

TMD の設計における実用算定式

PRACTICAL FORMULAS FOR ESTIMATING DESIGN PARAMETERS OF TMD

堀内 博* 藤澤 伸光** 津村 直宜***

By Hiroshi HORIUCHI, Nobumitsu FUJISAWA and Naoyoshi TSUMURA

Optimum parameters of tuned mass damper (TMD) given by Den Hartog are not always suitable for the practical design, since these parameters usually contain manufacturing or measurement errors, and/or the mass stroke is often limited to a specified value. This paper presents practical formulas for estimating equivalent damping and mass stroke of TMD. These formulas consisting of design parameters of TMD, i.e. mass ratios, frequency ratios and damping of devices were derived from regression analysis based on the data of numerical solutions of 2-DOF equation. Finally, the influence of parameter errors and allowable mass stroke on minimum mass ratio was examined by mean of the formula presented in this paper.

1. まえがき

近年、橋梁や建築物では軽量化、長大化あるいは高層化が進み、それゆえ可撓性に富むものが多くなってきた。そのため、風による有害な振動が問題となるケースが増えてきており、設計技術者にとっても制振の問題が重要な関心事として捉えられるようになってきている。これまで、本四連絡橋に代表される長大橋主塔では種々の制振対策が実施されてきたが、ここ数年来、TMDによる工法が主流となっている^{1)~4)}。

TMDの制振効果はその重量、振動数および減衰によって変化することは良く知られており、TMDの設計とはとりもなおさずこれらの最適値を求めることである。理想的なTMDにおいて、制振効果を最大とする振動数と減衰は Den Hartog の教科書などで周知の通りである。しかしながら、実際の装置では、様々な誤差要因によりTMDの振動数や減衰を常に最適な状態に保つことが困難なため、設計パラメータにはある程度の許容誤差を見込む必要がある。また、構造物の設置スペースの関係からTMDの振幅が一定の値以下に制限されることも多く、このような場合には制振効果を最大にする設計パラメータが工学的に常に最適であるとは限らない。実際の設計ではこれらの誤差要因や制約条件を考慮した上で、要求される制振効果を満足しかつ重量が最小となるようなパラメータを定める必要があるが、設計の度に運動方程式を解いてこれを求めるのは非常に複雑な作業となる。

*工修 NKK 橋梁建設部橋梁設計室 (〒230 横浜市鶴見区末広町2丁目1番地)

**工博 NKK 応用技術研究所耐風構造研究室 (〒210 川崎市川崎区南渡田町1-1)

***工修 NKK 応用技術研究所耐風構造研究室 (〒210 川崎市川崎区南渡田町1-1)

本論文は、このような問題を解決するための一手法として、各種の設計パラメータに対するTMDの制振効果と振幅を、実用上十分な精度で推定できる実用算定式を提案するものである。さらに、本研究ではこの実用算定式を組込んだ最小重量算定プログラムを作成し、パラメータの誤差要因やTMDの振幅制限がTMDの所要重量に及ぼす影響を調べたのでその結果を報告する。

2. 従来の設計法

TMDの設計は、通常、制振対象モードとTMDからなる2自由度モデル(図1)を仮定して行なわれる。この際、構造物を多自由度モデルとして取り扱うべきではないかという議論もあるが、TMDの質量が著しく大きい場合や、制振対象モードに近接根が存在する場合を除いて特に問題にはならない。2自由度系の運動方程式の一般形は次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} M_1 + \phi^2 M_2 & \phi M_2 \\ \phi M_2 & M_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $q_1(t)$ 、 M_1 、 C_1 、 K_1 は、それぞれ主系の対象とするモードの一般化座標、一般化質量、一般化減衰および一般化剛性を表わし、 $q_2(t)$ 、 M_2 、 C_2 、 K_2 は、それぞれTMDの変位、質量、減衰および剛性を表わす。また、 ϕ はTMD取付け点における主系のモード振幅、 $F(t)$ は一般化外力、 $\dot{\cdot}$ は時間微分を表わす。

式(1)において、 $q_i(t) = A_i \cdot \exp(ipt)$ ($i=1, 2$)と置いて定常解を求めるとともに、以下に示す無次元パラメータを導入することによって、主系の一般化座標 $q_1(t)$ に対する周波数応答解 $H(\beta)$ は、式(2)のように表わされる。

$$\begin{aligned} \mu &= M_2 \phi^2 / M_1 : \text{有効質量比} \\ \alpha &= f_2 / f_1 : \text{振動数比} \\ \beta &= p / f_1 : \text{外力振動数比} \end{aligned}$$

ただし、 f_1 、 f_2 、 p は、それぞれ制振対象モードの振動数、TMDの振動数および調和外力の振動数である。

$$H(\beta) = A_1 / A_{st} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + i 2h_2 \alpha \beta}{\{1 - \beta^2(1 + \mu) + i 2h_1 \beta\} \{\alpha^2 - \beta^2 + i 2h_2 \alpha \beta\} - \mu \beta^4} \quad (2)$$

$$A_{st} = F / \{M_1 (2\pi f_1)^2\}$$

ここで、 h_1 : 制振対象モードの減衰定数
 h_2 : TMDの装置の減衰定数
 i : 虚数単位

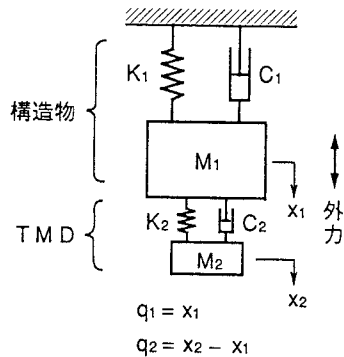


図1 力学モデル

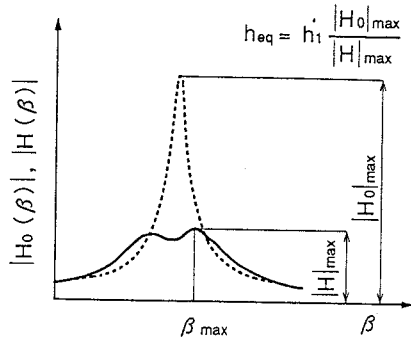


図2 みかけの減衰の定義

TMDの制振効果は、2自由度系を1自由度系とみなした場合のみかけの減衰定数 h_{eq} として、無制振時の周波数応答関数の最大値 $|H_0|_{max}$ と、 $H(\beta)$ の最大値 $|H_{max}|$ の比 (図2参照) に制振対象モードの固有減衰 h_1 を乗じて次のように定義できる。

$$h_{eq} = h_1 \cdot \frac{|H_0|_{max}}{|H|_{max}} \quad (3)$$

このときのTMDの応答は、構造物のTMD取付け点の振幅との比をとることによって次式のように無次元化する。

$$\zeta = \left| \frac{A_2}{\phi A_1} \right| = \left| \frac{\beta_{max}^2}{\alpha^2 - \beta_{max}^2 + i 2h_2 \alpha \beta_{max}} \right| \quad (4)$$

なお、本論分では以下減衰パラメータを表記するのに、減衰定数 h_{eq} , h_1 , h_2 に代って、これらの値に 2π を乗じた値 δ_{eq} , δ_1 , δ_2 を用い、それらを対数減衰率と呼ぶ。これは、もっぱら耐風工学における減衰表記の慣用に従う便宜的な処置である。

さて Den Hartog によれば、主系の減衰が無い場合には式(2)において最大の制振効果を与える振動数比 α_{opt} 、TMDの減衰 δ_{2opt} およびそのときの制振効果としての見かけの減衰 δ_{eq} は、任意の有効質量比 μ に対して次式のように与えられる⁵⁾。

$$\alpha_{opt} = 1 / (1 + \mu) \quad (5)$$

$$\delta_{2opt} = 2\pi \sqrt{3\mu / 8(1 + \mu)^3} \quad (6)$$

$$\delta_{eq} = \pi \sqrt{\mu / (2 + \mu)} \quad (7)$$

耐風性が問題となるような構造物の減衰は一般に十分小さいことから、理論的にはこれらの値を用いてTMDの設計を行うことが可能である。しかしながら、実際の装置ではTMDの振動数や減衰を決めるばねやダンパーなどの機械要素に製作誤差があり、また、主系の振動数の推定値にも誤差があることから、現実の設計ではこのような誤差要因を考慮する必要がある。その場合、設計パラメータは最適値からずれるので、制振効果も式(7)で得られる値とは異なったものになる。また、振動数や減衰を意図的に最適値からずらし使用することも考えられる。このように実際には式(5)～(7)を用いた設計が可能となる例は稀といえる。

このような因子を考慮した現実的な設計法のひとつに制振効果とTMDの振幅を表わすチャートを用いる方法がある。すなわち、予め制振効果やTMDの振幅を式(2)～(4)から求め、図3に示すような任意の有効質量比 μ における制振効果 (見かけの対数減衰率 δ_{eq}) とTMDの相対振幅 ζ を振動数比 α とTMDの減衰 δ_2 をパラメータとする等高線で表わしておき^{3), 6)}、その図上で様々な制約条件を満足し、かつ重量が最小となるような設計パラメータを試行錯誤によって求める。

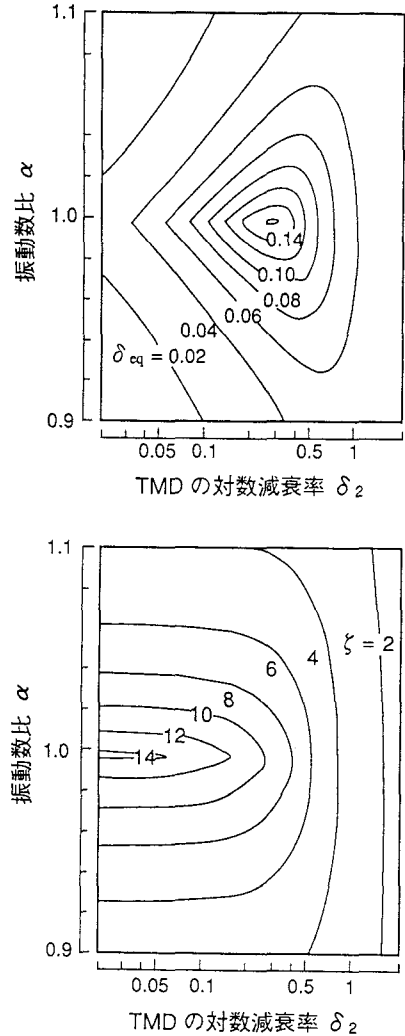


図3 TMDの制振効果と相対振幅の等高線 ($\mu=0.005, \delta_1=0.01$)

3. 実用算定式の提案

見かけの対数減衰率 δ_{eq} と TMD の相対振幅 ζ を、式(3)、(4)から算出するためには、式(2)の周波数応答関数の最大値 $|H|_{max}$ と、これを与える外力振動数比 β_{max} を数値的に求める必要がある。図3の等高線を描くには、この計算を α と δ_2 のマトリクス上で行なう必要があり、さらに実際の設計ではこのような等高線を複数の有効質量比 μ について用意しなければならないので、能力が向上したとはいえパソコン程度で計算を行なうことは容易でない。また、 δ_{eq} を求めるために式(3)～(5)を用いるのではなく、式(1)の複素固有値を直接計算する方法もあるが、数多くの μ 、 α 、 δ_2 の組合せに対して複素固有値計算を行なう必要があるため、作業量としてはほとんど同様である。

このような状況において、設計パラメータ μ 、 α 、 δ_2 の任意の組合せに対して、見かけの減衰 δ_{eq} と TMD の相対振幅 ζ を比較的簡単な近似式で計算することができれば、設計に要する時間を大幅に短縮することが可能である。そこで、式(3)～(5)の数値解に対して回帰分析を行い、これらの近似式を導いた。

はじめに、TMDの振動数比を α_{opt} としたときの算定式を示す。ここで、回帰計算は、

$$\begin{aligned} 1 < \delta_2 / \delta_{2opt} < 3 \\ 0.002 < \mu < 0.02 \end{aligned}$$

の範囲で行っている。TMDの減衰を δ_{2opt} 以上としたのは、これよりも小さい領域では振動数比のずれに対する制振効果の低下割合が非常に大きく、この領域での設計が現実的でないからである。なお、本論文では独立時の主塔を対象とするTMDの設計を念頭に置いて、以下の計算では全て主系の対数減衰率を $\delta_1 = 0.01$ とした。

見かけの対数減衰率

$$\delta_{eq}(\mu, \delta_2) = 2\pi \cdot \mu^{0.878} \cdot a^A \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a &= 4.5\sqrt{\mu} \quad (\delta_{2opt} < \delta_2 < 4.5\sqrt{\mu}) \\ &\delta_2 \quad (4.5\sqrt{\mu} \leq \delta_2) \\ A &= -(0.84 + 2\pi\mu) \end{aligned}$$

TMDの相対振幅

・ $\delta_{2opt} < \delta_2 < 5\sqrt{\mu}$ の場合

$$\zeta(\mu, \delta_2) = \pi / 3 \cdot \mu^A \cdot \delta_2^B \quad (9)$$

ここで、 $A = -1/\pi$

$$B = -(0.4 + 2\pi\mu)$$

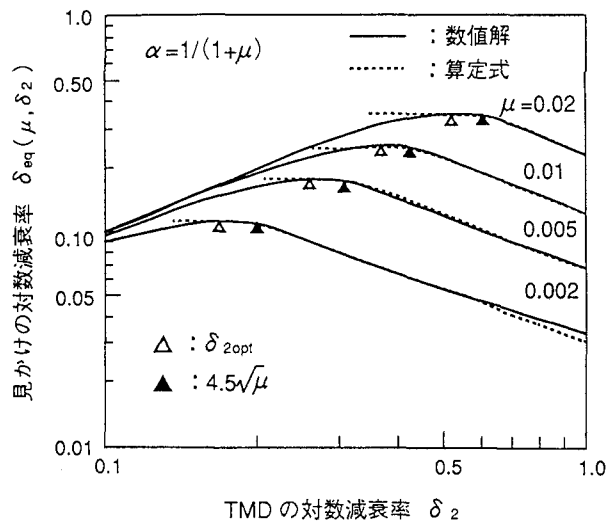


図4 制振効果と TMD の減衰の関係

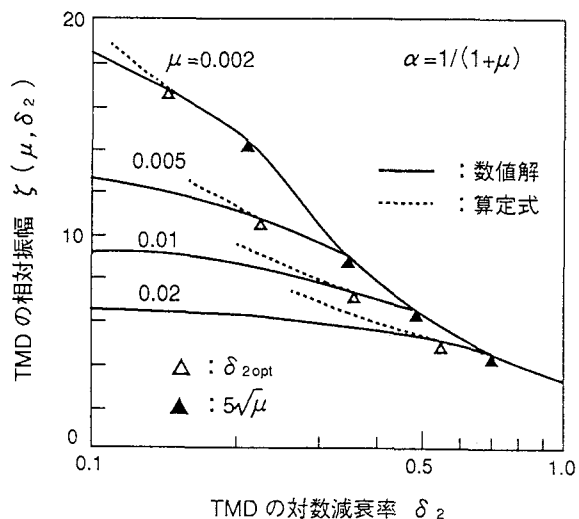


図5 相対振幅と TMD の減衰の関係

・ $5\sqrt{\mu} \leq \delta_2$ の場合

$$\zeta(\delta_2) = \pi / \delta_2 \quad (10)$$

図4は、TMDの減衰と見かけの減衰との関係を示したもので、図中の実線は、式(2)、(3)から求めた数値解である。有効質量比にかかわらず $\delta_2 = 4.5\sqrt{\mu}$ (図の▲印)を境にして曲線の傾向が変わり、 $\delta_{2opt} < \delta_2 < 4.5\sqrt{\mu}$ では見かけの減衰が δ_2 によらず一定となる傾向が見られる。図5は、TMDの減衰と振幅との関係を示したものである。実線で示した数値解によれば $5\sqrt{\mu} \leq \delta_2$ ではTMDの振幅は有効質量比によらず概ね δ_2 だけの関数とみなし得る。このような特性から、図の破線で示した算定式は見かけの減衰とTMDの振幅に対し、それぞれ $\delta_2 = 4.5\sqrt{\mu}$ と $\delta_2 = 5\sqrt{\mu}$ で場合分けすることにより、徒に式を複雑化することなく、数値解に対して良い近似を得ることができた。

次に、振動数比 α もパラメータに含めた算定式を示す。回帰計算の範囲は $0.9 < \alpha < 1.1$ である。

見かけの対数減衰率

$$\delta_{eq}(\mu, \delta_2, \alpha) = 2\pi \cdot \mu^{0.373} \cdot a^A \cdot \exp\{-B \cdot |\alpha - 1| / (1 + \mu)^{|C|}\} \quad (11)$$

ここで、 $a = \begin{cases} 4.5\sqrt{\mu} & (\delta_{2opt} < \delta_2 < 4.5\sqrt{\mu}) \\ \delta_2 & (\delta_2 \geq 4.5\sqrt{\mu}) \end{cases}$

$$A = -(0.84 + 2\pi\mu)$$

$$B = \pi^2(1 + \delta_2) / 1.3$$

$$C = \pi\sqrt{\delta_2} / \{2(1 + 2\pi\mu)\}$$

TMDの相対振幅

$\delta_{2opt} < \delta_2 < 5\sqrt{\mu}$ の場合

$$\zeta(\mu, \delta_2, \alpha) = \pi / 3 \cdot \mu^A \cdot \delta_2^B \cdot \exp\{-C \cdot |\alpha - 1| / (1 + \mu)^{|D|}\} \quad (12)$$

ここで、 $A = -1/\pi$

$$B = -(0.4 + 2\pi\mu)$$

$$C = 4\pi / \{1 + \pi(1 + \mu)\delta_2^2\}$$

$$D = 0.9 + \pi\sqrt{\mu} / 2\alpha$$

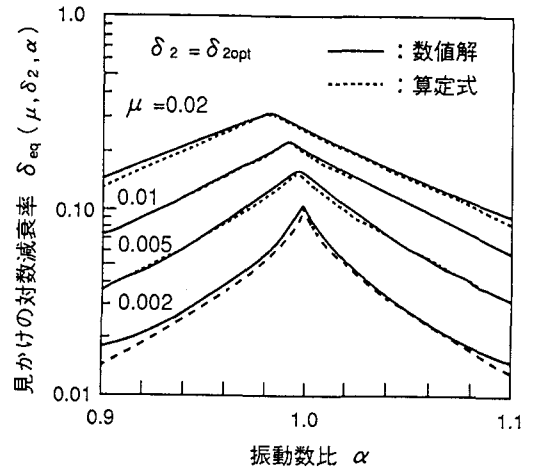


図6 制振効果と振動数比の関係

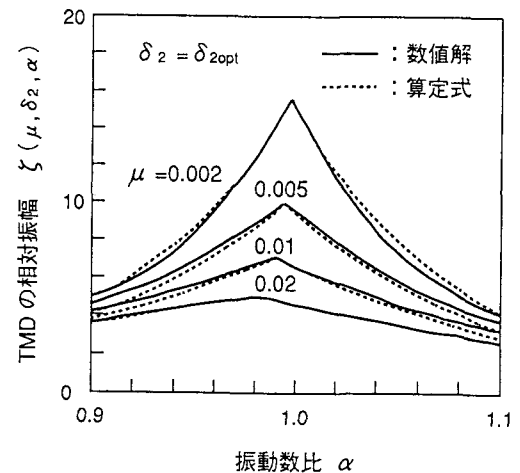


図7 相対振幅と振動数比の関係

$\delta_2 \geq 5\sqrt{\mu}$ の場合

$$\zeta(\mu, \delta_2, \alpha) = \pi / \delta_2 \cdot \exp\{-E \cdot |\alpha - 1| / (1 + \mu)^{|F|}\} \quad (13)$$

ここで、 $E = 4\pi / (1 + \delta_2^2)$

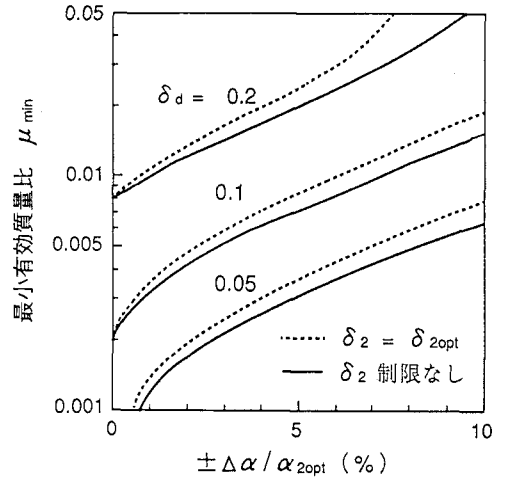
$$F = 1 + (\delta_2 / \alpha)^2$$

図6、7は、それぞれ見かけの減衰とTMDの振幅を振動数比に対して示したものであり、実線が数値解、破線が算定式の結果を表す。両者は比較的良好に一致しており、この算定式は実用上十分な精度を有していると考えられる。

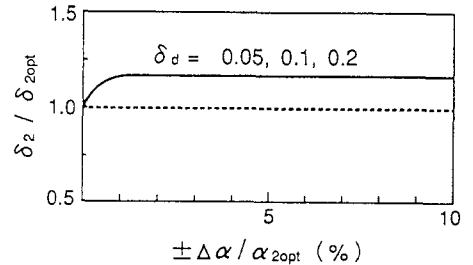
4. 最小有効質量比に及ぼす各種パラメータの影響

TMDの設計では、要求される条件を満たした上で、TMDの重量を最小化することが重要な課題となる。ここでは、実用算定式を用いて任意の振動数比やTMDの減衰、およびTMDの許容振幅に対し主系に要求される対数減衰率 δ_d （以下では、これを要求制振率と呼ぶ）を与える最小の有効質量比 μ_{min} を求めるプログラムを作成し、各設計パラメータが最小重量に及ぼす影響を調べた。計算にあたっては、主系における付加減衰と応答振幅の関係を予め求めておく必要がある。対風応答の制振を考える場合、厳密には風洞実験によって振幅 y と減衰 δ の関係を求めるべきであるが^{7)・3)}、ここでは簡単に振幅は減衰に反比例するものとした。

図8(a)は、TMDの振動数比 α が、 α_{opt} から $\pm\Delta\alpha$ だけずれた場合に要求制振率 δ_d を満たす最小の有効質量比 μ_{min} を求めたものである。図の破線はTMDの減衰を式(7)で与えられる δ_{2opt} に固定したときのものであり、実線はTMDの減衰を固定せずに最適計算を行ったときのものである。図から、振動数比が最適値からずれた場合には、TMDの減衰を式(7)で与えられる δ_{2opt} に設定すると、要求制振率を満たす最小有効質量比が増加することがわかる。換言すれば、最小有効質量比という観点からは、 $\alpha \neq \alpha_{opt}$ の場合、 δ_{2opt} は最適値とはならない。図8(b)は同様に、 α が最適値からずれた場合に、最小の μ を与える δ_2 を求めたものである。図から明らかなように、 $\Delta\alpha/\alpha_{opt} \geq 1\%$ の場合、 δ_2 は要求制振率の値によらずほぼ一定値となる。このことは、現実のTMDの設計において非常に重要であり、振動数比を1%以下の精度で調整することが非常に困難なため α が最適値からずれることが不可避な実際のTMDでは、減衰 δ_2 として $1.2 \cdot \delta_{2opt}$ を用いればほぼ最適設計となることを意味する。また、このときの最小有効質量比は以下に示す式で近似的に求めることができる。



(a) 最小有効質量比



(b) TMDの最適減衰

図8 振動数誤差の影響

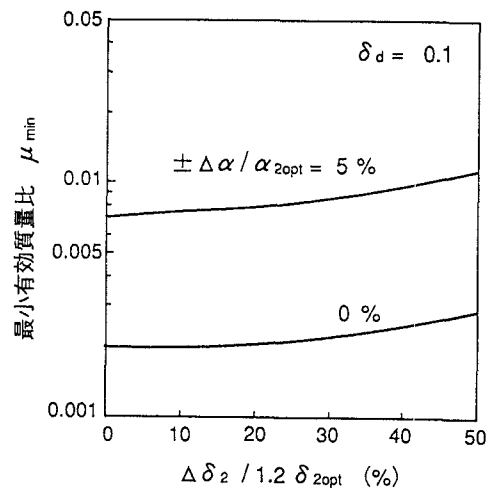


図9 減衰誤差の影響

$$\mu = 2(\Delta\alpha / \alpha_{opt} + 0.01) \delta_d^{1.2} \quad (14)$$

図9は、TMDの減衰 δ_2 が、先に述べた最適減衰 $1.2 \cdot \delta_{2opt}$ から $\Delta\delta_2$ だけずれた場合に要求制振率を満たす最小の有効質量比を求めたものである。図で示されるように、 δ_2 が最適値からずれると最小有効質量比は増加するが、増加の割合は振動数比の場合に比べて大きくない。しかしながら、現在使用されている減衰要素の中には非線形性や温度依存性が大きいものも含まれ、それらに対しては設計上許容誤差の範囲を大きく見込む必要があるので、減衰要素の選定にあたっては、最小有効質量比に及ぼす影響について留意する必要がある。

図10(a)は、TMDの振幅が制限される場合の最小有効質量比を示したものである。ここで、 γ は次のような振幅制限の程度を示す指標である。

$$\gamma = y_0 / a_{2d} \quad (15)$$

ここで、 y_0 ：無制振時における主系の振幅

a_{2d} ：TMDの許容振幅

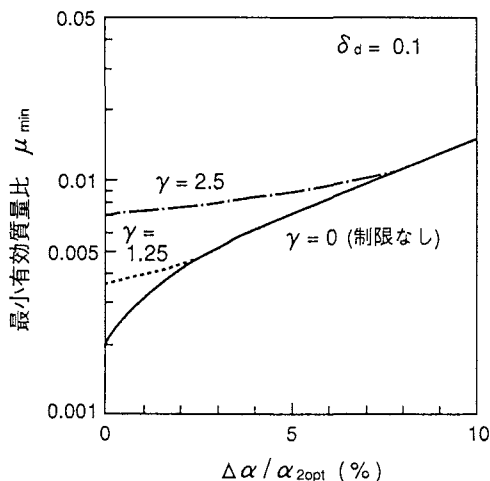
図において、 γ の値が大きくなるに従い、振幅制限は厳しくなることを示している。当然ながら振幅制限が無いとき（ $\gamma=0$ ）に比べ、破線で示される振幅制限があるとき（ $\gamma=1.25, 2.5$ ）の最小有効質量比は大きくなる。ただし、振動数のずれ $\Delta\alpha$ が大きくなるに従い、 $\gamma=0$ の場合に漸近する。すなわち α に対して大きな許容誤差を設定し、相対的に大

きな質量比とする設計では振幅制限の影響は小さくなり、逆に精密なチューニングを前提とした設計ではTMDの振幅が設計における支配要因となりがちである。図10(b)は、このときのTMDの最適減衰であるが、最小有効質量比が振幅制限で決まる範囲では $1.2 \cdot \delta_{2opt}$ よりもさらに大きな値となる。実際の設計では、TMDの振幅制限から有効質量比が決められるケースも多いため、式(14)のような最小有効質量比の簡易算定式をここでも導くことができれば有益と考えられるが、TMDの振幅制限を適当な無次元パラメータに置き換えることが難しいため、現在ではまだそのような算定式を得るには至っていない。

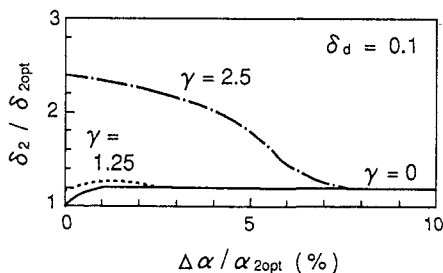
5. まとめ

本論文では、TMDの主要な設計パラメータ、即ち、有効質量比、振動数比およびTMDの減衰に対して、TMDの制振効果と振幅を比較的容易に求められる実用算定式を提案した。この実用算定式は、実用上十分な精度をもつものであり、複雑な計算を必要とするTMDの最適設計を大幅に簡素化できるものとする。

この実用算定式を用いた最小重量決定プログラムによって、設計パラメータの誤差要因やTMDの振幅制限がTMDの所要重量に及ぼす影響を調べた結果、以下のような知見が得られた。



(a) 最小有効質量比



(b) TMDの最適減衰

図10 振幅制限の影響

- (1) 振動数の許容誤差を考慮すると TMD の最適減衰は Den Hartog が与えた最適値の約 1.2 倍となり、そのときの最小有効質量比は式 (14) で近似的に表わされる。
- (2) TMD の減衰が最小有効質量比に及ぼす影響は比較的小さいが、非線形性や温度依存性が大きい減衰要素を使用する場合には注意する必要がある。
- (3) TMD の振幅制限が設計上の支配的要因となる場合には、最小有効質量比を与える TMD の最適減衰は (1) で述べた値よりもさらに大きくなる。

実際の設計では、TMD の振幅制限から有効質量比が決ることも多く、このようなケースについても最小有効質量比や最適減衰の算定式が得られれば TMD の設計上有効と考えられるので、今後さらに研究を進めていく予定である。

参考文献

- 1) 辻：構造力学的耐風制振対策，日本風工学会誌，第 20 号，1984
- 2) 岡・辻・加納・津村：橋梁の架設時耐風制振法，日本鋼管技報，No. 109，1985
- 3) 川人・辻・加納・津村：名港西大橋の塔の動吸振器方式耐風制振装置，第 8 回風工学シンポジウム論文集，1984
- 4) 津村・金沢・加納：櫃石島橋主塔の耐風制振装置，土木学会第 41 回年次学術講演会講演概要集，I-315，1986
- 5) デンハルトック（谷口・藤井共訳）：機械振動論，コロナ社，1960
- 6) 寺元・佐野・長井・奥井：花畔大橋（斜張橋）主塔の TMD による制振対策，土木学会構造工学論文集，Vol. 36A，1990
- 7) 加納・辻・武田・津村：動吸振器をつけた 1:2 矩形断面の渦励振応答特性，土木学会第 41 回年次学術講演会講演概要集，1985
- 8) 藤澤・園部：橋桁の渦励振とその制振，橋梁と基礎，89-8，1989
- 9) 藤野：構造物の制振対策（土木分野），風工学会誌，第 44 号，1990

(1990 年 10 月 12 日受付)