

逆対称アングル・プライ積層板の自由振動

FREE VIBRATIONS OF ANTISYMMETRIC ANGLE-PLY LAMINATED PLATES

芳村 仁* 三上 隆** 朴 勝振***

BY Jin YOSHIMURA, Takashi MIKAMI and Sung Jin PARK

The free vibrations of antisymmetric angle-ply laminated plates, having one pair of opposite edges simply supported, are investigated on the basis of the Yang, Norris, and Stavsky (YNS) theory. The equations of motion of the plate are solved by the use of collocation method. A range of results are presented for square plates to show the effects of lamination angle and number of layers on natural frequency. In addition, an analysis of the strain energy distributions is used as an aid for the better understanding of the vibration characteristics of the plates.

1. はじめに

複合材料は単一材料では望み得ない、比剛性、比強度が大きいなどの様々の優れた力学的特性を持っているため、構造軽量化が重要な様々な分野で使用されつつある。ここでいう剛性、強度とは通常、静的な負荷（変位）下でのものであり、これら静的な力学的性質のデータをもとに積層構造の設計が行われることが多い。しかし最近、複合材料の利用分野がますます広範になるに従い、動的な負荷を受ける構造にまでへの応用が期待されているが、静的な負荷下での力学的性質に優れる複合材料が必ずしも動的負荷下での力学的性質にも優れているとは限らない。このような場合動的負荷下での力学的性質のデータをもとにした設計が当然必要となる。特に重要構造部材への積極的利用にあたっては、積層構造要素の動力学的性質の解明は必要不可欠である。本研究は、積層板を取り上げ、その動的挙動の解明において基礎的情報を提供してくれる自由振動問題の解析を行ったものである。

最近のこの方面の研究動向は文献 1, 2) に詳しい。積層板は、強い異方性を示すとともに薄板の場合においても面内剛性と曲げ剛性に対して面外せん断剛性が極めて小さいのが特徴である。そのため、等方性における Mindlin 理論を拡張した Yang, Norris および Stavsky の 1 次せん断変形理論³⁾ (YNS 理論) やより高次な理論に基づく研究も行われつつあるが、自由振動特性の解明は、等方性板のそれに比べれば必ずしも十分な検討が行われていないようである。さらに解析手法は、厳密解の得られる 4 辺単純支持された場合を除けば近似解法によらなければならないが、これまでは有限要素法⁴⁾ や伝達マトリックス法⁵⁾ など限られた解法の検討しかなされておらず、他の有効と考えられる解法の適用性の検討も不十分に思われる。

そこで本研究では、相対する 2 辺が単純支持、他の 2 辺が任意支持の逆対称アングル・プライ積層板を対象にし、[1] 選点法の自由振動問題への適用性の検討、および [2] 振動数特性をひずみエネルギーの関連で明らかにすることを

* 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)
 ** 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)
 *** 工修 北海道大学大学院 工学研究科博士後期課程 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

目的とする。特にひずみエネルギーの評価により、従来の研究においては定性的にしか言及されなかった曲げ－伸びカップリング剛性の自由振動特性に与える影響を、定量的に検討することが可能になる。

2. 基礎方程式

平板の厚さは一様とし h で表す。板厚中央面に座標 (x, y) 、それらに垂直な座標 z を定める。板の材料は均質な直交異方性弾性材料とする。材料の直交異方性主軸を $(1, 2, 3)$ で表し、主軸 3 は z 軸に平行で、主軸 1 と 2 はそれぞれ x と y に対し傾き角度 θ (プライ配向角) だけ傾いているものとする。材料主軸 $(1, 2)$ 方向の弾性係数 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_{12}, ν_{21} 、およびせん断弾性係数 G_{12}, G_{13}, G_{23} で与えられるものとする。座標軸と座標軸の関係を図-1 に示す。

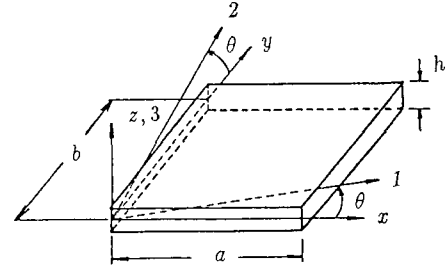


図-1 座標軸と材料主軸の関係

YNS 理論³⁾によれば積層板の基礎方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} - Pu_{,tt} - R\psi_{x,tt} &= 0, & N_{y,y} + N_{xy,y} - Pv_{,tt} - R\psi_{y,tt} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - Pw_{,tt} &= 0, & M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - I\psi_{x,tt} - Ru_{,tt} &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y - I\psi_{y,tt} - Rv_{,tt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、コンマ (,) に続く添字は偏微分を表し、 $(u, v, w) = (x, y, z \text{ 方向の変位成分})$ 、 $(\psi_x, \psi_y) = (x-z, y-z \text{ 平面の回転角成分})$ 、 $(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) = \text{合応力}$ 、 $(M_x, M_y, M_{xy}) = \text{合モーメント}$ であり、 P, R と I は密度を ρ と記せば次式で表される。

$$(P, R, I) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \quad (2)$$

アングル・プライ積層板に対する合応力と合モーメントは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= A_{11}u_{,x} + A_{12}v_{,y} + B_{16}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}), & N_y &= A_{12}u_{,x} + A_{22}v_{,y} + B_{26}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ N_{xy} &= A_{66}(u_{,y} + v_{,x}) + B_{16}\psi_{x,x} + B_{26}\psi_{y,y}, & M_x &= B_{16}(u_{,y} + v_{,x}) + D_{11}\psi_{x,x} + D_{12}\psi_{y,y} \\ M_y &= B_{26}(u_{,y} + v_{,x}) + D_{12}\psi_{x,x} + D_{22}\psi_{y,y}, & M_{xy} &= B_{16}u_{,x} + B_{26}v_{,y} + D_{66}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ Q_x &= A_{55}(w_{,x} + \psi_x), & Q_y &= A_{44}(w_{,y} + \psi_y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし、 A_{ij} は伸び剛性、 B_{ij} は曲げ－伸びカップリング剛性および D_{ij} は曲げ剛性と呼ばれるもので、次のように表される。

$$A_{ij} = K_{ij}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5), \quad (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4)$$

ここで、 K_{ij}^2 はせん断補正係数であり、 Q_{ij} はプライ配向角、弾性係数、ポアソン比、せん断弾性係数に依存する弾性定数である。

式 (3) を式 (1) に代入すれば、angle-ply 積層板の基礎微分方程式は変位成分のみで表わされ以下のようなになる。

$$\begin{aligned} A_{11}u_{,xx} + A_{12}v_{,xy} + B_{16}(2\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx}) + A_{66}(u_{,yy} + v_{,xx}) - B_{26}\psi_{y,yy} - Pu_{,tt} - R\psi_{x,tt} &= 0 \\ A_{12}u_{,xy} + A_{22}v_{,yy} + B_{26}(\psi_{x,yy} + 2\psi_{y,xy}) + A_{66}(u_{,xy} + v_{,xx}) + B_{16}\psi_{x,xx} - Pv_{,tt} - R\psi_{y,tt} &= 0 \\ A_{55}(w_{,xx} + \psi_{x,x}) + A_{44}(w_{,yy} + \psi_{y,y}) - Pw_{,tt} &= 0 \\ B_{16}(2u_{,xy} + v_{,xx}) + D_{11}\psi_{x,xx} + D_{12}\psi_{y,xy} + B_{26}v_{,yy} + D_{66}(\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) - A_{55}(w_{,x} + \psi_x) - I\psi_{x,tt} - Ru_{,tt} &= 0 \\ B_{26}(u_{,xy} + 2v_{,xy}) + D_{12}\psi_{x,xy} + D_{22}\psi_{y,yy} + B_{16}u_{,xx} + D_{66}(\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx}) - A_{44}(w_{,y} + \psi_y) - I\psi_{y,tt} - Rv_{,tt} &= 0 \\ &\dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$x=0$ と $x=a$ で単純支持、他の 2 辺 ($y=0, b$) は任意支持条件とすれば、境界条件は次のようになる。

$$x = 0, a \text{ で単純支持 : } u = w = \psi_y = M_x = N_{xy} = 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, b \text{ での条件 : 単純支持 (S) : } v = w = \psi_x = M_y = N_{xy} = 0 \\ \text{固 定 (C) : } u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \\ \text{自 由 (F) : } M_y = M_{xy} = N_y = N_{xy} = Q_y = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

ひずみエネルギー U は合応力とひずみ関係式を用いて次式のように表される⁴⁾。

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} A_{11} u_{,x}^2 + A_{66} u_{,y}^2 + 2A_{12} u_{,x} v_{,y} + 2A_{26} v_{,x} u_{,y} + A_{22} v_{,y}^2 + A_{66} v_{,x}^2 + A_{44} w_{,y}^2 \\ + A_{55} w_{,x}^2 + 2A_{44} w_{,y} \psi_y + 2A_{55} w_{,x} \psi_x + A_{55} \psi_x^2 + A_{44} \psi_y^2 \\ + 2B_{16} v_{,x} \psi_{x,x} + 2B_{16} \psi_{x,x} u_{,y} + 2B_{26} v_{,x} \psi_{y,y} + 2B_{26} u_{,y} \psi_{y,y} + 2B_{16} u_{,x} \psi_{x,y} \\ + 2B_{16} u_{,x} \psi_{y,x} + 2B_{26} v_{,y} \psi_{x,y} + 2B_{26} v_{,y} \psi_{y,x} + D_{11} \psi_{x,x}^2 + D_{66} \psi_{x,y}^2 \\ + 2D_{12} \psi_{y,y} \psi_{x,x} + 2D_{66} \psi_{x,y} \psi_{y,x} + D_{22} \psi_{y,y}^2 + D_{66} \psi_{y,x}^2 \end{array} \right\} dA \quad (8)$$

3. 解析手法

$x=0, a$ で式 (6) の条件を満足する変位関数として、Levy 型の次式を採用する。

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, t) = hU(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = hV(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) = hW(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t}, \quad \psi_x(x, y, t) = X(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ \psi_y(x, y, t) = Y(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \end{array} \right\} \quad (9)$$

ここで、 ω = 固有円振動数、 m = x 方向の半波数、 $\xi = x/a, \eta = y/b$ 。

1) 固有振動数方程式

変位関数式 (9) を式 (5) に代入すれば、次の $\eta (= [0, 1])$ に関するマトリックス常微分方程式が得られる。

$$[C_1]\{Z''\} + [C_2]\{Z'\} + [C_3]\{Z\} - \Omega^2[C_4]\{Z\} = \{0\} \quad (10)$$

ここで、 $(\quad)' = d(\quad)/d\eta$ 、 $[C_1] \sim [C_4]$ は 5×5 の係数マトリックス、変位ベクトル $\{Z\}$ と無次元化固有円振動数 Ω^2 は次式で与えられる。

$$\{Z\}^T = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = \{U, V, W, X, Y\} \quad (11)$$

$$\Omega^2 = \rho\omega^2 a^4 / (E_2 h^2) \quad (12)$$

同様に、 $y = 0 (\eta = 0)$ と $y = b (\eta = 1)$ で規定される境界条件は次のようにマトリックス表示される。

$$[C_5]\{Z'\} + [C_6]\{Z\} = \{0\} \quad (13)$$

ここで、 $[C_5]$ と $[C_6]$ は 10×5 の係数マトリックスである。

さて、式 (10) の離散化には選点法を用いるが、その定式化過程は文献 6) に従うので、ここでは後の展開で必要なことのみを記す。

[1] 変位関係の仮定；式 (11) の変位関数は次のように表す。

$$Z_i = \sum_{s=1}^{M+2} N_s(\eta) Z_{i,s} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (14)$$

ここで、 $N_s(\eta)$ は補間関数、 $Z_{i,s} (s = 1 \sim M+2)$ は後述の内部選点と端点がらなる離散点における変位関数値を表す。

[2] 内部選点と端点； η 軸に沿って $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_M < \eta_{M+1} = 1$ の $M+2$ の点を配置する。内部選点 $\eta_j (j = 1 \sim M, M = \text{内部選点数})$ には、区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre 多項式 $P_M^*(\eta)$ の零点を採用する。 $\eta_0 = 0$ と $\eta_{M+1} = 1$ は、境界条件が指定される点に配置されるので、端点と呼ぶ。

[3] マトリックス $[A]$ と $[B]$ ； η に関する 1, 2 階微分を内部選点と端点における関数値（変位の値）に結びつける $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックスである。

$$\{Z'_i\} = [A]\{Z_i\}, \quad \{Z''_i\} = [B]\{Z_i\} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (15)$$

ここで、たとえば $\{Z_i\}$ は次のようなものである。

$$\{Z_i\}^T = \{Z_i(\eta_0), Z_i(\eta_1), \dots, Z_i(\eta_{M+1})\} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (16)$$

[4] $\{Z_{ic}\}$ と $\{Z_{ie}\}$; 式(16)は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下ではこれらを分離し、内部選点に関するものには添字 c を、端点のそれには添字 e を付して表す。

$$\{Z_{ic}\}^T = \{Z_i(\eta_1), Z_i(\eta_2), \dots, Z_i(\eta_M)\}, \quad \{Z_{ie}\}^T = \{Z_i(\eta_0), Z_i(\eta_{M+1})\} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (17)$$

以上の準備のもとに、 $5(M+2)$ 個の未知量に対する条件は次のように得られる。 $5M$ 個の条件は、常微分方程式(10)の内部選点における残差条件より求められる。式(15),(17)を用いれば、

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} - \Omega^2[\beta_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad (18)$$

ここで、添字 c と e は、それぞれ内部選点と端点に関するマトリックス、ベクトルを表す。 $[\alpha_c]$ と $[\alpha_e]$ は、式(10)のマトリックス $[C_1] \sim [C_3]$ と式(15)のマトリックス $[A]$, $[B]$ の成分で構成される $5M \times 5M$, $5M \times 10$ 次のマトリックスであり、 $[\beta_c]$ は式(10)のマトリックス $[C_4]$ の成分で表される $5M \times 5M$ 次のマトリックスである。さらに、 $\{\delta_c\}$ と $\{\delta_e\}$ は、式(17)を用いれば次のようになる。

$$\{\delta_c\}^T = (\{U_c\}^T, \{V_c\}^T, \{W_c\}^T, \{X_c\}^T, \{Y_c\}^T), \quad \{\delta_e\}^T = (\{U_e\}^T, \{V_e\}^T, \{W_e\}^T, \{X_e\}^T, \{Y_e\}^T) \quad (19)$$

残り 10 個の条件は境界条件式(13)より得られ、式(18)に類似な次式となる。

$$[\gamma_c]\{\delta_c\} + [\gamma_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad (20)$$

ここで、 $[\gamma_c]$ と $[\gamma_e]$ はそれぞれ、 $10 \times 5M$ 次と 10×10 次のマトリックスである。

式(18),(20)より $\{\delta_e\}$ を消去すれば次の固有振動数方程式が得られる。

$$[\alpha_c] - [\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_c]\{\delta_c\} - \Omega^2[\beta_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad (21)$$

上式を解けば、 $5M$ 個の固有値とそれに対応する内部選点における固有モード $\{\delta_c\}$ が求められる。端点における固有モードは式(20)を用いて、次式より得られる。

$$\{\delta_e\} = -[\gamma_e]^{-1}[\gamma_c]\{\delta_c\} \quad (22)$$

2) ひずみエネルギーの算定

式(9)を式(8)に代入すれば、ひずみエネルギーは次のようになる。

$$U = U^* e^{2i\omega t} \quad (23)$$

ここで、

$$U^* = \frac{ab}{4} \int_0^1 \{A_{11}(m\pi h)^2 U^2 + A_{66} h^2 U'^2 + \dots\} d\eta \quad (24)$$

著者らは、直交多項式の零点を選点に採用すれば、選点と端点を標本点(分点)とする補間型数値積分則に関係づけられ、それは次式で表されることを文献7)で示した。

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) \cdot f(\eta_i) \quad (25)$$

ここで、 W_e は重みを表す。

したがって、式(25)を用いれば、式(24)の U^* は次のように求められる。

$$U^* = \frac{ab}{4} \left[(m\pi h)^2 A_{11} \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) U^2(\eta_i) + A_{66} h^2 \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) U'^2(\eta_i) + \dots \right] \quad (26)$$

ここで、 $U(\eta_i)(i = 0 \sim M + 1)$ は式 (21), (22) より求められる選点と端点における固有モード値であり、 $U'(\eta_i)(i = 0 \sim M + 1)$ は、式 (15) の第 1 式より求められる固有モード形の 1 次微係数である。なお、式 (26) の精度については後述する。

4. 解析結果

数値計算に用いた積層板は、 $a/b = 1$ の正方形とし、その材料特性は特に断わりのない限り次のようなものである。

$$E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

なお、せん断補正係数には $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$ を用いた。

1) 解析手法の精度

表-1 は、 $a/h = 10$ 、層数 $N = 2, 4, 6, 10$ の 4 辺単純支持された積層板の基本固有振動数 Ω に与える内部選点数 M の影響を、配向角 $\theta = 30^\circ$ (表-1(a)) と $\theta = 45^\circ$ (表-1(b)) について厳密解 (Navier の解) と比較したものである。表より理解できるように、本解析法は選点数 M によらず良好な結果を与えている。

表-2 は選点数 $M = 13$ とし、積層数 $N = 2$ の 4 辺単純支持された積層板 ($a/h = 10, \theta = 45^\circ$) の高次固有振動数の精度の検討を行ったものである。これによれば、本解析法は () 内に記した厳密解に良く一致している。

表-3 は選点数 $M = 13$ とし、 $N = 2, 6$ の 4 辺単純支持板のひずみエネルギー U^* を、Navier の解による厳密解と比較したものである。本算定法による値は、選点と端点を標本点とし、それに対応する関数値の有限和の形で求められたものであるが、厳密解と良く一致している。このことは、選点法により得られた固有モード形の精度も良好であることを示している。

なお、以下の計算には、内部選点数 M には $M = 13$ を用いる。

2) 配向角 θ と積層数 N の基本固有振動数に及ぼす影響

図-2 および図-3 に、板厚比 $a/h = 10$ 、積層数 $N = 2, 4, 6, 10$ に対する基本固有振動数 (Ω) と配向角 (θ) の関係を示す。図-2 は固定-固定 (CC)、単純支持-固定 (SC) および単純支持-単純支持 (SS) の結果を、図-3 は自由-固定

(FC)、自由-単純支持 (FS) および自由-自由 (FF) の結果である。これらの図より次のようなことがわかる。

[1] 条件 CC, SC, SS に対する固有振動数 Ω は、積層数 $N = 2$ の結果を除けば、配向角 $\theta \approx 45^\circ$ までは θ の増加とともに増加し、 $\theta > 45^\circ$ では逆に減少する。

[2] 条件 FC, FS, FF に対する固有振動数 Ω は、積層数によらず配向角 θ の増加とともに減少する。

[3] 積層数 N の固有振動数 Ω に及ぼす影響は、積層数の増加とともに弱くなる。

上記の [3] は、曲げ-伸びカップリング剛性 (B_{16} と B_{26}) の影響が積層数の増加とともに弱くなることによる。以下では、境界条件 CC, SC と SS の場合を例に取り上げ、ひずみエネルギーを用いて考察を加えてみる。

表-1 基本固有振動数 Ω の比較

(a) 4 辺単純支持, $\theta = 30^\circ$					
N	選点法				厳密解
	M=10	M=11	M=12	M=13	
2	12.681	12.681	12.681	12.681	12.681
4	17.634	17.634	17.634	17.634	17.634
6	18.226	18.226	18.226	18.226	18.226
10	18.506	18.506	18.506	18.506	18.506

(b) 4 辺単純支持, $\theta = 45^\circ$					
N	選点法				厳密解
	M=10	M=11	M=12	M=13	
2	13.044	13.044	13.044	13.044	13.044
4	18.463	18.463	18.463	18.463	18.463
6	19.087	19.087	19.087	19.087	19.087
10	19.380	19.380	19.380	19.380	19.380

表-2 固有振動数 Ω の比較 (4 辺単純支持)

m	n (y 方向の半波数)				
	1	2	3	4	5
1	13.04	26.94	44.53	64.63	86.11
	(13.04)	(26.94)	(44.53)	(64.63)	(86.11)
2	26.94	41.34	57.71	75.57	94.88
	(26.94)	(41.34)	(57.71)	(75.57)	(94.88)
3	44.53	57.71	73.46	90.07	107.54
	(44.53)	(57.71)	(73.46)	(90.07)	(107.54)
4	64.63	75.57	90.07	105.92	122.32
	(64.63)	(75.57)	(90.07)	(105.92)	(122.32)
5	86.11	94.88	107.54	122.32	138.01
	(86.11)	(94.88)	(107.54)	(122.32)	(138.01)

() 厳密解

図-4および図-5はそれぞれ、積層数 $N = 2$ および $N = 6$ における全ひずみエネルギー U^* を示したものである。これによれば、 $N = 2$ における U^* は配向角 $\theta \approx 15^\circ$ を境に減少から増加に、一方 $N = 6$ における U^* は $\theta \approx 60^\circ$ を境に増加から減少するように、全ひずみエネルギーの変化の様相は積層数に大きく依存している。

図-6は、全ひずみエネルギー U^* を剛性 A_{ij} と D_{ij} に関するひずみエネルギー (U_{AD}^*) とカップリング剛性 B_{ij} に関するひずみエネルギー (U_B^*) に分け、その比 U_B^*/U_{AD}^* をプロットしたものである。これによれば、 U_B^*/U_{AD}^* は積層数によらず $\theta \approx 30^\circ$ まで θ の増加とともに大

きくなり、それ以後単調に減少することがわかる。さらに、その値は $N = 2$ で $U_B^*/U_{AD}^* \approx 0.8$ 、 $N = 6$ で $U_B^*/U_{AD}^* \approx 0.1$ であり、明らかに積層数 N が大きければ、カップリング剛性に係るエネルギー項の寄与が少なくなることが理解できる。図-7は図-6の補足説明を目的に、種々の積層数 N に対する B_{16} の変化を示したもので、 N が増すとカップリングの影響が弱められ、たとえば $N = 2$ と $N = 4$ を比較すれば最大 50% 程度、同様に $N = 2$ と $N = 6$ を比較すれば最大 70% 程度減少している。

表-3 ひずみエネルギー U^*/E_2h^3 の比較 (4 辺単純支持)

配向角	$N = 2$		$N = 6$	
	本算定式	厳密解	本算定式	厳密解
0°	0.1701	0.1701	0.1701	0.1701
10°	0.1300	0.1300	0.1994	0.1994
20°	0.1207	0.1207	0.2782	0.2782
30°	0.1536	0.1536	0.1536	0.1536
40°	0.1969	0.1969	0.4358	0.4358
50°	0.2326	0.2326	0.4715	0.4715
60°	0.2564	0.2564	0.4697	0.4697
70°	0.2782	0.2782	0.4357	0.4357
80°	0.3232	0.3232	0.3926	0.3926
90°	0.3757	0.3757	0.3757	0.3757

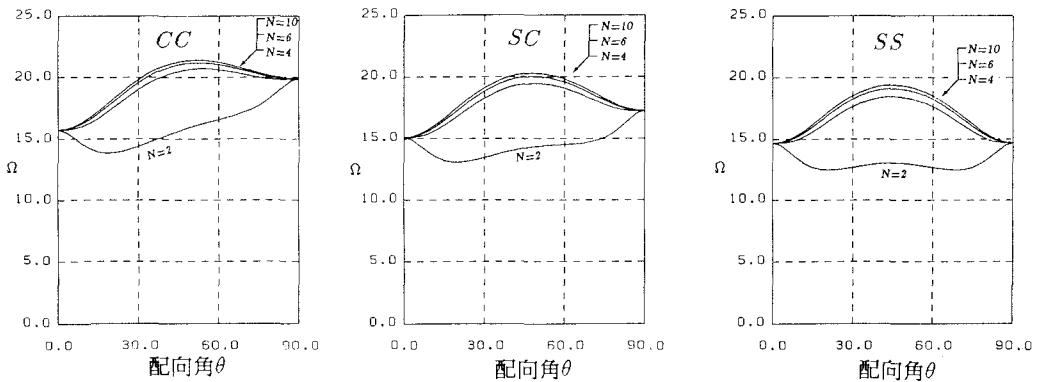


図-2 配向角に対する固有振動数の変化 (CC, SC, SS)

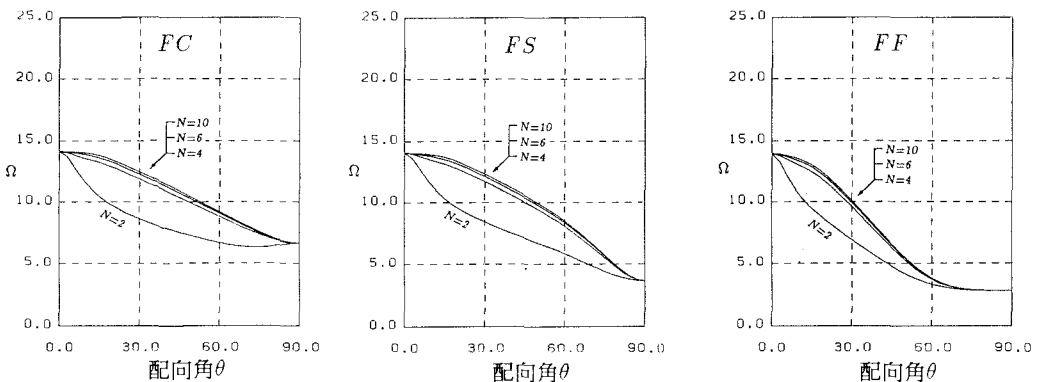


図-3 配向角に対する固有振動数の変化 (FC, FS, FF)

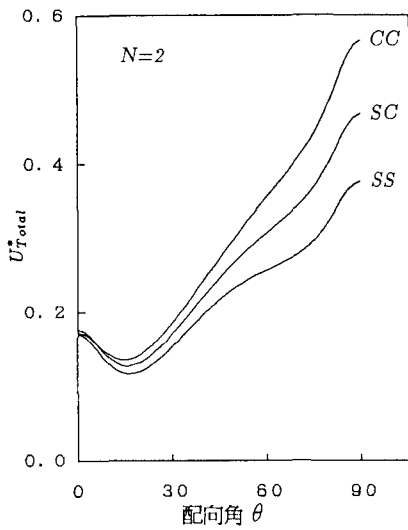


図-4 全ひずみエネルギーの変化
($N = 2$)

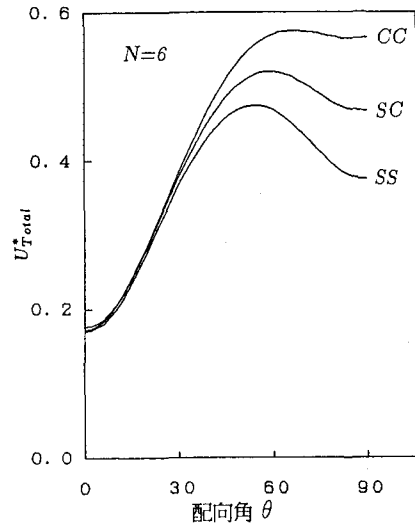


図-5 全ひずみエネルギーの変化
($N = 6$)

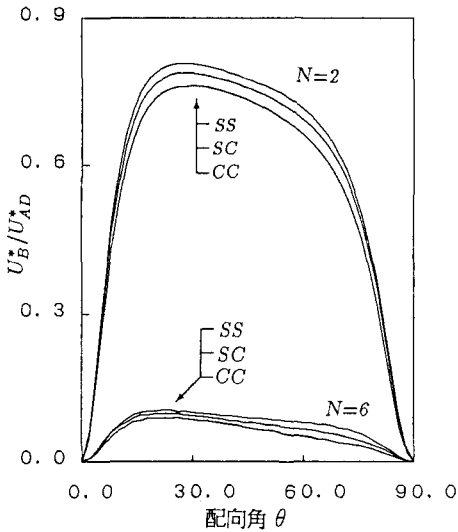


図-6 ひずみエネルギーに及ぼす
カップリング剛性の影響

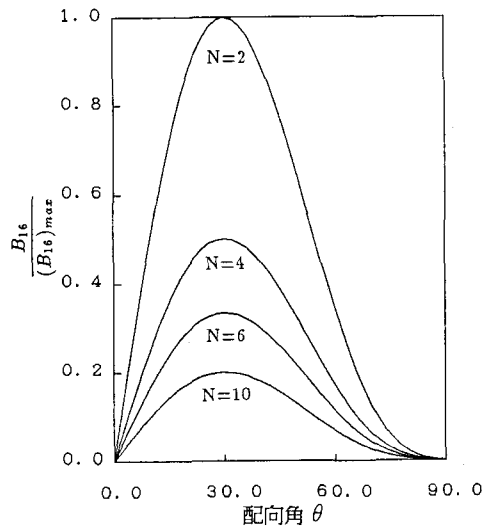


図-7 配向角に対するカップリング
剛性の変化

3) 弾性係数比 E_1/E_2 と板厚比 a/h の基本固有振動数に及ぼす影響

図-8 は、積層数 $N = 4$ とし、板厚比 a/h の基本固有振動数 Ω に及ぼす影響を配向角 $\theta = 30^\circ$ (図-8(a)), $\theta = 45^\circ$ (図-8(b)) の場合についてみたものである。

図-9 は、積層数 $N = 4$, 配向角 $\theta = 45^\circ$ とし、弾性係数比 E_1/E_2 の基本固有振動数に与える影響を板厚比 $a/h = 10$ (図-9(a)), $a/h = 100$ (図-9(b)) の場合についてみたものである。

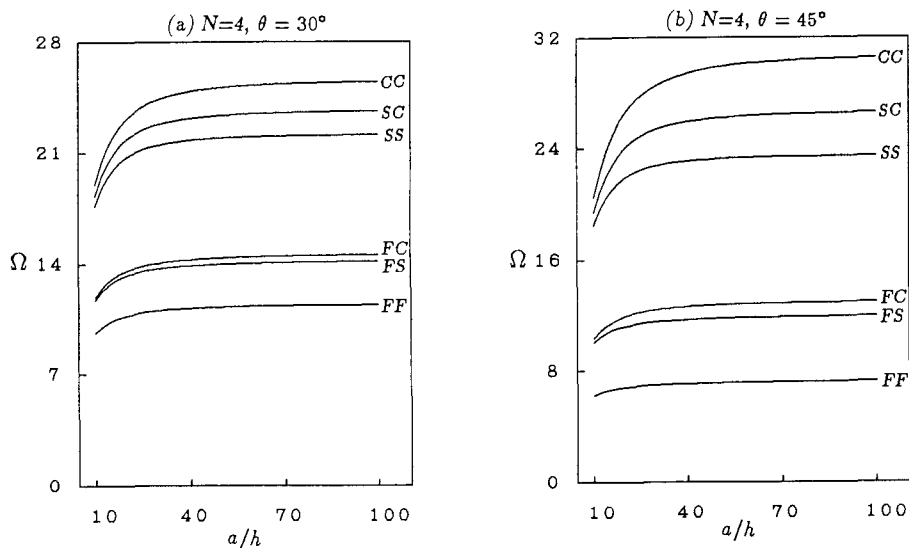


図-8 板厚比 a/h の固有振動数 Ω に及ぼす影響

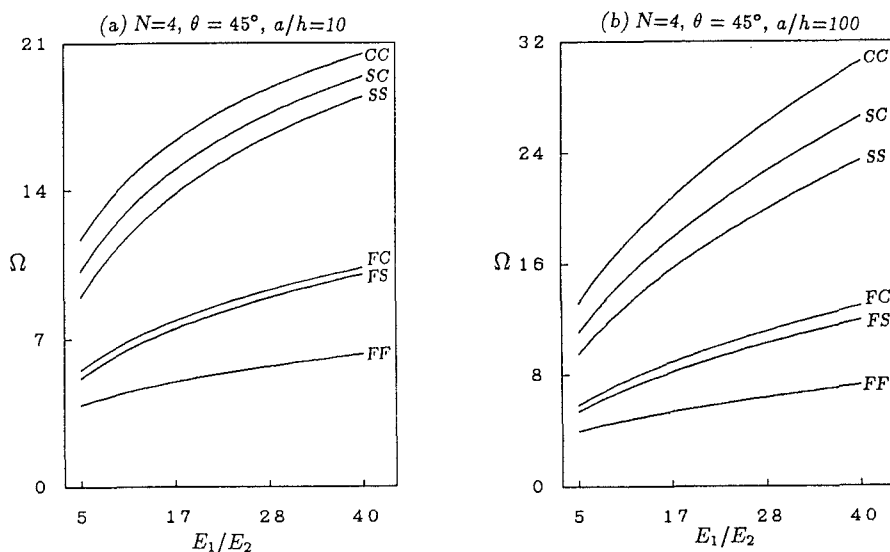


図-9 弾性係数比 E_1/E_2 の固有振動数 Ω に及ぼす影響

これらの図より、パラメータ E_1/E_2 と a/h に対する固有振動数の変化率は、各パラメータの値が小さい領域で著しいことがわかる。さらに、境界条件の固有振動数に与える影響は、Timoshenko 梁や Mindlin 板の固有振動数特性から予想されるように、固定辺を含む境界条件で顕著である。これは主にせん断変形の影響によるものである。

5. まとめ

本研究は、相対する 2 辺が単純支持された逆対称アングル・プライ積層板の自由振動解析を行ったもので次のように要約される。

- [1] 自由振動解析には選点法を用い、その有用性を示した。さらに選点におけるモード値を関数値とする補間型積分則を用いれば、固有振動性状の理解に役立つひずみエネルギーも精度よく評価できることが示せた。
- [2] カップリング剛性の固有振動数に与える影響は積層数の増加とともに弱くなる。このことは、全ひずみエネルギーにおけるカップリング剛性の寄与するエネルギー項の数値的变化からも確認できる。
- [3] 境界条件の相違の固有振動数に与える影響は、Timoshenko 梁や Mindlin 板と同様に固定条件を含む場合に著しい。

最後に、本研究は平成 2 年度科学研究補助金（一般研究 (c)）によるものの一部であることを付記し、関係各位に謝意を表します。

参考文献

- 1) Leissa, A.W., Recent Studies in Plate Vibrations : 1981-85, Part II. Complicating Effects, Shock Vib. Dig., Vol.18,p.23,1986.
- 2) Bert,C.W., Research on Dynamics of Composite and Sandwich Plates, 1979-81, Shock Vib. Dig., Vol.14,p.17,1982.
- 3) Yang,P.C., Norris, C.H. and Stavsky,T. : Elastic wave propagation in heterogeneous plates, Int.J.Solids Struct., Vol.2,p.665,1965.
- 4) Reddy,J.N. : Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method, J.Sound Vibr., Vol.66, p.565,1979.
- 5) Khdeir,A.A. : Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions, J.Sound Vibr., Vol.122,p.377,1988.
- 6) Mikami,T. and Yoshimura,J. : Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindline plates, Comput. Struct., Vol.18,p.425,1984.
三上隆・芳村仁：選点法による回転殻の応力波伝播の問題、土木学会論文集、第 374 号/I-6, p.319,1986.
- 7) 三上隆・芳村仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析、土木学会論文報告集、第 335 号, p.69,1983.

(1990 年 10 月 12 日受付)