

効率化モンテカルロ法による構造システムの信頼性評価法

A RELIABILITY EVALUATION METHOD OF STRUCTURAL SYSTEMS
USING EFFICIENT MONTE-CARLO SIMULATION TECHNIQUE

白木 渡*・松保重之**・山口和範***・高岡宜善****

By Wataru SHIRAKI, Shigeyuki MATSUHO, Kazunori YAMAGUCHI and Nobuyoshi TAKAOKA

For practical applications of the structural reliability theory it is necessary to have a method of reliability evaluation which is computationally efficient with the required degree of accuracy. In this paper, a practical reliability evaluation method of structural systems is proposed by using efficient Monte-Carlo simulation techniques. This proposed method is applicable to time-variant as well as time-invariant structural system reliability problems. A useful program system using this proposed method is developed. Numerical examples are presented to demonstrate the usefulness of this developed program package system.

1. まえがき

構造信頼性理論を実構造物の設計問題等に適用するためには、構造物の信頼度を簡単な計算手順でしかも短時間に精度よく評価できる手法を開発することが必要である。構造物の破壊確率を計算するための有効な手法の一つとしてモンテカルロ法があるが、破壊確率が小さい値のときには、精度よい結果を得るためにかなりの計算時間が必要になるという欠点がある。最近、このモンテカルロ法の欠点を補うための方法が研究され、効率化モンテカルロ手法として構造信頼性問題に適用されるようになってきている。

効率化モンテカルロ法による構造物の破壊確率の評価法の代表例として、importance sampling による評価法 ISPU (Importance Sampling Procedure Using Design Points)¹⁾、adaptive sampling による評価法 IFM (Iterative Fast Monte-Carlo Procedure)²⁾、さらに IFM 手法を拡張した評価法 IFMPUC (IFM Procedure Using Conditional Failure Probability)³⁾がある。この IFMPUC 法は本論文の第一著者の白木が開発した手法であるが、条件付き破壊確率を評価する際に破壊基準関数の形や数が限定されるという問題点を有していた。

本研究では、IFM や IFMPUC と複数の破壊基準関数を 1つの連続関数で近似できる RSM (Response Surface Method)⁴⁾を組合せることによって、破壊基準関数の形や数に制限されない、しかも時間に依存する信頼性問題にも適用可能な評価法を提案する。そして、数値計算例を示すことにより提案した方法の有効性を示す。

※	工博	鳥取大学助教授	工学部土木工学科	(〒 680	鳥取市湖山町南 4-101)
※※	工修	鳥取大学助手	工学部土木工学科	(〒 680	鳥取市湖山町南 4-101)
※※※	工修	本州四国連絡橋公団	本社 設計部設計二課	(〒 105	東京都港区虎ノ門 5-1-5)
※※※※	工博	鳥取大学教授	工学部土木工学科	(〒 680	鳥取市湖山町南 4-101)

2. 時間に依存しない構造システムの信頼性評価法

2. 1 I F M P U C 法による構造信頼性の評価

多くの構造信頼性問題において、破壊基準関数 $g(\underline{X})$ は、基本変数ベクトル $\underline{X}=(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$ の任意の1つの変数 X_i を用いて、次式で表すことができる。

$$X_i = g^{-1}(\underline{X}') \quad (1)$$

ここに、 $g^{-1}(\underline{X}')$ は $g(\underline{X})$ の X_i に関する逆関数で、基本変数ベクトル $\underline{X}'=(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ の各基本変数に関して連続な1価関数である。式(1)を用いると、 X_i を除くすべての他の基本変数がある与えられた値をとる、すなわち $\underline{X}' = \underline{x}'$ という条件のもとでの、条件付き破壊確率 $P_f^{\circ}(\underline{x}')$ は、次式となる。

$$P_f^{\circ}(\underline{x}') = 1 - F_{X_i|Y}(\xi_i | \underline{x}') \quad (2)$$

ここに、 $F_{X_i|Y}(\xi_i | \underline{x}')$ は、 $\underline{X}' = \underline{x}'$ という条件のもとでの X_i の条件付き累積分布関数である。

ただし、 $X_i = g^{-1}(\underline{X}')$ が $\underline{x}'$ の各変数に対して連続な1価関数でなく、多価関数であれば、式(2)の右辺の第2項は、その数だけ条件付き累積分布関数が増える。 X_i と $\underline{x}'$ が統計的に独立であると仮定すると、上述の条件付き累積分布関数は容易に求まるが、独立性が仮定できない場合には、Natafモデル⁵⁾を用いて評価する必要がある。Fig. 1 に、 $F_{X_i|Y}(\xi_i | \underline{x}')$ と $P_f^{\circ}(\underline{x}')$ との間の関係を、2次元で、しかも2価関数の場合について示す。

構造物の破壊確率 P_f は、式(2)で表される条件付き破壊確率 $P_f^{\circ}(\underline{x}')$ を用いて、次式で表される。

$$P_f = \int_{\text{all } \underline{x}'} P_f^{\circ}(\underline{x}') f_{\underline{x}'}(\underline{x}') d\underline{x}' \quad (3)$$

importance sampling 密度関数 $h_{\underline{x}'}(\underline{x}')$ を導入すれば、式(3)は次式のように書き換えられる。

$$P_f = \int_{\text{all } \underline{x}'} P_f^{\circ}(\underline{x}') \frac{f_{\underline{x}'}(\underline{x}')}{h_{\underline{x}'}(\underline{x}')} h_{\underline{x}'}(\underline{x}') d\underline{x}' \quad (4)$$

I F M P U C 法では、importance sampling 密度関数 $h_{\underline{x}'}(\underline{x}')$ は、破壊密度(failure density)として定義される $P_f^{\circ}(\underline{x}') f_{\underline{x}'}(\underline{x}')$ の中心を平均値とするように選ばれる。このようにすれば、破壊確率に最も貢献する領域の中心のまわりにサンプリングすることができ、非常に効率的になるからである³⁾。

さて、式(4)は次式により数値計算できる。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{\circ}(\underline{x}'_i) \frac{f_{\underline{x}'}(\underline{x}'_i)}{h_{\underline{x}'}(\underline{x}'_i)} \quad (5)$$

ここに、 N はシミュレーション数を表す。具体的な計算手順は文献3)を参照されたい。

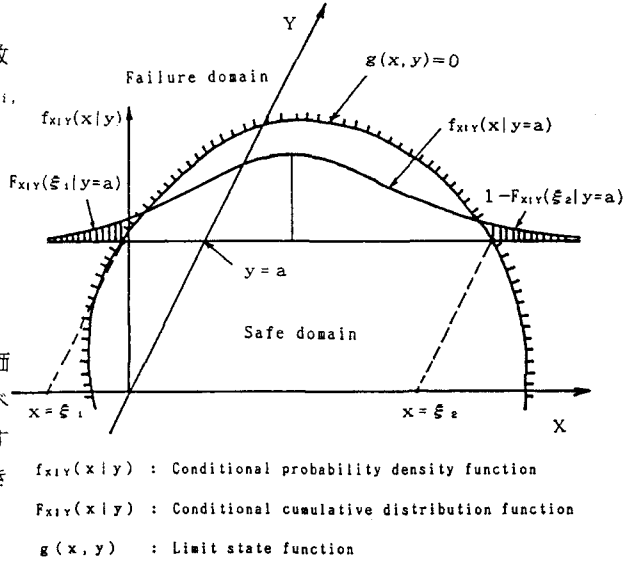


Fig. 1 Relation between Conditional Probability Function $F_{X_i|Y}(x|y)$ and Conditional Failure Probability $P_f^{\circ}(y)$

2. 2 I F M P U C 法と R S M 法を組合せた構造信頼性の評価

破壊モードの数が多い場合、また破壊面が $\underline{x}'$ の連続な 1 価あるいは 2 価関数程度で表せない場合には、条件付き破壊確率 $P_f^c(\underline{x}')$ の計算はかなりめんどようになる。しかしながら、破壊面が Fig. 2 に示すように 1 つの連続関数で表せれば、 $P_f^c(\underline{x}')$ の計算は簡単になる。破壊基準関数（応答関数）を近似する最も有効な手法の一つは、R S M 法⁴⁾である。

R S M 法では、破壊基準関数 $g(\underline{x})$ を計算が簡単化できる等価な関数 $\bar{g}(\underline{x})$ におきかえる。本研究では、 $\bar{g}(\underline{x})$ として次式で与えられる 2 次多項式を用いる。

$$\bar{g}(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (6)$$

ここに、 a_0, b_i, c_{ij} は偏微係数の値である。

Fig. 2 Schematic Representation of Actual Failure Surface and Response Surface

一般に、関数 $g(\underline{x})$ はある展開点（通常、変数 x_i の平均値 μ_i が用いられる）のまわりに 2 次の多項式 $\bar{g}(\underline{x})$ によって、次式のように近似される。

$$\bar{g}(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \quad (7)$$

ここに、 σ_i は変数 x_i の標準偏差である。

変数 $y_i = (x_i - \mu_i) / \sigma_i$, $y_j = (x_j - \mu_j) / \sigma_j$ を導入すれば、式(7)は次式で表せる。

$$\bar{g}(\underline{y}) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_i y_j \quad (8)$$

この関数の係数の決定を簡単に行うために、 $\bar{g}(\underline{y})$ を次式のように 2 つの関数 $\bar{g}_1(\underline{y})$, $\bar{g}_2(\underline{y})$ に分ける。

$$\bar{g}(\underline{y}) = \bar{g}_1(\underline{y}) + \bar{g}_2(\underline{y}) \quad (9)$$

ここに、

$$\bar{g}_1(\underline{y}) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i y_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} y_i^2 \quad (10)$$

$$\bar{g}_2(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 2 c_{ij} y_i y_j \quad (11)$$

式(10)および(11)から、係数の数は $(n+1)(n+2)/2$ であることがわかる。従って、 $\bar{g}(\underline{y})$ の内 $(n+1) \cdot (n+2)/2$ 個の値が与えられれば、内挿法により $\bar{g}(\underline{y})$ のすべての係数が決定できる⁴⁾。

3. 時間に依存する構造システムの信頼性評価法

3. 1 一般事項

多くの時間変動荷重の組合せ作用を受ける構造物が、与えられた供用期間中に破壊する確率を求める問題は、一般に非常に難しい。いま、構造物の強度が時間に依存しないと考えれば、この問題は構造物の供用期間 $[0, T]$ の間に次式で示される事象が生起する確率を評価する問題として定式化できる。

$$g_k[S_1(t), S_2(t), \dots, S_M(t), X_1, X_2, \dots, X_M] < 0 \quad (12)$$

ここに、 $g_k, k=1, 2, \dots, L$ は破壊規準関数； $S_i(t), i=1, 2, \dots, N$ は時間依存荷重あるいは荷重効果で、確率過程である；そして $X_i, i=1, 2, \dots, M$ は構造強度を表す確率変数である。このように定式化された問題は、一般に多次元のベクトル確率過程の初通過問題となり、解くのが非常に困難である。

しかし、ベクトル過程の期待横断率 α が評価され、さらにポアソン近似を用いることを許せば、この問題の近似解を次のように得ることができる^{6), 7)}。

$$P_f = 1 - \exp[-\alpha \cdot T] \quad (13)$$

従って、問題は α をいかに評価するかということになるが、本研究では、LC(Load Coincidence)法⁷⁾によって荷重組合せ解析を行い、効率化モンテカルロ法により荷重の同時発生確率を計算して、 α を求めることにする。

3. 2 時間変動荷重のモデル化

前述のように、作用荷重を確率過程と考え、それらの組合せ解析を解析的に行うことは非常に困難である。本研究では簡単のために、荷重の供用期間中の変動は準静的に変動するものとする。すなわち、時間変動荷重の供用期間中の変動をパルス過程 $S(t)$ としてモデル化し、その生起時間、継続時間および振幅は確率変数と考え、荷重生起時間はポアソン再生過程に従うと考える。さらに、荷重の振幅と継続時間は統計的に独立であると仮定する。そうすると、パルス過程は平均発生率 λ 、平均継続時間 μ_d および $f_x(x)$ の同時確率密度を有する振幅 x によって特徴づけることができる。

$\lambda \mu_d$ は、供用期間中に荷重が平均してどの程度の割合で作用しているかを表しており、0から1までの間の値をとる。過渡荷重は $\lambda \mu_d \ll 1$ である。 $\mu_d=0$ あるいは $\mu_d=1$ の2つの極端な場合は、それぞれポアソン・スパイク過程とポアソン長方形過程の場合に対応する。パルス過程の任意時点の値 S_i の確率密度関数は、 $S_i=0$ において $(1 - \lambda \mu_d)$ に集中質量を有する混合型の確率密度関数を有する。このような荷重モデルは、時間変動荷重の主な特徴を反映させた簡単で取り扱いやすいモデルである。

3. 3 LC法による荷重組合せ解析法

本研究では、多くの時間変動荷重を受ける構造システムの荷重組合せ解析を行うために、LC法を一般化している。式(13)における期待横断率 α は、個々の荷重およびそれらの組合せされた荷重による期待横断率の総和として近似される。これらの期待横断率は個々の荷重発生あるいは2つ以上の荷重の同時発生によって破壊が発生する条件付き確率とそれらの荷重の発生率との積で与えられる。

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \nu_i \cdot p_i + \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \cdot p_{ij} + \sum_{i \neq j \neq k} \sum_{k=1}^N \nu_{ijk} \cdot p_{ijk} + \dots \quad (14)$$

ここに、 ν_i は荷重 $S_i(t)$ の平均発生率； ν_{ij}, ν_{ijk} はそれぞれ荷重 $S_i(t)$ と $S_j(t)$ の2つの荷重の平均同時発生率、荷重 $S_i(t), S_j(t), S_k(t)$ の3つの荷重の平均同時発生率； p_i, p_{ij} および p_{ijk} は、荷重 $S_i(t)$ のみ、 $S_i(t)$ と $S_j(t)$ の2つの荷重、および $S_i(t), S_j(t), S_k(t)$ の3つの荷重がそれぞれ同時に作用することによって、与えられた限界状態を超える確率を示す。

式(14)は、簡単で、しかも実用問題に容易に適用できる。各荷重が独立で、ポアソン到着時間を有する場合には、 $\nu_i, \nu_{ij}, \nu_{ijk}$ は、荷重 $S_i(t)$ の平均発生率 λ_i と平均継続時間 μ_{di} を用いて、次式のように求めることができる。

$$\nu_i = \lambda_i \left[1 - \sum_{j \neq i}^N \lambda_j (\mu_{di} + \mu_{dj}) \right]$$

$$\nu_{ij} = \lambda_i \lambda_j (\mu_{di} + \mu_{dj}) \times \left[1 - \sum_{k \neq j \neq i}^N \lambda_k \mu_{dk} \right]$$

$$\nu_{ijk} = \lambda_i \lambda_j \lambda_k (\mu_{di} \mu_{dj} + \mu_{di} \mu_{dk} + \mu_{dj} \mu_{dk}) \times \left[1 - \sum_{l \neq i \neq j \neq k}^N \lambda_l \left(\mu_{dl} + \frac{\mu_{di} \mu_{dj} \mu_{dk}}{\mu_{di} \mu_{dj} + \mu_{di} \mu_{dk} + \mu_{dj} \mu_{dk}} \right) \right]$$

4. 数値計算例 (15)

2章および3章で示した効率化モンテカルロ法による構造システムの信頼性評価法の有効性を示すために数値計算を行う。計算例としては、Fig. 3に示されるような1層ラーメン構造システムに3つの時間変動荷重 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$ 、 $S_3(t)$ が作用する場合を考える。

この計算例における限界状態としては、崩壊メカニズム形成による限界状態を考える。ただし、崩壊メカニズムの形成は瞬時に行われ、各塑性ヒンジの発生順序は無視できると仮定する。この場合、Fig. 3に示す構造システムは、8つの崩壊メカニズムを形成する。各崩壊メカニズムに対する破壊基準関数はTable 1に示す。Table 1において、 M_1 、 M_2 はそれぞれ柱および梁の塑性モーメントである。この計算例では、荷重 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$ 、 $S_3(t)$ および塑性モーメント M_1 、 M_2 の5つを確率量として取り扱う。これらの確率特性については、Table 2にまとめて示す。

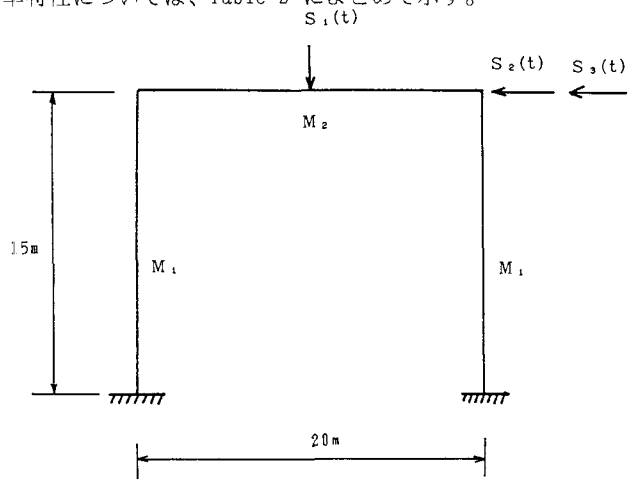


Fig. 3 1-Bay 1-Story Frame

Table 1 Limit State Function of Each Collapse Mechanism Mode

Mode No.	Limit state function
1	$4M_1 + 2M_2 - 10S_1 - 15(S_2 + S_3)$
2	$4M_1 - 15(S_2 + S_3)$
3	$2M_1 + 4M_2 - 10S_1 - 15(S_2 + S_3)$
4	$3M_1 + M_2 - 15(S_2 + S_3)$
5	$4M_2 - 10S_1$
6	$2M_1 + 2M_2 - 15(S_2 + S_3)$
7	$M_1 + 3M_2 - 10S_1$
8	$2M_1 + 2M_2 - 10S_1$

Table 2 Probabilistic Data of Basic Variable

Variable	Type	μ	σ	ν	μ_d
M_1	Normal	420 ton·m	63 ton·m	—	—
M_2	Normal	550 ton·m	82.5 ton·m	—	—
S_1	Normal	100 ton	10 ton	2 /yr	10^{-2} yr
S_2	Normal	50 ton	15 ton	0.5 /yr	10^{-2} yr
S_3	Normal	50 ton	20 ton	0.1 /yr	5×10^{-3} yr

まず、3章で示した式(14)における条件付き破壊確率 P_i , P_{ij} , P_{ijk} を、2章で示した構造信頼性評価法、すなわちIFMとRSM+IFMPUCの2つの方法によって計算し、それらをもとにして求めた期待横断率 α の計算結果を、それぞれTable 3 およびTable 4 に示す。これらの表より明らかなように、2つの評価法による結果はほぼ同じ結果を得ている。しかし、先の研究³⁾で示したように、IFM手法に比較してIFMPUC法による方が、小さい破壊確率の評価に際して、計算時間ならびに精度の点でより効率化をはかることができる。Tables 3 および 4で得られた結果の精度を検討するために、文献8)で示されている手法によりこの場合の厳密解を計算した。その結果は、 $\alpha = 0.00319$ である。これより、IFMならびにRSM+IFMPUCの2つの評価法により構造システムの破壊確率を評価しても、十分な精度の計算結果を効率的に得られることがわかる。

Table 3 Calculation Results of Plastic Collapse Failure Rate Using the LC Method and the IFM.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	λ_{123}	α
1.79	0.479	0.0962	0.0199	0.00073	0.00298	0.0002	0.00323
P_1	P_2	P_3	P_{12}	P_{23}	P_{13}	P_{123}	
0.000252	0.00293	0.00891	0.00624	0.278	0.0137	0.383	

Table 4 Calculation Results of Plastic Collapse Failure Rate Using the LC Method and the RSM+IFMPUC

λ_1	λ_2	λ_3	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	λ_{123}	α
1.79	0.479	0.0962	0.0199	0.00073	0.00298	0.0002	0.00332
P_1	P_2	P_3	P_{12}	P_{23}	P_{13}	P_{123}	
0.000255	0.00313	0.00922	0.00510	0.377	0.0131	0.351	

次に、Tables 3 および 4で得られた結果をもとに、式(13)により構造システムの供用期間 t (year) における信頼度 $1 - P_f$ を計算した結果をFig.4に示す。図において、実線は厳密解、破線はIFMによる解、一点鎖線はRSM+IFMPUCによる解である。これらの結果より、信頼度の計算においてもIFMおよびRSM+IFMPUCの評価法は十分よい近似を与えていることがわかる。

さて、ここで提案しているRSM+IFMPUCの評価法においては、条件付き破壊確率 p_i, p_{ij}, p_{ijk} の計算の際に、破壊面(failure surface)のかわりに応答面(response surface)を個々の場合について決定する必要がある。本研究では、この作業を自動的に行えるシステムを開発し、その結果を計算機の画面上に表示できるようにしている。Fig.5にその一例を示す。この図は、条件付き破壊確率 p_{123} を計算する際、 S_1, M_1 以外の全ての確率量はそれらの平均値をとるという条件のもとに描かれた $S_1 - M_1$ 平面上の破壊面とそれを近似した応答面を図示したものである。この図からは、8つの破壊モードに対応する破壊面を1つの応答面でうまく近似できているとは見えない。しかし、RSMによれば破壊確率に貢献する領域を選点して破壊面を近似するので、Tables 3 および 4で示した結果から明らかなように、破壊確率に影響を及ぼす領域を十分うまく近似した結果となっていることがわかる。

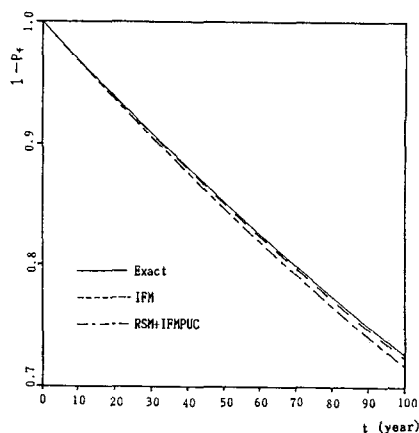


Fig. 4 Comparison of Calculation Results of Reliability

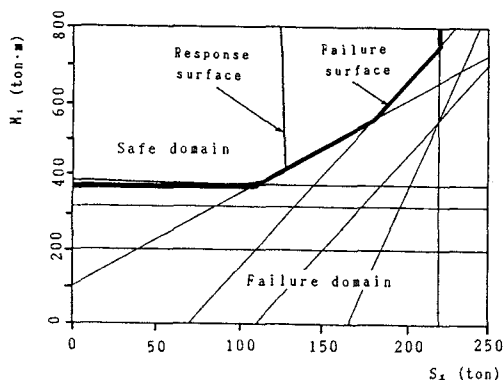


Fig. 5 Failure Surface and Response Surface on the S_1 - M_1 plane for $M_2=550\text{ton-m}$, $S_2=50\text{ton}$, $S_3=50\text{ton}$

5. あとがき

本研究においては、効率化モンテカルロ法による構造信頼性評価法 IFMPUC と多くの破壊基準関数を一つの関数で近似する RSM をうまく組合せて、一つの実用的な構造システムの信頼性評価法を提案した。この方法は、時間に依存しない構造信頼性問題のみならず時間に依存する構造信頼性問題にも適用可能である。この評価法をより一般的な問題に適用可能にするために、構造システムの信頼性評価システムとしてパッケージ化したプログラムシステムを開発している。

ここで提案した評価ならびにソフトウェア・パッケージの有効性を、3つの時間依存荷重を受けるラーメン構造物の信頼性解析の数値計算例により示した。計算例においては、取り扱った確率量は、いずれも正規分布で互いに独立としたが、ここで開発したプログラムシステムは、任意の個数の確率量が、任意の分布形状、相関性を有している場合に適用可能である。現在、複数の限界状態を有する構造システムの最適信頼性設計の研究に、この評価手法を適用することを検討中である。

謝 辞

本研究の一部は、第一著者（白木）が客員教授として9ヶ月間（昭和62年10月～昭和63年6月）インスブルック大学に滞在した際に行われたものである。その際、有益な御助言を賜った G. I. Schuëller 教授に厚くお礼申し上げる次第である。また、本研究の一部は文部省科学研究費の特定研究（平成2年度）の補助を受けて行われたものである。関係各位にお礼申し上げる次第である。

参 考 文 献

- 1) U. Bourgund and C. G. Bucher: Importance Sampling Procedure Using Design Points -ISPUD- USER'S MANUAL, Reports of Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, No.8-86, 1986-11.

- 2) C.G.Bucher: Adaptive Sampling-An Iterative Fast Monte-Carlo Procedure, Structural Safety, Vol.5, pp.119-126,1988.
- 3) 白木渡・G.I.Schuëller: 条件付き破壊確率を用いた繰り返し高速モンテカルロ法とその構造物の動的信頼度評価への応用, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.467-477, 1989年3月.
- 4) W.Ouypornprasert and C.G.Bucher: An Efficient Scheme to Determine Response Surface Functions for Reliability Analysis, Reports of Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, No.30-88, 1988-9.
- 5) P.-L.Liu and A.D.Kiureghian: Multivariate Distribution Models with Prescribed Marginals and Covariances, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.1, No2, pp.105-112, 1986.
- 6) Y.K.Wen, H-C.Chen: System Reliability Under Multiple Hazards, a Report to the National Science Foundation Research Grant DFR 8414284, pp.1-43, 1986-8.
- 7) Y.K.Wen: Method for Reliability of Structures under Multiple Time Varying Loads, Nuclear Engineering and Design 60, pp.61-71, 1980.
- 8) K.Breitung and R.Rackwitz: Nonlinear Combination of Load Processes, J.STRUCT.MECH., 10(2), pp.145-166, 1982.

(1990年10月12日受付)