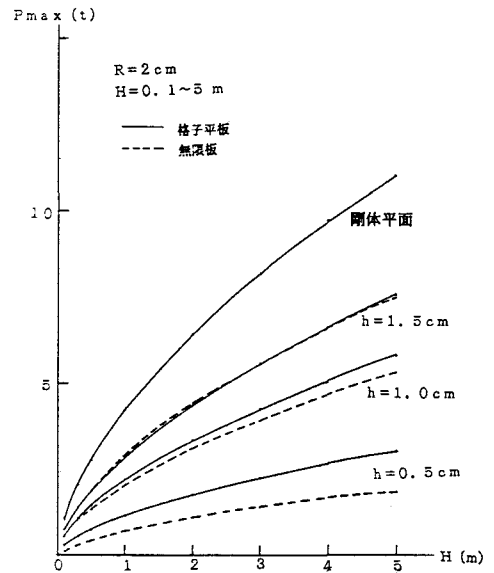


図-14 落下高さと衝撃力の最大値

7. ま と め

本論文では、桁要素が直交かつ規則正しく配列された四辺ヒンジの格子平板を対象として、弾性衝撃応答解析を行なった。

解析にあたっては、格点の力の釣合より時間を連続変数として空間座標を離散的とする三連微分差分運動方程式を導き、これをフーリエ定和分変換理論とノーマル・モード法を組み合わせることで、新しい解析手法を提案した。この手法の特徴は、ランプト・マス法とコンシステント・マス法にかかわらずフーリエ定和分変換を用いることで3行3列のマトリックスを解くことに帰着され、しかも解は有限な級数和で表わされるため小型計算機でも充分計算できることである。

この手法により格子平板に方形波衝撃及び半正弦波衝撃が作用した場合の過渡応答計算を行ない、インパルス長比と変位応答倍率の最大値との関係を表わす変位応答スペクトルを作成した結果は、1自由度系の変位応答スペクトルと類似のものとなった。

また変位応答についてランプト・マス法とコンシステント・マス法とを比較したところ衝撃初期においてはほとんど差異がないことがわかった。

次に減衰バネ質点系モデルあるいは弾性球が格子平板に衝突する問題を、衝撃荷重を仮定することなく接触点での接触条件を仮定する2体問題として扱い、発生する衝撃力を求めた。解析にあたっては、前述したフーリエ定和分変換とノーマル・モード法を組み合わせる手法により求めた衝撃点での動的たわみ式を用いて、衝突する際に生じる衝撃力を求める積分方程式を誘導した。積分方程式を解くにあたっては未知の衝撃力を微小時間内で線形変化すると仮定したため、精度よく積分方程式を解くことができた。

応用例として示した格子平板の衝突問題の数値計算結果より、本論文の積分方程式法は、和分変換が使えるようなこの種の規則性のある多自由度系の構造物に適用した場合にも充分適用できる有効な手法であることがわかった。

本論文では数値計算例として変位の応答のみを取り上げたが、モーメントとせん断力の応答にも着目するなら異なる特性が現われてくると考えられるので今後の検討課題としたい。さらに格子平板を構成する桁要素にはベルヌーイ・オイラーばり要素を用いているが、この桁要素にせん断変形と回転慣性を考慮するティモシェンコばり理論を用いるなら波動伝播現象を伴うような構造物の衝撃応答問題をより厳密に取り扱えるかと思われる。

謝 辞

本論文の原稿作成にあたり、岩手大学文部教官助手出戸秀明氏の協力を得たことを付記し、ここに感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Sumio G. Nomachi: On a Stress Analysis of Grid Plate by Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration, Proceedings of the Sixteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, 1966
- 2) 出戸秀明, 岩崎正二: 和分変換による格子平板の動的応答解析, 岩手大学工学部研究報告, Vol. 35, pp. 59-68, 1982
- 3) 岩崎正二: 衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析, 岩手大学工学部研究報告, Vol. 37, pp. 127-138, 1984
- 4) 三上敬司, 能町純雄, 松岡健一, 岸徳光: 落石による落石覆工への衝撃力に関する評価, 構造工学論文集, Vol. 33A, pp. 559-569, 1987

(1990年10月12日受付)