

構造同定における各種の誤差及びノイズの影響

SENSITIVITIES OF PARAMETERS DUE TO MODEL PARAMETER ERRORS AND MEASUREMENT NOISES
IN STRUCTURAL IDENTIFICATION PROBLEMS

松井邦人*

栗田哲史**

By Kunihito MATSUI and Tetsushi KURITA

This paper deals with the development of sensitivities of structural parameter estimates with respect to model errors and measurement noises.

Structural identification algorithm is normally developed based on the concept of least square method. Then the determination of parameters is treated as an optimization problem and the parameter estimates are an optimum solution of the problem. Hence the sensitivities of the parameters with respect to errors and noises can be formulated in the manner similar to sensitivities of optimum solutions.

Numerical examples are presented to demonstrate an effectiveness of the method proposed.

1. はじめに

構造物の耐震安全性の検証や、新しい構造物の耐震設計に関する資料を得るため、常時微動観測、地震観測、強震実験を行い、実在構造物の動的挙動を測定し、その動特性を推定する試みがなされている^{1)~5)}。更に花田等⁶⁾は非線形最小2乗法の概念を用い、構造物の剛性や減衰係数の同定を対象系の応答と実験系の応答との残差を小さくするという条件から行っている。このような系定数の同定に関する研究では、DistifanoとRath⁷⁾は非線形フィルターやInvariant Imbeddingに基づき同定手法を誘導している。Simonian^{8)・9)}は構造物の動的問題の同定手法としてダイナミック・プログラミングを用いている。しかし、Invariant Imbeddingに基づく方法とダイナミック・プログラミングを用いる場合とでは基本的な考え方は異なるが、両手法から誘導される同定問題を支配する方程式は全く同じである¹⁰⁾。ShahとUdwadia¹¹⁾は基本的にGauss-Newton法の考え方で系定数の同定を行い、更に最適なセンサー設置位置の決め方についても言及している。星谷・斉藤¹²⁾・¹³⁾及び丸山等¹⁴⁾はカルマンフィルターを用いて、構造物の系定数や動特性の推定を行っている。カルマンフィルターは状態変数と共に推定誤差の共分散も推定するアルゴリズムであり、誤差の影響は誤差の共分散という形で得られる。また、松井・栗田¹⁵⁾はGauss-Newton法を用い加速度記録の任意の区間のデータを用い、系定数の推定と同時にその区間での系の初期変位・初期速度を推定する方法を誘導している。

その他、構造物の系定数や動特性を推定する手法は数多く発表されているが、同定問題で用いるモデルや測定データに含まれる誤差が未知パラメータの推定に及ぼす影響については十分検討されていない。本研究ではそのような誤差に対する未知パラメータ、即ち同定しようとするパラメータの感度を求める方法を誘導している。パラメータの推定値は最適化問題における最適解であり、このパラメータの感度は最適解の感度に対応している¹⁶⁾。この感度の計算値より、構造モデルの同定で既知として与える定数に要求される精度及び測定データに要求される精度を決定することが可能となる。また、逆に測定誤差の感度が大きい箇所は

* Ph.D. 東京電機大学 教授 理工学部 建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 工修 東電設計(株) 技術開発本部 耐震技術部 (〒100 東京都千代田区内幸町 2-1-4)

センサー設置位置として十分な注意が必要であると言えるであろう。以下に理論式を誘導し、簡単な例題を用いてその正しさを検証する。

2. 同定問題の評価式

自由度Nの構造物が動的な荷重作用を受けるとき、その挙動は次のような運動方程式で表される。

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\dot{\mathbf{z}} + K\mathbf{z} = \mathbf{Q}(t) \quad (1)$$

M , C , K はそれぞれ $N \times N$ の質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスであり、 $\mathbf{Q}(t)$ は $N \times 1$ の動的外力ベクトルである。また、 $\ddot{\mathbf{z}}$, $\dot{\mathbf{z}}$ 及び $\mathbf{z}$ は $N \times 1$ の加速度応答ベクトル、速度応答ベクトル、変位応答ベクトルである。また、式(1)の初期値

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{b} \quad (2)$$

はそれぞれ初期変位、初期速度を表している。式(1)の中で未知パラメータを $\mathbf{X} = \{X_j\}$, ($j=1, \dots, M$)、既知の定数を $\mathbf{Y} = \{Y_\ell\}$, ($\ell=1, \dots, L$)で表すものとする。応答ベクトル $\ddot{\mathbf{z}}$, $\dot{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z}$ は時間の関数だけでなく $\mathbf{X}$ 及び $\mathbf{Y}$ にも依存している。今、加速度を測定するものとし、測点*i*における測定値を $\ddot{u}_i$ 、それに対応する解析値を $\ddot{z}_i$ 、測定誤差を $e_i(t)$ とすると

$$\ddot{u}_i(t) = \ddot{z}_i(t) + e_i(t) \quad i \in A \quad (3)$$

の関係が存在する。ただし*A*は測点番号の集合である。同定を行うとき、最小2乗法の考え方に基づき、評価関数*J*を次のように定義する。

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i (\ddot{u}_i - \ddot{z}_i)^2 dt \quad (4)$$

ここに w_i は重み係数である。しかし、この選定に対し適切な方法が無い、従って以降の例題では $w_i = 1$, ($i \in A$)として計算している。定数ベクトル $\mathbf{Y}$ の真値を $\bar{\mathbf{Y}}$ で表すものとする。未知パラメータ $\mathbf{X}$ は式(4)が最小となる必要条件 $\frac{\partial J}{\partial X_j} = 0$, ($j=1, \dots, M$)から決定できる。式(4)を最小とする $\mathbf{X}$ の値を $\bar{\mathbf{X}}$ で表す。また、その時の*J*を J_{min} とすると

$$J_{min} = J(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i (\ddot{u}_i - \ddot{z}_i)^2 dt \quad (5)$$

となる。但し、 $\ddot{u}_i$ は何等かの方法で誤差が完全に除去された応答の測定値を意味している。この時 J_{min} の値は0となる。また、入力波の測定値についても一般的な表記と誤差を含まないものを区別するため、前者を $\ddot{y}_0$ そして後者を $\ddot{y}_0$ で表すものとする。

後で誘導する感度計算では、応答ベクトルの未知パラメータに関する偏微分 $\frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}$, $\frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}$, $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j}$, ($j=1, \dots, M$)が必要となる。それ等は式(1)を X_j で偏微分した次式から計算できる¹⁷⁾。

$$M \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} + C \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} + K \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial X_j} - \frac{\partial M}{\partial X_j} \ddot{\mathbf{z}} - \frac{\partial C}{\partial X_j} \dot{\mathbf{z}} - \frac{\partial K}{\partial X_j} \mathbf{z} \quad (j=1, \dots, M) \quad (6)$$

この式の初期条件は、

i) X_j が初期変位、初期速度でないとき

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}(t_0) = \{0\}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}(t_0) = \{0\} \quad (7)$$

ii) X_j が初期変位であるとき

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}(t_0) = \{1\}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}(t_0) = \{0\} \quad (8)$$

iii) X_j が初期速度であるとき

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}(t_0) = \{0\}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}(t_0) = \{1\} \quad (9)$$

となる。式(8), (9)は X_j がそれぞれ初期変位あるいは初期速度であり、そしてそれが未知の時の初期条件である。従って、初期変位、初期速度とも未知のとき、式(8), (9)をそれぞれ初期条件として式(6)を解かねばならない。初期条件 式(2)が与えられているとき、あるいは X_j が未知の初期条件でないとき式(7)を初期条件とし、式(6)を解くことになる。このとき、初期変位、初期速度は Y に含まれると考えることができる。

{1} は未知パラメータに対応する要素は1、その他の要素は0となる $N \times 1$ ベクトルである。

3. モデルパラメータ誤差の影響

(1)理論式の誘導

構造物の同定において、例えば質量または剛性の一部が既知であれば、それらを固定して扱い、測定値と解析値との差が最小となるように残りの未知パラメータの値を決定している。しかし、既知として扱った定数に誤差があれば、当然同定結果の X の値はその誤差を反映したものとなってくる。 X の Y_q に対する感度を求めることにより、 Y_q に含まれる誤差の大きさがわかれば、 X に及ぼすその影響の大きさも推定できることになる。また逆に、 X の推定値にある精度を要求すれば、それに対応して、既知として与える定数に要求される精度を求めることも可能である。 Y_q の真値 $\bar{Y}_q$ に対し ΔY_q の誤差が含まれているとすると、それが $\bar{X}_j$ に及ぼす影響は $\frac{\partial X_j}{\partial Y_q} \Delta Y_q$ と書くことができる。即ち

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} w_i \{ \ddot{u}_i - \ddot{z}_i(\bar{X} + \frac{\partial X_j}{\partial Y_q} \Delta Y_q, \bar{Y}_q + \Delta Y_q) \}^2 dt \quad (10)$$

となる。 $\ddot{u}_i$ は前節に述べたように誤差を含まない測定値である。 ΔY_q は十分小さく、 ΔY_q が X に及ぼす影響も小さいと考えられる。式(10)は近似的に

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} w_i \{ \ddot{u}_i - \ddot{z}_i(\bar{X}, \bar{Y}_q) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_q} \Delta Y_q - \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial Y_q} \Delta Y_q \}^2 dt \quad (11)$$

$\ddot{u}_i$ と $\ddot{z}_i(\bar{X}, \bar{Y}_q)$ は一致するから、{ }内の最初の2つの項の計算結果は0となる。 $\frac{\partial X_j}{\partial Y_q}$ は未知パラメータのモデルパラメータ誤差に対する感度であり、既知のパラメータ Y_q に単位量の誤差が混入するとき、未知パラメータの推定値は真値より $\frac{\partial X_j}{\partial Y_q}$ だけ大きくなることを意味している。 $\lambda_{jq} = \frac{\partial X_j}{\partial Y_q}$ と置いて式(11)を書き換えると

$$J = \frac{1}{2} (\Delta Y_q)^2 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} w_i \{ - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \lambda_{jq} - \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial Y_q} \}^2 dt \quad (12)$$

式(12)において $(\Delta Y_q)^2$ は誤差の2乗であり、その大きさは必ずしも定まっていない。しかし、式(12)が $(\Delta Y_q)^2$ の値の如何にかかわらず最小となるための必要条件は $\frac{\partial J}{\partial \lambda_{kq}} = 0$ である。従って

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_{kq}} = (\Delta Y_q)^2 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} w_i \{ - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \lambda_{jq} - \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial Y_q} \} (- \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k}) dt = 0 \quad (13)$$

式(13)を整理すると

$$\sum_{j=1}^N \{ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} w_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} dt \} \lambda_{jq} = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} w_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial Y_q} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} dt \quad (14)$$

(k=1, ..., M)

上式は λ_{jq} に関する線形の連立方程式であり、容易に解くことができる。

(2)例題

前節で誘導した理論を検証するため、図-1のような2質点系モデルを用いる。入力波 $\ddot{u}_g(t)$ は時間刻み $\Delta t = 0.02$ 秒で与えられたEl Centro波(El Centro 1940 NS Imperial Valley Earthquake)を用いている。式(1)と式(6)で示される動的応答解析とその感度解析は、Newmark β 法を用いて行った。また、解析に用いた時間区間は0~20秒である。このモデルの質量に誤差を含んだものを用いたときに、減衰係数 c_1 , c_2 及び

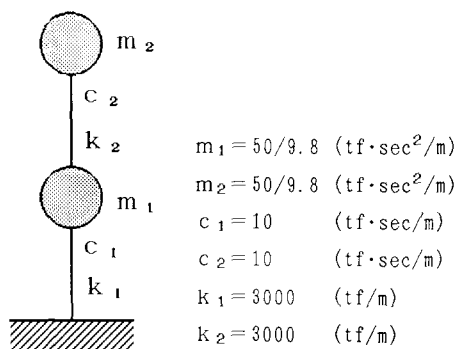


図-1 2質点系モデル

表-1 同定パラメータのモデルパラメータ誤差に対する感度

Y_q	$\frac{\partial c_1}{\partial Y_q}$	$\frac{\partial c_2}{\partial Y_q}$	$\frac{\partial k_1}{\partial Y_q}$	$\frac{\partial k_2}{\partial Y_q}$
m_1	1.8453	-1.6455	75.895	390.08
m_2	-0.11466	3.6055	512.10	197.92

単位： $\frac{\partial c_i}{\partial m_j}$ (1/sec), $\frac{\partial k_j}{\partial m_j}$ (1/sec²)

表-2 感度からの推定値と同定結果との比較

		5%		10%		20%	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
誤差	m_1						
	c_1	10.471	10.403	10.941	10.716	11.883	11.213
	c_2	9.5802	9.6928	9.1605	9.5401	8.3209	9.4666
	k_1	3019.4	3020.8	3038.7	3045.0	3077.4	3103.7
誤差	m_2						
	c_1	9.9708	9.9316	9.9415	9.5996	9.8830	7.7830
	c_2	10.920	11.081	11.840	12.595	13.679	17.628
	k_1	3130.6	3131.3	3261.3	3261.5	3522.6	3501.4
誤差	k_2	3050.5	3053.6	3101.0	3117.1	3202.0	3296.1

単位： c_i (tf·sec/m), k_i (tf/m)

剛性 k_1 , k_2 にどのような影響を及ぼすかを調べた。その結果を表-1 に示す。表-1 の $\frac{\partial c_1}{\partial m_1} = 1.8453$ は、同定を行うとき m_1 の値として $1 \text{ tf} \cdot \text{sec}^2/\text{m}$ だけ大きな値を用いたとすると、 c_1 の推定値は $1.8453 \text{ tf} \cdot \text{sec/m}$ 大きくなることを意味している。この結果より、 m_1 の値を真値より大きな値を用いると、 c_1 , k_1 , k_2 の値は真値より大きくなり、 c_2 は真値より小さな値となる。また、 m_2 の値が真値より大きい場合、 c_1 , c_2 , k_1 , k_2 の推定値は真値より大きくなる。しかし、 c_1 に及ぼす影響は非常に小さいことを示している。表-1 の感度の精度を調べるため、文献(15)の同定手法で得られる結果が正しいとし、その結果と比較することにする。そこで、2つの質量のうち一方のみに5%、10%、20%の誤差が混入するとき、 c_1 , c_2 , k_1 , k_2 の値がどうなるかを前節で述べた方法と、文献(15)の方法を用いて調べた。その結果を表-2 に示す。表-2 の推定値は表-1 の感度を用いて計算した結果であり、同定結果は文献(15)の手法で得られた結果である。誤差の大きさは比較的小さいと考えられるので、本手法に基づき誤差の影響を十分に精度良く推定できるといえる。

4. 応答の測定誤差の影響

(1) 理論式の誘導

構造モデル $\bar{M}$ 、入力 $\ddot{u}_g$ の測定値 $\ddot{u}_a$ 及び測点 q を除く応答の測定値 $\ddot{u}_i(t)$, ($i \in A$, $i \neq q$) には全く誤差が含まれていないものとする。通常、測定される応答加速度は絶対加速度であるが、ここでは入力 $\ddot{u}_g$ の測定値は真値であり誤差が含まれていない場合を考えている。従って、ここでは応答加速度として絶対加速度から入力

加速度を引いた相対加速度を用いることにする。測点 l の測定値 $\ddot{u}_l$ の真値を $\ddot{u}_l$ 、誤差を $\Delta \ddot{u}_l = \varepsilon_l \eta_l(t)$ で表すと $\ddot{u}_l = \ddot{u}_l + \Delta \ddot{u}_l$ となる。ここで、 $\eta_l(t)$ は最大値(絶対値)を1とする正規化された誤差波形であり、 ε_l は最大値の大きさを意味するスカラーである。測点 l にのみ測定誤差 $\Delta \ddot{u}_l$ が混入するとき、未知パラメータの同定結果を $\bar{X} + \Delta X^{(l)}$ と書くことができる。 $\Delta X^{(l)}$ は $\Delta \ddot{u}_l$ により生じる未知パラメータの同定結果と真値との差である。この時、式(4)は次のようになる。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{\substack{i \in \Omega \\ i \neq l}} w_i \{ \ddot{u}_i - \ddot{z}_i(\bar{X} + \Delta X^{(l)}) \}^2 + w_l \{ \ddot{u}_l + \Delta \ddot{u}_l - \ddot{z}_l(\bar{X} + \Delta X^{(l)}) \}^2 \right] dt \quad (15)$$

$\Delta \ddot{u}_l = \varepsilon_l \eta_l(t)$ による X の値は連続的に変化し、 ε_l の値が小さいとき $\bar{X}$ の変化量 $\Delta X^{(l)}$ の大きさも小さいと仮定できる。従って

$$\begin{aligned} \ddot{z}_i(\bar{X} + \Delta X^{(l)}) &= \ddot{z}_i(\bar{X}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \ddot{u}_l} \Delta \ddot{u}_l \\ &= \ddot{z}_i(\bar{X}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \varepsilon_l} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \ddot{u}_l} \Delta \ddot{u}_l \\ &= \ddot{z}_i(\bar{X}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \Gamma_{jl} \varepsilon_l \end{aligned} \quad (16)$$

但し、 $\Gamma_{jl} = \frac{\partial X_j}{\partial \varepsilon_l}$ である。式(16)を式(15)に代入し $\ddot{z}_i(\bar{X}) = \ddot{u}_i$ の関係をを用いて整理すると

$$J = \frac{\varepsilon_l^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\substack{i \in \Omega \\ i \neq l}} \left\{ - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \Gamma_{jl} \right\}^2 dt + \frac{\varepsilon_l^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_l}{\partial X_j} \Gamma_{jl} + \eta_l(t) \right\}^2 dt \quad (17)$$

となる。上式が ε_l^2 の値の如何に関わらず未知数 Γ_{jl} に関し最小となる必要条件より

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Gamma_{kl}} &= \varepsilon_l^2 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} \right) \Gamma_{jl} dt - \varepsilon_l^2 \int_{t_0}^{t_1} \eta_l(t) \frac{\partial \ddot{z}_l}{\partial X_k} dt = 0 \\ \therefore \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i \in \Omega} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} \right) \Gamma_{jl} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \eta_l(t) \frac{\partial \ddot{z}_l}{\partial X_k} dt \quad (k=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 Γ_{jl} が求める感度である。この式は Γ_{jl} を未知数とする線形連立方程式であり、容易に解くことができる。

(2)例題

前節に誘導した理論を検証するため、図-1のモデルを用いることとする。誤差 $\eta_l(t)$ は図-2のような0.1Hzから25Hzまでのバンドリミテッド・ホワイトノイズとし絶対値の最大値が1となるように調節したものをを用いることとする。また、図-3は $\ddot{x}_a$ (El Centro波で真値として扱った波)による質点1及び2の加速度応答波を示している。この波は誤差を含まない正しい波であると考え。これらの応答波に図-2のノイズが加わったとき、同定パラメータの応答ノイズに対する感度は表-3のようになる。誤差の大きさを応答値の絶対値の最大値の5%、10%、20%と変え、本理論に基づき減衰及び剛性の推定値を求めた結果と、文献(15)の同定手法に基づき得られた結果を表-4に示す。ノイズがホワイトノイズで与えられるとき、パラメータの推定値に及ぼす影響は非常に小さいと言える。

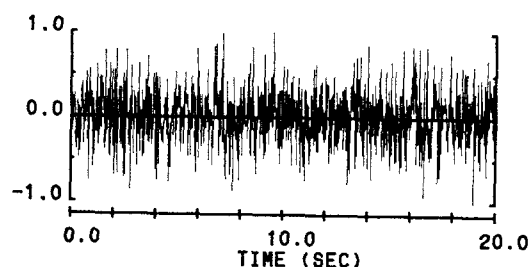
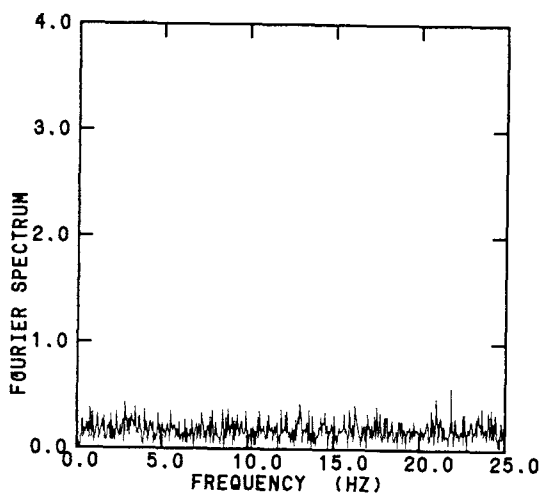
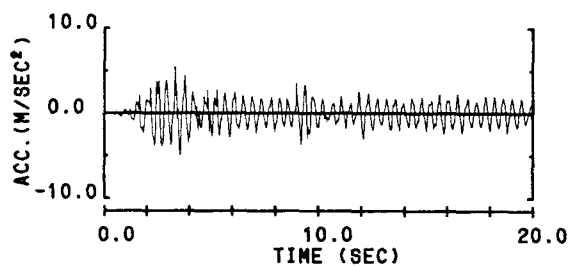
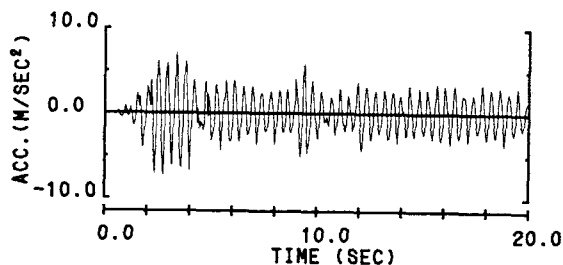


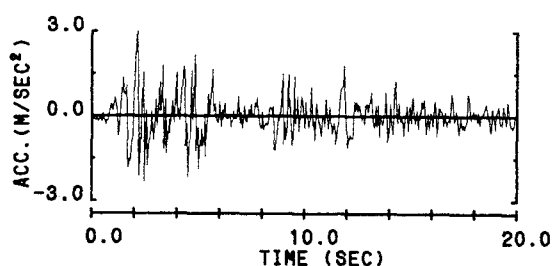
図-2 バンドリミテッド・ホワイトノイズ



a) 質点1の加速度応答波



b) 質点2の加速度応答波



c) 入力波

図-3 加速度応答波と入力波

表-3 同定パラメータの応答ノイズに対する感度 (ホワイトノイズ)

ε_q	$\frac{\partial c_1}{\partial \varepsilon_q}$	$\frac{\partial c_2}{\partial \varepsilon_q}$	$\frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_q}$	$\frac{\partial k_2}{\partial \varepsilon_q}$
ε_1	-0.00824	0.13871	4.8032	-11.393
ε_2	-0.13882	0.05514	7.0382	-16.385

単位: $\frac{\partial c_i}{\partial \varepsilon_q} (\text{tf} \cdot \text{sec}^3 / \text{m}^2)$, $\frac{\partial k_i}{\partial \varepsilon_q} (\text{tf} \cdot \text{sec}^2 / \text{m}^2)$

表-4 感度からの推定値と同定結果との比較

		5 %		10 %		20 %	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
$\ddot{u}_1$ に 誤 差	c_1	9.9977	9.9904	9.9955	9.9808	9.9910	9.9615
	c_2	10.038	10.048	10.076	10.097	10.152	10.193
	k_1	3001.3	3001.0	3002.6	3001.9	3005.3	3003.9
	k_2	2996.9	2997.9	2993.8	2995.9	2987.5	2991.5
$\ddot{u}_2$ に 誤 差	c_1	9.9503	9.9060	9.9006	9.8117	9.8013	9.6219
	c_2	10.020	10.128	10.039	10.255	10.079	10.508
	k_1	3002.5	3001.8	3005.0	3003.6	3010.1	3007.5
	k_2	2994.1	2995.5	2988.3	2990.9	2976.5	2981.5

単位: $c_i (\text{tf} \cdot \text{sec} / \text{m})$, $k_i (\text{tf} / \text{m})$

次に、図-4に示すような周波数特性を有するノイズを $\eta_a(t)$ として用いる。ノイズの卓越振動数は2.385Hzであり、図-1のモデルの非減衰時の固有振動数と一致している。応答波に図-4のノイズが加わったとき、同定パラメータの応答ノイズに対する感度は表-5のようになり、パラメータの推定値に及ぼす影響は、ホワイトノイズと比べ大きいことがわかる。誤差の大きさを応答値の5%、10%、20%と変え、本理論に基づき減衰及び剛性の推定値を求めた結果と、文献(15)の同定手法に基づき得られた結果を表-6に示す。推定値と同定結果がよく一致していることより、本理論により得られた感度の精度は十分良いと言える。

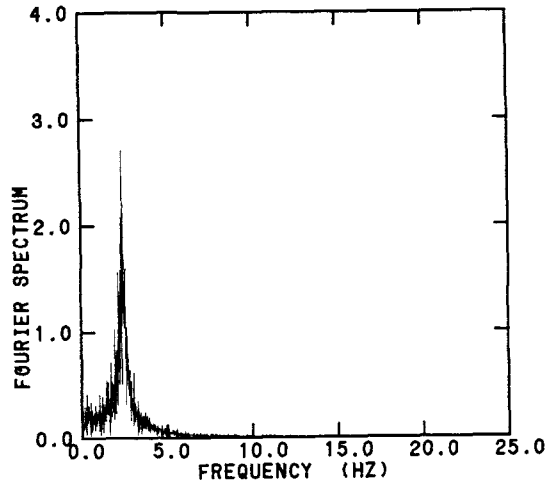


表-5 同定パラメータの応答ノイズに対する感度（周波数特性を有するノイズ）

ε_a	$\frac{\partial c_1}{\partial \varepsilon_a}$	$\frac{\partial c_2}{\partial \varepsilon_a}$	$\frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_a}$	$\frac{\partial k_2}{\partial \varepsilon_a}$
ε_1	-0.93503	1.31818	-22.4140	67.3588
ε_2	-0.56764	-0.28350	17.6039	-30.4082

単位： $\frac{\partial c_i}{\partial \varepsilon_a}(\text{tf} \cdot \text{sec}^3/\text{m}^2)$, $\frac{\partial k_i}{\partial \varepsilon_a}(\text{tf} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^2)$

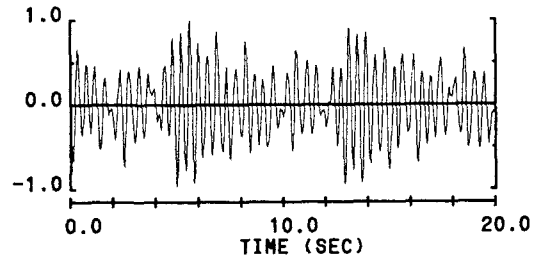


図-4 周波数特性を有するノイズ

表-6 感度からの推定値と同定結果との比較

		5%		10%		20%	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
$\ddot{u}_1$ に 誤 差	c_1	9.7439	9.7541	9.4879	9.4974	8.9758	8.9378
	c_2	10.361	10.315	10.722	10.688	11.444	11.672
	k_1	2993.9	2990.7	2987.7	2981.0	2975.4	2960.1
	k_2	3018.4	3025.6	3036.9	3052.8	3073.8	3114.2
$\ddot{u}_2$ に 誤 差	c_1	9.7969	9.7435	9.5937	9.4867	9.1875	8.9711
	c_2	9.8985	9.9594	9.7971	9.9378	9.5942	9.9470
	k_1	3006.3	3006.4	3012.6	3012.7	3025.2	3025.3
	k_2	2989.1	2986.0	2978.2	2972.1	2956.5	2944.9

単位： $c_i(\text{tf} \cdot \text{sec}/\text{m})$, $k_i(\text{tf}/\text{m})$

更に、ノイズの卓越周期がモデルの固有振動数と異なるときについても同様に計算を行った。計算結果を省略するが、ホワイトノイズの時と同様パラメータの推定値に及ぼす影響は小さい。

5. 入力測定誤差の影響

(1) 理論式の誘導

入力として地震加速度を考える。地震加速度 $\ddot{y}_a(t)$ の真値を $\ddot{y}_a(t)$ 、測定誤差を $\Delta \ddot{y}_a(t) = \varepsilon_a \eta_a(t)$ とすると、 $\ddot{y}_a(t) = \ddot{y}_a(t) + \Delta \ddot{y}_a(t)$ と書くことができる。但し、 $\eta_a(t)$ は絶対値の最大値が1となる正規化されたノイズである。今、モデルの誤差、応答の誤差は無いものとする。しかし、解析は入力誤差を含んだ加速度波で計算を行うため、この誤差を含んでおり、またその結果を用いて同定を行うため未知パラメー

タ $\mathbf{X}$ の同定結果も誤差の影響を受けたものとなり、 $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \Delta \mathbf{X}^{(0)}$ と書くことができる。解析値はこのよう
な誤差を反映したものととして $\hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0 + \Delta \dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}} + \Delta \mathbf{X}^{(0)})$ と記すことができる。この場合式(4)の評価式は
次のように書くことができる。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i \in A} w_i \{ \ddot{u}_i - \hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0 + \Delta \dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}} + \Delta \mathbf{X}^{(0)}) \}^2 \right] dt \quad (19)$$

$\Delta \dot{\mathbf{y}}_0$ は誤差であるから、その影響は十分に小さいと仮定する。式(19)の $\hat{z}_i$ をTaylor展開を用いて

$$\begin{aligned} \hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0 + \Delta \dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}} + \Delta \mathbf{X}^{(0)}) &\approx \hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}}) + \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \dot{\mathbf{y}}_0} \Delta \dot{\mathbf{y}}_0 + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \dot{\mathbf{y}}_0} \Delta \dot{\mathbf{y}}_0 \\ &= \hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}}) + \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}_0} \varepsilon_0 \eta_0 + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \dot{\mathbf{y}}_0} \varepsilon_0 \eta_0 \\ &= \hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}}) + \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0} \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \Gamma_{j0} \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (20)$$

但し、 $\Gamma_{j0} = \frac{\partial X_j}{\partial \varepsilon_0}$ で入力誤差の感度である。

式(20)を式(19)に代入すると

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i \in A} w_i \{ \ddot{u}_i - \hat{z}_i(\dot{\mathbf{y}}_0, \bar{\mathbf{X}}) - \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0} \varepsilon_0 - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \Gamma_{j0} \varepsilon_0 \}^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i \in A} w_i \{ - \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \Gamma_{j0} \}^2 \right] dt \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)で ε_0^2 は誤差の最大値の2乗で常に正であり、その大きさは定まっていない。式(19)を最小とすること
は式(21)を最小とすることと等価であり、そのように Γ_{k0} を決定すればよい。必要条件は式(21)を
 Γ_{k0} で偏微分して

$$\frac{\partial J}{\partial \Gamma_{k0}} = \varepsilon_0^2 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i \left\{ - \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \Gamma_{j0} \right\} \left(- \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_k} \right) dt = 0 \quad (22)$$

上式を整理すると

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_k} \right) dt \right] \Gamma_{j0} = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i \in A} \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0} \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial X_k} \right) dt \quad (k=1, \dots, M) \quad (23)$$

右辺の $\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0}$ は次のようにして計算できる。誤差が混入した入力 $\dot{\mathbf{y}}_0(t) = \dot{\mathbf{y}}_0(t) + \varepsilon_0 \eta_0(t)$ による構造
物の応答は

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K} \mathbf{z} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{y}}_0 + \varepsilon_0 \eta_0) \quad (24)$$

であり、ここに $\mathbf{f}$ は $N \times 1$ のベクトルである。式(1)と対比すると $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{y}}_0 + \varepsilon_0 \eta_0)$ 。式(24)を ε_0 で偏微
分すると

$$\mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial \varepsilon_0} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \varepsilon_0} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varepsilon_0} = \mathbf{f} \eta_0 \quad (25)$$

を得る。上式を解くことにより式(23)の右辺 $\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \varepsilon_0}$ を計算することができる。式(23)は Γ_{j0} を未知数とする
線形連立方程式となり、容易に解くことができる。

(2) 例題

前節に誘導した理論を検証するため図-1のモ
デルを用いることとする。正規化された $\eta_0(t)$ は
図-2に示すバンドリミテッド・ホワイトノイズ
を用いる。入力波の誤差 η_0 の同定パラメータに対
する感度は表-7に示す通りである。入力波とし
て、El Centro波にその絶対値の最大値の5%、10%、

表-7 同定パラメータの入力ノイズに対する感度
(ホワイトノイズ)

$\frac{\partial c_1}{\partial \varepsilon_0}$	$\frac{\partial c_2}{\partial \varepsilon_0}$	$\frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_0}$	$\frac{\partial k_2}{\partial \varepsilon_0}$
-1.7749	0.59407	-66.060	64.423

単位： $\frac{\partial c_i}{\partial \varepsilon_0} (\text{tf} \cdot \text{sec}^3/\text{m}^2)$, $\frac{\partial k_i}{\partial \varepsilon_0} (\text{tf} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^2)$

20%となるように ε_a の値を調整したノイズを加えた波を用いた。そして、感度解析に基づく $\mathbb{X}$ の推定値と、文献(15)の同定手法に基づき得られた $\mathbb{X}$ の値を表-8に示す。両者の結果が比較的良好一致していることから、入力ノイズに対する未知パラメータの感度は精度がよいと言える。また、同定結果が真値と近いことから、ホワイトノイズが同定結果に与える影響は小さいことが判った。

表-8 感度からの推定値と同定結果との比較

		5 %		1 0 %		2 0 %	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
$\dot{y}_a$ に 誤 差	c_1	9.7338	9.7453	9.4675	9.5195	8.9351	9.1720
	c_2	10.089	10.134	10.178	10.351	10.356	10.997
	k_1	2990.1	2989.9	2980.2	2979.5	2960.4	2957.7
	k_2	3009.7	3009.7	3019.3	3019.4	3038.7	3038.0

単位： c_i (tf・sec/m), k_i (tf/m)

次に、モデルの非減衰時固有振動数と一致する卓越振動数を有する図-4に示すノイズを η_a として用いる。同定パラメータの入力波の誤差に対する感度は表-9に示す通りである。感度解析に基づく $\mathbb{X}$ の推定値と、文献(15)の同定手法に基づき得られた $\mathbb{X}$ の値を表-10に示す。入力誤差の同定パラメータに対する感度は、ノイズがホワイトノイズの場合に比べて大きな値になり、同定結果に及ぼす影響の大きいことを示している。

表-9 同定パラメータの入力ノイズに対する感度
(周波数特性を有するノイズ)

$\frac{\partial c_1}{\partial \varepsilon_a}$	$\frac{\partial c_2}{\partial \varepsilon_a}$	$\frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_a}$	$\frac{\partial k_2}{\partial \varepsilon_a}$
14.430	0.19548	503.23	-222.66

単位： $\frac{\partial c_i}{\partial \varepsilon_a}$ (tf・sec³/m²), $\frac{\partial k_i}{\partial \varepsilon_a}$ (tf・sec²/m²)

表-10 感度からの推定値と同定結果との比較

		5 %		1 0 %		2 0 %	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
$\dot{y}_a$ に 誤 差	c_1	12.164	13.972	14.329	20.436	18.658	35.809
	c_2	10.117	9.6962	10.659	9.8036	10.117	19.502
	k_1	3075.5	3079.6	3151.0	3162.9	3301.9	3373.6
	k_2	2966.6	2940.4	2933.2	2850.5	2866.4	2647.4

単位： c_i (tf・sec/m), k_i (tf/m)

6. 結論

構造同定において、モデルパラメータ誤差、測定ノイズがパラメータの推定値に及ぼす影響(感度)を求める式を誘導した。同定問題は一種の最適化問題であり、パラメータの誤差やノイズに対する感度は最適解の感度と基本的には同じである。

以上の計算結果から次のようなことが言える。

- (1)測定ノイズに比べ、モデルパラメータ誤差が推定値に及ぼす影響は大きい。また、感度から誤差の推定値に及ぼす影響を精度良く計算できる。
- (2)ノイズの特性が有る無しに関わらず本手法は適用できる。
- (3)応答及び入力ノイズの卓越振動数が構造系の固有周期と一致する場合、ノイズがパラメータの推定値に及ぼす影響は大きい。しかし、ノイズがホワイトノイズの場合、または、ノイズの卓越振動数が構造

系の固有振動数と一致しない場合、その影響は小さい。

(4)全ての例題では1ヶ所だけ誤差あるいはノイズがある場合を考えている。全てのモデル誤差、測定ノイズが存在する場合、相乗作用により真値より大きく推定値が外れる可能性がある。

推定値と同定結果が真値に対し、一方が大きく、他方が小さいという矛盾する結果もあるが、これは感度が特に小さいときであり、積分に台形公式を用いていることも含め、計算誤差の影響と考えられる。また、減衰の推定値が悪いのは、剛性と比べてオーダーがかなり小さいことも起因している。最適設計で考慮されているようにパラメータの大きさをバランスしたり、変数変換の手法を導入することにより精度の向上が期待できる¹⁶⁾。

また、変位が測定されると考え、応答変位と解析変位を用いて同定すると、推定精度が向上するという結果を得ている。本研究ではノイズを一波だけ用いているが、ノイズを色々変え感度を計算しても、2自由度系では差程大きな違いはない。

本研究では、誤差及びノイズに対する未知パラメータの感度を、パラメータの真値 $\bar{x}$ のまわりでTaylor展開し誘導している。通常、真値は不明であるが、誤差やノイズが混入したデータを用いた同定結果の値を $\bar{x}$ と考えることにより、前述の全ての理論式を適用することができる。

謝辞

本研究は、東京電機大学総合研究所プロジェクト90Q267の一部として行ったものです。関係者各位に感謝致します。

参考文献

- 1) Udwadia, F.E., Sharma, D.K. and Shah, P.C. : Uniqueness of damping and stiffness distribution in the identification of soil and structural systems, Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.45, pp181~187, 1978.
- 2) Béliveau, J.G. : Parameter estimation from non-normal modes of soil-structure interaction, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.23, No.1, pp41~51, 1977.
- 3) Beck, J.L. and Jennings, P.C. : Structural identification using linear model and earthquake records, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, pp.145~160, 1980.
- 4) McVerry, G.H. : Structural identification in the frequency domain from earthquake records, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, pp.101~180, 1980.
- 5) 沢田 勉, 辻原 治, 阿世賀 宏, 神谷 宏 : せん断型線形多自由度系の同定問題の周波数領域における解析法に関する一考察, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.739~748, 1986年3月.
- 6) 花田和史, 安藤幸治, 岩楯勲広, 沢田義博 : 動的荷重を受ける系の系定数同定法, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.725~738, 1986年3月.
- 7) Simonian, S.S. : Inverse problems in structural dynamics -I. Theory, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.357~365, 1981.
- 8) Distefano, N. and Rath, A. : System identification in nonlinear structural seismic dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.5, pp.353~372, 1975.
- 9) Simonian, S.S. : Inverse problems in structural dynamics -II. Applications, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.367~386, 1981.
- 10) Distefano, N. and Dena-Pardo, B. : System identification of frames under seismic loads, Proceedings of ASCE, Journal of Engineering Mechanics, Vol.102, No.FM2, pp.313~330, 1976.

- 11) Shah, P.C. : A methodology for optimal sensor locations for identification of dynamic systems, Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.45, pp.188~196, 1978.
- 12) 星谷 勝, 齊藤悦郎 : 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文報告集 No. 334/I-1, pp. 289~298, 1984年4月.
- 13) 星谷 勝, 齊藤悦郎 : 常時微動記録を用いたEK-WG1法による建物の動特性の推定, 土木学会論文報告集, No. 350/I-2, pp. 263~270, 1984年10月.
- 14) 丸山 収, 齊藤悦郎, 星谷 勝 : 移動荷重－はり系の動特性推定, 土木学会論文集, No. 368/I-5, pp. 283~292, 1986年4月.
- 15) 松井邦人, 栗田哲史 : 応答加速度波を用いた構造特性の同定, 構造工学論文集, Vol. 35A, pp. 689~698, 1989年3月.
- 16) 山田善一 編 : 構造システムの最適化 ～理論と応用～, 構造工学シリーズ1, 土木学会, 1988年9月
- 17) 菊田征勇, 松井邦人, 新延泰生 : 動的領域における構造物の感度解析, 構造工学論文集, Vol. 33A, pp. 703~714, 1987年3月.

(1990年10月12日受付)