

剛性マトリックス法の衝撃応答解析への適用性

APPLICABILITY OF STIFFNESS MATRIX METHOD TO IMPACT ANALYSIS

菅田紀之* 岸 徳光** 松岡健一*** 尾崎 詔****

By Noriyuki SUGATA, Norimitsu KISHI, Ken-ichi G. MATSUOKA and Shinobu OZAKI

Generally, in order to analyze the dynamic behavior of a structure under impact load, it may be of good practice to use the generalized analytical codes developed based on the finite difference method or finite element method on the wave phenomena from the vicinity of the loading point to the whole structure. However, it must be a way to use the simplest impact analysis method in executing practical design calculation and understanding the general characteristics of structural dynamic responses.

In this paper, the applicability of stiffness matrix method using beam element to dynamic analysis of frame structures under impact load was investigated. This element is formulated based on the classical bar theory and the Rayleigh theory for bending action. Modal analysis method and Duhamel integration are applied to solve the motion equation of the whole structure.

Adequacy of this method is confirmed by considering the eigenvalues and comparing with the strain distributions obtained from experimental test data.

1. はじめに

山岳や海岸地域の道路交通の安全性確保のために建設されている落石覆工構造物に代表されるように、近年土木建築構造物においても衝撃的な載荷荷重に対する安全性の検討が要求されるようになり、理論的あるいは実験的な検討が種々行われている。たとえば、落石覆工屋根部敷砂の緩衝効果に関する研究に関しては、実験的には鋼材倶楽部¹⁾、建設省土研の佐々木と古賀の研究^{2),3)}、金沢大学の吉田と榎谷の一連の研究^{4)~7)}、北海道開発局土木試験所の研究⁸⁾等があり、理論的には北大の芳村と三上の研究⁹⁾、大阪市立大学の園田等の研究¹⁰⁾や著者らの研究グループによる成果^{11),12)}がある。また、各種コンクリート部材に関する研究には、電力中研の大沼と伊藤等の一連の実験的研究^{13)~15)}や神戸大学の宮本を中心とした研究グループによる実験的、理論的研究成果^{16)~18)}等がある。その他の構造部材に関する研究には、防衛大学の石川等による鋼管部材に関する実験的研究^{19),20)}や著者等のグループによる構造部材の実験的、理論的弾性衝撃問題に関する検討^{21)~24)}がある。しかしながら、これらの研究成果は衝撃力の算定問題や各種構造部材の衝撃応答性状に関するもの、あるいは材料の動的な材料特性に関するものであり、構造設計を前提とした構造物全体についての挙動把握に関する研究はいまだ少ないようである。

* 工修 室蘭工業大学助手 工学部建設システム工学科 (〒050 室蘭市水元町27-1)

** 工博 室蘭工業大学助教授 工学部建設システム工学科 (〒050 室蘭市水元町27-1)

*** 工博 室蘭工業大学教授 工学部建設システム工学科 (〒050 室蘭市水元町27-1)

**** 工博 室蘭工業大学教授 工学部建設システム工学科 (〒050 室蘭市水元町27-1)

一般に衝撃荷重載荷による構造物あるいは構造部材の動的応答問題は、衝突物の重量の数十倍から数百倍程度の荷重が構造物の固有振動周期と同程度あるいはそれよりも短い時間内に載荷する場合の過渡的な現象である。そのため、衝撃荷重載荷初期の載荷部の構造要素は、静的載荷の場合と異なり波動論に則し、応力レベルによっては弾塑性や裏面剝離、貫通等の破壊を含む複雑な挙動を示す。

このような載荷部構造要素の局所的な波動現象から構造全体の応答に至る詳細な動的解析には、有限差分法や有限要素法に基づき、時間方向に直接積分法を用いて開発された汎用コードを用いる方法が、最も得策であるものと考えられる。しかしながら、弾性的な設計計算や概略的な構造全体の応答特性を把握する目的の場合には、モード法を用いた弾性的な衝撃応答解析手法を用いることも1つの方法であり、特に緩衝材等によって十分エネルギーが吸収され弾性的な挙動が期待できるような場合には、両者とも大差のない挙動解析が可能で計算コスト的にもメリットが大きいものと考えられる。

本論文では、このような考え方のもとにラーメン構造体に衝撃荷重が載荷した場合の弾性衝撃解析をより簡易に行うことを目的として、剛性マトリックス法にモード法を併用した解析方法を採用し、その弾性衝撃問題への適用性について検討を行った。また解の妥当性に関しては、固有値に関する検討と実験結果から求められる歪分布と比較する形で行っている。特に実験結果との比較では、軸方向の変形問題に関しては棒の落下衝撃実験結果と、また曲げ問題に関しては梁の曲げ衝撃実験結果と比較する形で行っている。

2. 解析理論

図-1に示すような $x-y$ 座標系において、座標軸に対応する変位を u, v 、回転角を θ とする。節点を1、2、長さ l 、断面積 A 、断面二次モーメント I 、弾性係数 E とするはり要素において、微小変形と Bernoulli-Euler の仮定のもとに静的な梁の一次元応力問題の微分方程式を解いて整理すると、復元力としての節点力ベクトルは、剛性マトリックス $[K]$ と節点変位ベクトル $\{\delta\}$ を用いて次のように表すことができる。すなわち、 N を軸力、 S をせん断力、 M を曲げモーメントとし、節点変位ベクトル $\{\delta\}$ および節点力ベクトル $\{f\}$ を

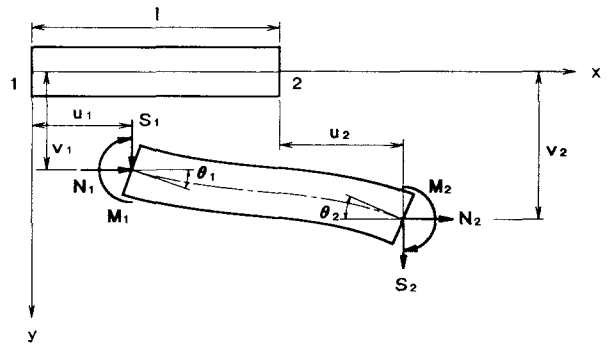


図-1 はり要素

$$\{\delta\} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2] , \quad \{f\} = [N_1 \ S_1 \ M_1 \ N_2 \ S_2 \ M_2] \quad (2.1), (2.2)$$

とおくと、

$$\{f\} = [K]\{\delta\} \quad (2.3)$$

となる。ただし、 $[K]$ はよく知られるように

$$[K] = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

で表される。また、慣性力評価のための質量マトリックス $[M]$ に関しては、固有値解析を容易にすることを第一に考え、質量を節点に集中化する Lumped Mass System を採用することとし、回転慣性項も考慮すると次のように示される。

$$[M] = \rho l \begin{bmatrix} A/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Al^2/24 + I/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Al^2/24 + I/2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

式中の ρ は単位体積質量である。

以上、復元力項、慣性力項を考慮し、座標変換マトリックスを介して節点における力のつりあいを考えると、次のような運動方程式が求められる。

$$[M_{st}]\{\ddot{\Delta}\} + [K_{st}]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.6)$$

ただし、サフィックス st は構造全体であることを意味し、 $\{\Delta\}$ 、 $\{F\}$ はそれぞれ全体座標系の変位ベクトルおよび節点外力ベクトルである。

本研究ではモード解析法を適用して式 (2.6) を解くこととした。すなわち、式 (2.6) において $\{F\} = 0$ とし、調和振動を仮定して固有値方程式を解き、固有角振動数 ω_i と対応する固有モードベクトル $\{x_i\}$ を求める。ただし i は第 i 次の固有値を意味する。ここで基準関数ベクトル $\{\phi\}$ を導入し、モードベクトルからなるマトリックス $[X]$ を用いて、 $\{\Delta\}$ を次のようにおく。

$$\{\Delta\} = [X]\{\phi\} \quad (2.7)$$

式 (2.7) を式 (2.6) に代入し、さらにモードの直交性を利用して整理すると、各固有振動に対する 1 自由度系の運動方程式が求められる。ここで、減衰項を考慮し整理すると第 i 次の固有値に対して

$$\ddot{\phi}_i + 2h_i\omega_i\dot{\phi}_i + \omega_i^2\phi_i = \frac{1}{M_i}F_i \quad (2.8)$$

と求められる。ただし、 h_i は第 i 次の固有角振動数に対する減衰定数であり、 F_i 、 M_i はそれぞれ

$$F_i = \{x_i\}^T [F], \quad M_i = \{x_i\}^T [M_{st}] \{x_i\} \quad (2.9), (2.10)$$

である。したがって、 ϕ_i は次式のようにデュアメル積分することにより容易に求めることができる。

$$\phi_i = \frac{1}{M_i\omega_{di}} \int_0^t F_i(\tau) e^{-\omega_i h_i(t-\tau)} \sin\omega_{di}(t-\tau) d\tau \quad (2.11)$$

$$\text{ただし、} \omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - h_i^2}$$

式 (2.11) を考えている全固有値に適用して基準関数ベクトル $\{\phi\}$ を求める。変位ベクトル $\{\Delta\}$ はこれを式 (2.7) に代入することにより求めることができる。また、各節点の断面力も座標変換を介し式 (2.4) を用いることにより容易に求めることが可能となる。

3. 分割数による固有値の収斂性について

本論文で採用しているはり要素は軸方向変形問題に関しては古典的な縦波動方程式に、また、曲げ問題に関しては回転慣性を考慮し、せん断変形を無視した、いわゆる Rayleigh の曲げ波動方程式の考えに準拠す

表－1 解析モデル

矩形梁	
桁幅	b = 5.0 cm
桁高	h = 10.0 cm
弾性係数	E = 2.1×10 ⁶ kgf/cm ²
密度	ρ = 7.86 g/cm ³

るものである。

分割による固有値の収斂状況に関しては、両端単純支持直線部材の最低次固有値およびモードが、その部材長を半波長とする定常波動伝播問題にほぼ近似できることに着目し、部材長を変化させ、上記理論解との比をとって検討を行った。ここでは表－1に示すような桁高 h = 10 cm の鋼矩形部材を用い、h と波長 λ（部材長の2倍と仮定する）の比

表－2 最低次固有振動数の理論解との比

(a) 曲げ振動

h/λ	分割数								
	1	2	3	4	5	10	15	20	30
0.01	0.702	0.907	0.956	0.975	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
0.05	0.702	0.907	0.957	0.975	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
0.10	0.700	0.909	0.958	0.976	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
0.50	0.670	0.925	0.966	0.981	0.988	0.997	0.999	0.999	1.000
1.00	0.650	0.916	0.963	0.979	0.987	0.997	0.999	0.999	1.000
2.00	0.641	0.906	0.958	0.976	0.985	0.996	0.998	0.999	1.000

(a) 縦振動

h/λ	分割数							
	2	3	4	5	10	15	20	30
0.01	0.900	0.955	0.974	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
0.05	0.900	0.955	0.974	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
0.10	0.900	0.955	0.974	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
0.50	0.900	0.955	0.974	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
1.00	0.900	0.955	0.974	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000
2.00	0.900	0.955	0.974	0.984	0.996	0.998	0.999	1.000

h/λ が 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 の場合について、分割数を変化させて計算を行った。解析結果を表－2に示す。曲げ波動に関しては、波長が短い領域で分割数が少ない場合、多少精度が悪いようであるが、4分割以上することによって誤差が数%以下となっている。一方、縦波動に関しては波長の長さにかかわらず各分割数に対して同一の誤差を示し、曲げ波動と同様に4分割以上することによって誤差が数%以下となっている。

以上より本解析手法は、設定最小波長に対して4分割程度の分割をすることによって、準拠している理論解と同程度の解を得ることができるものと考えられる。

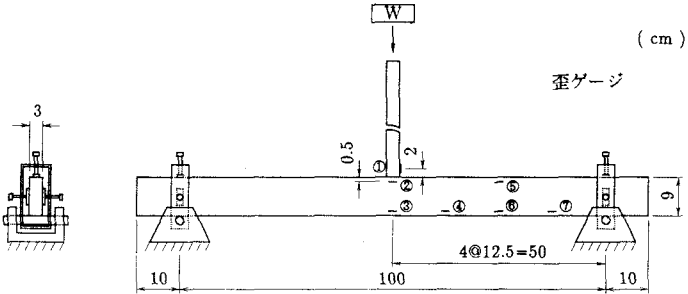
4. 衝撃問題への適用性の検討

前節において分割数による固有値に関する精度の検討を理論解と比較する形で行い、設定波長について4～5分割程度で十分であることを明らかにした。ここでは実際に衝撃応答解析を行い、実験結果あるいは他の理論を用いた解析結果と比較することにより、その衝撃問題への適用性について検討することとする。

本解析手法は軸方向変形問題、曲げ問題が連成するような場合についても応用可能であるが、ここでは分離した形で検討を行った。すなわち、曲げ問題に関しては梁の曲げ衝撃に関する実験結果と、軸方向変形問題に関しては棒の弾性衝撃実験結果と比較を行うこととした。

4.1 単純支持鋼矩形梁の曲げ衝撃

本解析式の曲げ問題に関する適用性について検討するために、文献 21) に示される鋼矩形梁を用いた曲げ衝撃実験結果を採用することとした。実験概要を示すと、図－2のような鋼矩形梁のスパン



図－2 実験概要

センター部に応力波
検知用丸棒を介し、
その上に重錘を落下
させるもので、材料
物性値は表-3に示
すようになっている。

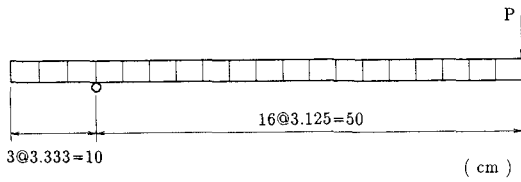


図-3 解析モデル

本論文でも文献 21) と同様に荷重として検知用丸棒から得られた歪波形を入力することによって応答解析を試みた。本解析手法による解析は、上記固有値に関する精度検討をもとに最小解析波長を桁高の2倍程度と考え、実験のゲージ貼付位置を考慮して図-3のようにスパン中央から支点までを16等分割、また支点から自由端までを3等分割とし、荷重をスパン中央部節点に集中して作用させている。図-4は実験より求め

られた入力波形と解析に用いた波形分布を示している。本論文では、実験結果を7個の折線分布に近似している。また、数値解析においては文献同様に減衰項を無視している。

図-5および6は、梁下縁部の測点での応答歪の衝撃初期と長期的な分布状況を、文献から得られた実験結果および古典梁理論、平均せん断係数 $\chi = 2/3$ と仮定している Timoshenko 梁理論の結果とともに比較して示している。なお、図の古典梁理論および Timoshenko 梁理論による解は支点から自由端までの部分が無視し Fourier 変換を用いて求めたものである。図-5の測点③および⑥、⑦の歪波形より、古典梁理論による解析結果は、本解析理論および Timoshenko 梁理論による解析結果より多少早く支点からの反射波の影響が表れていることがわかる。本解析結果は、支点から自由端までの要素を考慮した効果も含まれるものと思われるが、Timoshenko 梁同様、実験結果とよく一致

表-3 試験体

矩形梁	
桁幅	$b = 3.0 \text{ cm}$
桁高	$h = 9.0 \text{ cm}$
スパン	$l = 100.0 \text{ cm}$
弾性係数	$E = 1.98 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
密度	$\rho = 7.83 \text{ g/cm}^3$
弾性丸棒	
長さ	$l' = 100.0 \text{ cm}$
直径	$\phi = 3.0 \text{ cm}$
弾性係数	$E = 1.95 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
落錘	
落下高さ	$d = 40.0 \text{ cm}$
重量	$W = 5.8 \text{ kgf}$

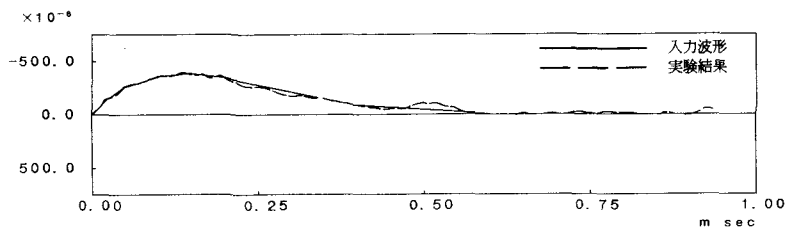


図-4 入力波形

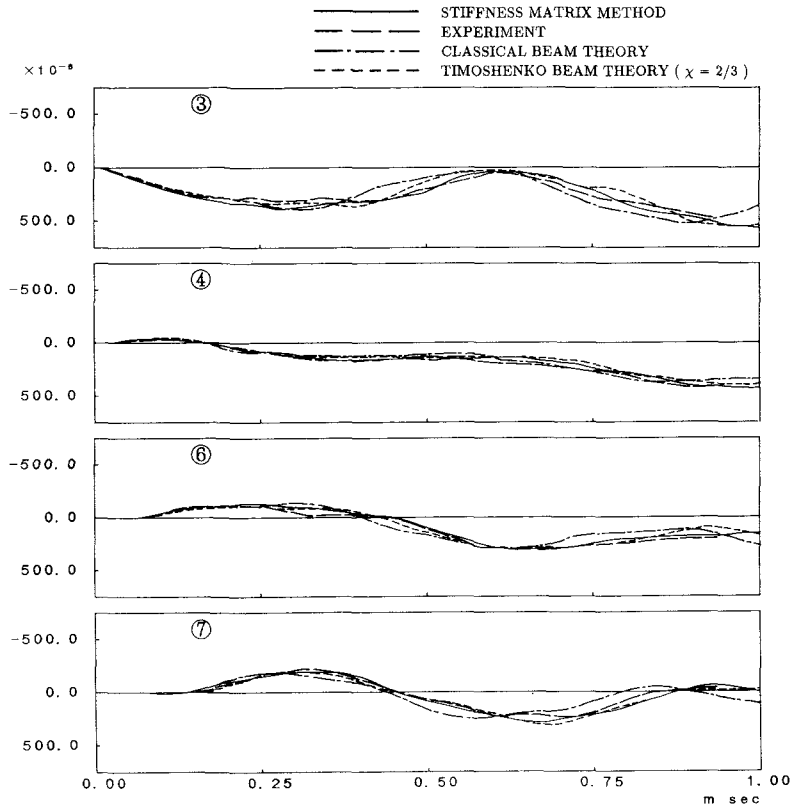


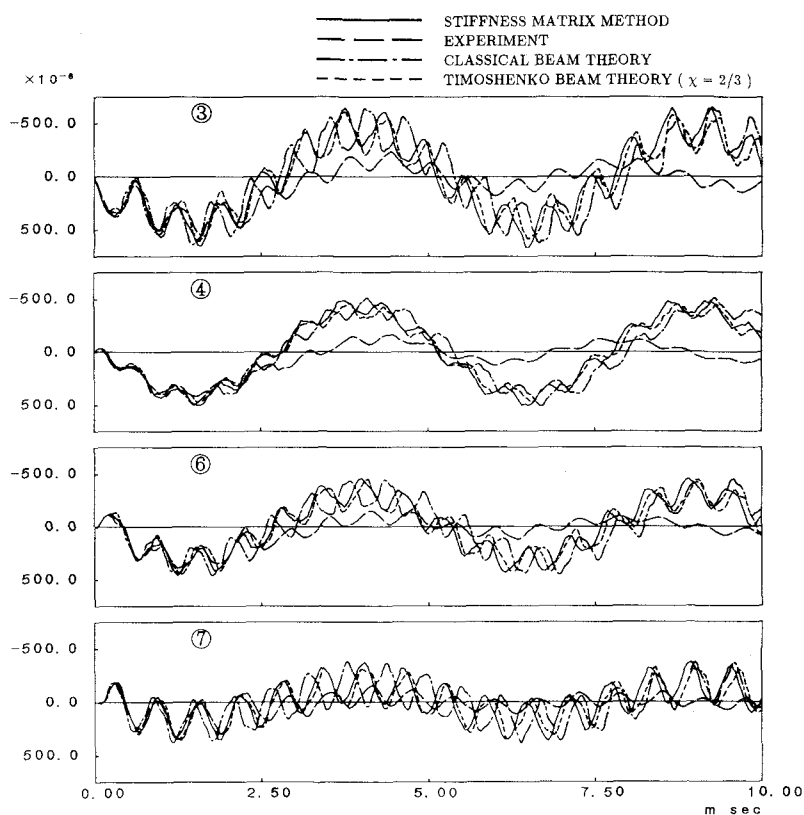
図-5 歪の実験結果と解析結果の比較

しているようである。一方、
図－6の長期的な応答性状に
関しては、減衰項を考慮して
いないため 2.5 msec 前後以
後、解析結果と実験結果は大
きな隔たりを示すが、2msec
までは、三理論解析結果とも
実験値と比較的よく一致して
いるものと考えられる。

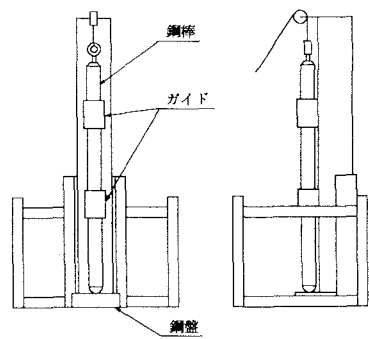
以上より、本解析手法の曲
げ変形問題に関する項は衝撃
荷重の載荷時間が 1 msec 以
下の梁の衝撃初期の応答問題
においても、弾性状態におけ
る桁高方向の波動伝播を無視
するような工学的問題に十分
適用できるものと考えられる。

4.2 鋼棒の衝撃応答解析

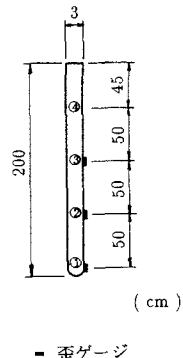
本解析式の軸方向変形問題
に関する適用性について検討
するために鋼棒落下実験を行
い、その結果と比較すること



図－6 歪の実験結果と解析結果の比較

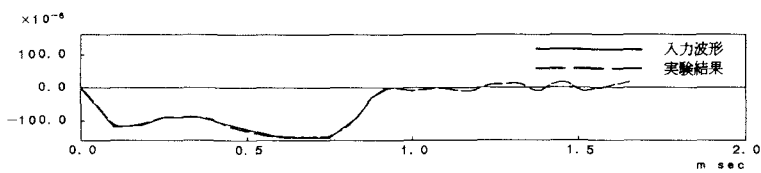


図－7 実験概要

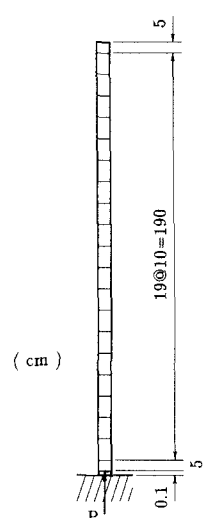


表－4 試験体

鋼棒	
長さ	l = 200.0 cm
直径	φ = 3.0 cm
落下高さ	d = 4.0 cm
弾性係数	E = 2.1 × 10 ⁶ kgf/cm ²
密度	ρ = 7.86 g/cm ³



図－8 入力波形



図－9 解析モデル

を試みた。実験は図-7に示すような簡易な木製の載荷架台を作製し、表-4に示すような鋼棒を鋼盤上に落下させた。鋼盤との衝突部は偏心を避けるため半球状に整形している。また図に示すような3点に箔歪ゲージ（ゲージ長1 mm、抵抗120 Ω ）を貼付け、DCアンプにより波形を増幅し、ウェーブメモリーを用いて波形を記録している。再生はシンクロスコープに静止像をつくり写真撮影、あるいはパルファアンプを用いてフォトコーダーにより出力することにより行っている。歪は衝撃初期の波動伝播の状態と長期的な変動状態を検討するために、全解析時間を2.0 msecと20 msecとしている。図-11の測点①の長期的な応答波形分布より、歪波形分布は衝突初期に大きな応答分布を示し、その後20 μstrain 以下の小さな応答を示していることが明かとなっているので、ここでは鋼棒が衝撃初期にのみ鋼盤に接触し、その後リバウンド状態となり空气中に浮いた状態であるものと仮定した。解析のための入力波形は測点①の歪波形を代用することとし、図-8に示すように衝撃初期の主波動のみを考慮し9個の折線分布に近似している。解析は鋼棒が荷重載荷後、剛体変位して解析的に不安定になることを防ぐため、鋼棒下端部に1 mm厚の仮要素を付加し、仮要素下端部を固定端としている。仮要素は衝撃力の分担荷重をできるだけ少なくすることと、固定端からの反射波が解析時間内に鋼棒端部に到達しないように、物性値を $E = 2.5 \times 10^{-6} \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$ としている。要素分割は図-9に示すように一要素長10 cmを基本とし、ゲージ位置を考慮し、仮要素も含めて22分割としている。また、減衰定数 h_i は測点②および③の長期的な歪波形の対数減衰率より決定し、モードによらず一定と仮定し $h_i = 0.001$ としている。

図-10および11に応答波形を実験結果と比較して示している。図-10は2 msecまでを、図-11は20 msecまでの長期的な分布状態を示している。測点①における実験結果の波形分布は入力波形として用いたものと同じのものであるが、主波動の終わりの部分で両者に若干の差が表れているようである。図-

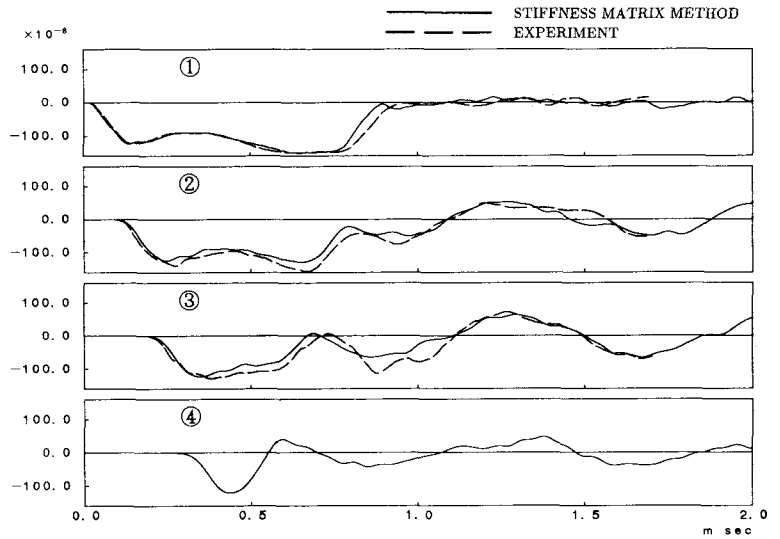


図-10 歪の実験結果と解析結果の比較

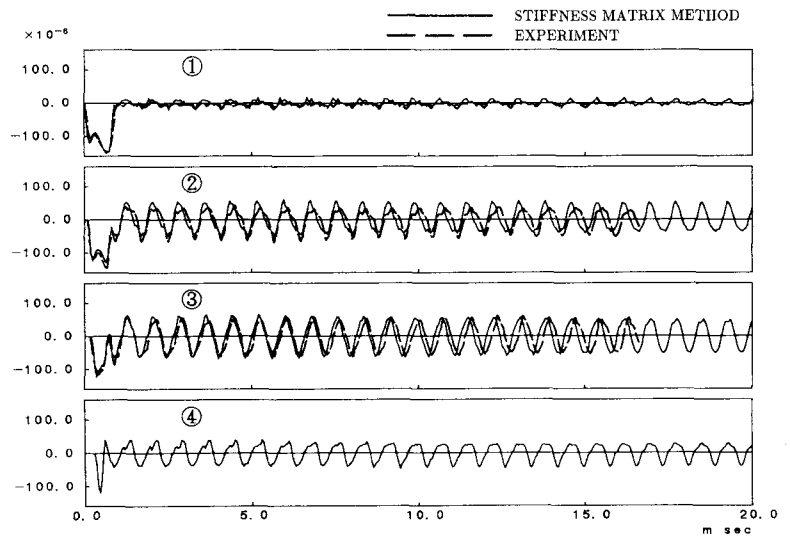


図-11 歪の実験結果と解析結果の比較

10より実験結果、解析結果とも立上りはほぼ同一であり、解析結果はよく実験結果を近似しているものと考えられる。また、図-11の長期的な応答性状に関しても10 msec 前後より周期に多少の差がみとめられるものの、良好な解が求められているものと考えられる。

以上より、本解析手法は縦波動伝播を伴う問題にもある程度適用可能であることが明かとなった。

5. まとめ

衝撃荷重載荷時の構造物の応答解析において、弾性的な設計計算や概略的な構造全体の応答性状把握を実務設計者レベルで可能とすることを目的として、静的解析でよく用いられている剛性マトリックス法にモード法を併用した解析法の適用性について検討を行った。本手法は、軸方向変形は古典の縦波動方程式に、曲げに関しては回転慣性を考慮しせん断変形を無視する Rayleigh の方程式と同一レベルに位置するものである。固有値に関する精度の検討より、桁高程度の波長までは5分割程度で理論解を近似できることが明かとなった。また、各変形に関する実験結果から得られた歪応答波形との比較も試み、実験結果とほぼ類似の解析結果を得ることができた。

以上より、本解析手法は、各変形が単独に作用する構造系の衝撃応答解析や、さらにそれらが連成して作用するような構造系の応答解析に対しても、適用可能であるものと考えられる。今後、この種の構造物に関する弾性衝撃実験を行い、さらにその妥当性について検証したいと考えている。

参考文献

- 1) 鋼材倶楽部：新しい落石覆いの開発に関する研究、鋼材倶楽研究報告書、1973.
- 2) 佐々木康・古賀泰之：敷砂上の落石の衝撃力に関する実験的研究、土木学会論文報告集、第340号、pp.127~137、1983.
- 3) 古賀泰之・佐々木康：敷砂上の落石の衝突現象に関する考察、土木学会論文報告集、第346号／Ⅲ-1、pp.27~35、1984.
- 4) 吉田 博・榊谷 浩・鈴木哲次：敷砂上の落石の衝撃加速度と衝撃土圧に関する実験的研究、土木学会論文報告集、第352号／Ⅲ-2、pp.61~70、1984.
- 5) 吉田 博・榊谷 浩・岡 衛：落石覆工屋根上への落石による衝撃荷重特性について、土木学会論文報告集、第362号／Ⅰ-4、pp.461~470、1985.
- 6) 吉田 博・榊谷 浩・佐藤 真・井原朋美：落石実験データベースの作成と落石の衝撃力評価について、構造工学論文集、Vol.33A、pp.571~583、1987.
- 7) 吉田 博・榊谷 浩・今井和昭：個別要素法による敷砂上への落石の衝撃特性に関する解析、土木学会論文報告集、第392号／Ⅰ-9、pp.297~306、1988.
- 8) 岡田憲治・中松俊裕：覆道の衝撃実験について、第23回北海道開発局技術研究発表会、pp.112・123、1979.
- 9) 芳村 仁・三上 隆・運上茂樹・若林 学：ロックシェッドに作用する落石の衝撃力、土木学会北海道支部論文報告集、第42号、pp.103~108、1986.
- 10) 園田恵一郎・小林治俊・鈴木輝男：ロックシェッドに対する落石荷重計算法（ヘルツ式の改良）について、第1回落石の衝撃力およびロックシェッドの設計に関するシンポジウム論文集、pp.25~35、1983.
- 11) 三上敬司・能町純雄・松岡健一・岸 徳光：落石による落石覆工への衝撃力に関する評価、構造工学論文集、Vol.33A、pp.559~569、1987.
- 12) 岸 徳光・吉田紘一・松岡健一・能町純雄：層状弾性体にモデル化した覆工敷砂部の衝撃応答解析、構造工学論文集、Vol.34A、pp.817~826、1988.

- 13) Ohnuma, H., C. Ito, H. Takano and S. G. Nomachi : RC Beam Response Due to Impact by Moderate Speed Gun, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.33, pp.329~336, 1984.
- 14) Ohnuma, H., C. Ito, N. Kishi and S. G. Nomachi : On the Impact Behavior of Reinforced Slab, Transactions of the Japan Concrete Institute, Vol.6, pp.575~580, 1984.
- 15) Ohnuma, H. and C. Ito : Experiment and FEM Analysis of Impact Behavior of Prestressed Concrete Slabs Subjected to a Hard Projectile, Transactions of the Japan Concrete Institute, Vol.7, pp.495~502, 1985.
- 16) 藤井 学・宮本文穂・森川英典：衝撃荷重を受ける鉄筋コンクリートはりの力学的挙動に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、第360号／V-3、pp.51~60、1985.
- 17) Miyamoto, A., M. W. King and H. Masui : Non-Linear Dynamic Analysis and Evaluation of Impact Resistance of Reinforced Concrete Slabs under Impulsive Load, Proceedings of the Japan Concrete Institute, Vol.11, pp.643~648, 1989.
- 18) King, M. W., A. Miyamoto and H. Masui : Failure Criteria and Nonlinear Dynamic Analysis of Concrete Slabs under Impulsive Loads, Proceedings of the Japan Concrete Institute, Vol.12, pp.859~864, 1990.
- 19) 齋藤英明・石川信隆・大野友則・水山高久：鋼管片持ばりの衝撃吸収エネルギーに関する基礎的研究、土木学会論文報告集、第386号／I-8、pp.321~328、1987.
- 20) 星川辰雄・香月 智・石川信隆・飯田 毅：衝撃荷重を受ける鋼管円弧固定アーチの動的応答、土木学会論文報告集、第416号／I-13、pp.245~253、1990.
- 21) Takano, H., N. Kishi and S. G. Nomachi : On Dynamic Behavior of Beams with Rectangular Cross Section under Impact Load, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.28, pp.369~378, 1980.
- 22) Takano, H., S. G. Nomachi and N. Kishi : On the Bending Impulse of Simple Supported Composite Beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, pp.213~223, 1981.
- 23) Takano, H., S. G. Nomachi and N. Kishi : The Dynamic Response of Arches under Impact Load, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.30, pp.303~312, 1981.
- 24) 岸 徳光・能町純雄・松岡健一・吉田紘一：一方向に補剛された両端単純支持矩形板の衝撃応答特性について、構造工学論文集、Vol.33A、pp.549~557、1987.

(1990年10月12日受付)