構造工学論文集 Vol.37 A (1991年3月) 土木学会

総期待費用最小化原則に基づく最適安全性指標

OPTIMUM SAFETY INDICES BASED ON EXPECTED TOTAL COST MINIMIZATION

長 尚*
By Takashi CHOU

Optimum safety indices are presented, based on expected total cost minimization using only three parameters, which are the level of the failure cost to the initial cost, τ, the extent of increased initial cost by improvement in safety, ν, and the order of the initial cost function, n. By some numerical examinations, magnitudes of these parameters are discussed for the civil engineering design problems.

The optimum safety indices, which are shown by contour line graphs, three order equations and others, are considerably affected by τ, while the other two parameters give slight effects on them.

1. まえがき

総期待費用最小化原則に基づいて、個々の具体的な構造物の設計とか、設計法全体について、しばしば議論される。[1)2)3)] このような議論の是非について考えるためには、この原則に基づく設計の、最適な安全のレベルがどの程度の値で、それらはどのような要因によって、どのような影響を受けるかについて知ることがどうしても必要である。このようなことについて、数値的に明示するのが本文の目的である。従来この原則に基づく設計の問題は、初期費用を公称安全率もしくは設計用荷重の関数とし、破壊基準関数の強度項と荷重項を特定な確率分布に仮定して扱われている。[1)2)3)] そのために一般性のある結果が得られないばかりでなく、後述するように不適切な結論を得る可能性もある。

本文では、破壊確率を表に出さないで、安全性指標（信頼性指標）を用いて定式化している。さらに安全に余裕がない場合の初期費用を基本に用いて、すべての費用を無次元化し、かつ安全度の増加に伴う初期費用の増加割合という概念を導入して、初期費用を安全性指標の関数として、最適安全性指標を求めることとした。その結果、強度項と荷重項に特定な確率分布を仮定する必要はなくなり、しかも、この原則に基づく最適な安全のレベル、すなわち最適安全性指標が、数少ないパラメータのみによって決まることになり、簡単な図もしくは式で表現することが可能となった。

2. 定式化

* 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科 (〒380 長野市若里 500番地)

一般に総期待費用最小化の原則に基づく設計とは、次の式（１）の条件を満たす、最適破壊確率$p_{f,opt}$になるように、設計することを言う。

$$C_T\ (p_f) = C_I\ (p_f) + p_f\ C_F\ (p_f) \quad \rightarrow \min. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここに、C_Tは総費用、C_Iは初期費用（ただし保守費も含む）、C_Fは破壊損失費用、p_fは破壊確率である。

先ず初期費用C_Iはβのｎ次式で、次のように表わせるものとする。

$$C_I = C_{I,0}\ (1 + k\beta^n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここに、$C_{I,0}$はβ＝０の時の費用、つまり安全余裕がない場合の費用、ｋは常数である。このｋは、β＝５の時の費用、つまり破壊確率p_fが3×10^{-7}になるように安全余裕をとった場合（付記１参照）の費用である$C_{I,5}$の$C_{I,0}$に対する比であるυ、すなわち

$$\upsilon = C_{I,5} / C_{I,0} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

と次数ｎから決まるもので、次式で計算される。

$$k = (\upsilon - 1) / 5^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

次に破壊損失費用C_Fは初期費用C_Iのτ（常数）倍であるとして（付記２参照）、次のように表わす。

$$C_F = \tau C_{I,0}\ (1 + k\beta^n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

式（２）、（５）の関係と、

$$p_f = \Phi(-\beta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

で表わされる安全性指標βと破壊確率p_fの関係を用いると、式（１）は次のようになる。なおΦ（・）は標準正規分布関数である。

$$C_T\ (\beta) = C_{I,0}\ (1 + k\beta^n)\ \{1 + \Phi(-\beta)\ \tau\} \quad \rightarrow min. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ここで、$C_{I,0}$は常数であるから、C_Tを最小化する代わりに、無次元化された総期待費用である、次のηを最小化することからβ$_{opt}$が求められる。

$$\eta = C_T\ (\beta) / C_{I,0} = (1 + k\beta^n)\ \{1 + \Phi(-\beta)\ \tau\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

さて、Newton-Raphson法の繰り返し演算で、β$_{opt}$を求めるものとすれば、次式によることとなる。

$$\beta^{j+1} = \beta^j - (d\eta / d\beta)_j / (d^2\eta / d\beta^2)_j \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここに、ｊは繰り返し回数で、$(d\eta/d\beta)_j$および$(d^2\eta/d\beta^2)_j$は次のようである。

$$(d\eta/d\beta)_j = nk\beta_j^{n-1}\{1 + \Phi(-\beta_j)\ \tau\} - (1 + k\beta_j^n)\ \phi(-\beta_j)\ \tau \qquad (10)$$

$$(d^2\eta/d\beta^2)_j = n(n-1)k\beta_j^{n-2}\{1 + \Phi(-\beta_j)\ \tau\} + \{-2nk\beta_j^{n-1} + (1 + k\beta_j^n)\beta\}\ \phi(-\beta_j)\ \tau \qquad \cdots (11)$$

なお上式中のφ（・）は標準正規確率密度関数である。

結局β$_{opt}$は、τ（破壊損失費用の程度）、υ（安全度の増加に伴う初期費用の増加割合）、ｎ（安全度の増加に伴う初期費用の増加曲線の形）の三つのパラメータによって決まる。なお図－１にβを横軸に、縦軸に無次元化された初期費用である、

$$\lambda = C_I / C_{I,0} = 1 + k\beta^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

と、無次元化された破壊期待費用である、

$$\mu = \Phi(-\beta)\ C_F / C_{I,0} = \Phi(-\beta)\ (1 + k\beta^n)\ \tau \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

及びこれらの和であるηを取って、μ、λ、ηの関係の概念図を示す。

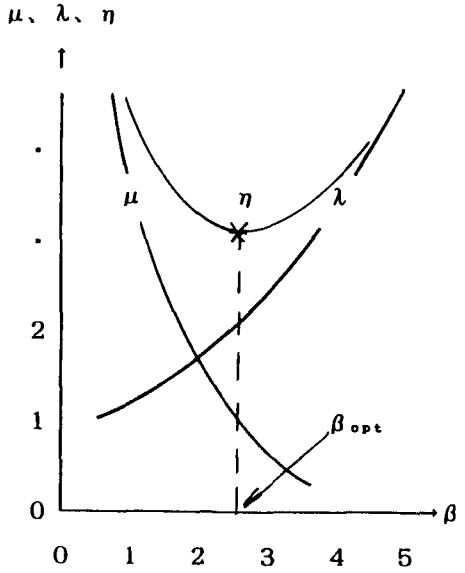
３．　パラメータτ、υ、ｎの値

本文で用いるパラメータτの値は、次のようなものとする。

$$\tau = 2 \sim 1000 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

破壊損失費用C_Fの初期費用のC_Iに対する比τの値の範囲の最低値を２としたのは、構造物の破壊による直接損失と経済的・社会的影響による間接損失を考慮すると、一般には２よりもっと大きな値となると考えられることによる。上限値の判断は極めて困難である。文献1)では、100としてあるが、もっと大きくなることも有り得ると考えて1000とした。なお文献1)での値は厳密には本文のτではない。本文では、破壊損失費用はそれぞれのレベルの初期費用の常数倍としているが、文献1)では特定のレベルである現行設計の初期費用の常数倍としている。

初期費用C_Iを式（２）のようにβのｎ次式とした場合の次数であるパラメータｎと、式（３）で定義した、$\beta=0$の時の費用$C_{I,0}$に対する$\beta=5$の時の費用$C_{I,5}$の比であるパラメータυの値は、問題の性質により違ってくる。



図－１　無次元化された費用による概念図

さて、初期費用C_Iは中央安全率s_cの１次式であるとして、次のように表わす。

$$C_I(s_c)=C_I(s_c=1)\{1+q(s_c-1)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

文献1)では、初期費用C_Iを次のように表わしている。

$$C_I(s_n)=C_I(s_{no})[1+b\{(s_n/s_{no})-1\}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

ここに、s_nは公称安全率、s_{no}は現行設計の公称安全率、ｂは常数で0.4 ～0.6 （文献2)での常数をｂに換算すると0.6 となる）である。

ここで、常数ａを用いて

$$s_c=a s_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

とおくと、式（15）から$C_I(s_{no})$は次のように表わされる。

$$C_I(s_{no})=C_I(s_c=1)\{1+q(a s_{no}-1)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

この関係を式（16）に用いると次のような式が得られる。

$$C_I(s_c)=C_I(s_c=1)\{1+q(a s_{no}-1)\}[1+b\{(s_c/a s_{no})-1\}] \quad \cdots (19)$$

式（15）と（19）のs_cに掛る係数は等しくなければならないから、次の式が成立する。

$$q=[b\{1+q(a s_{no}-1)\}]/(a s_{no}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

したがって式（15）中の常数ｑは、式（16）中の常数ｂを用いて次のように表わされる。

$$q=1/[1+a s_{no}\{(1/b)-1\}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

ａ＝1.5 、s_{no}=1.7 （常時）～1.15（地震時）、ｂ＝0.4 ～0.6 として、式（21）からｑを求めると、0.21～0.47を得る。文献1)では、対象を鋼道路橋としているが、本文ではもっと広い一般的な構造物を対象としているので、以下次のようなｑの値を用いて、υとｎの値について検討する。

$$q=0.2 \sim 0.6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

なお建築構造物を対象にした文献3)では、ｑに相当する値を逆算すると0.09～0.16程度となるが、これは現行設計の２倍の公称安全率で設計しても初期費用は20～30%程度しか増えないことに相当し、対象が建築構造物としても小さすぎるように思う。

ところでυとｎの値は、破壊基準関数の統計確率的性質、すなわち確率分布形の違い及びバラツキの大小に影響されるものと予想される。一般に破壊基準関数は多数の確率変数の関数として表わされるが、強度項をまとめてx_1とし、荷重項をまとめてx_2とすれば、破壊基準関数ｇは次のように表わされる。

$$g = x_1 - x_2 \quad \cdots\cdots (23)$$

通常あり得ると思われる確率分布形と、変動係数の組合わせの幾つかのケース（表－１のD_1、D_2及びV_1、V_2）について、設計目標安全性指標$\beta_D = 1$、２、３、４、５となるように、x_2の平均値を１としてx_1の平均値、すなわち中央安全率を求め[4]て、次の式からλ（β_D）、υを求めた。

$$\lambda(\beta_D) = 1 + q\{s_c(\beta_D) - 1\} \quad \cdots\cdots (24)$$

$$\upsilon = \lambda(\beta_D = 5) \quad \cdots\cdots (25)$$

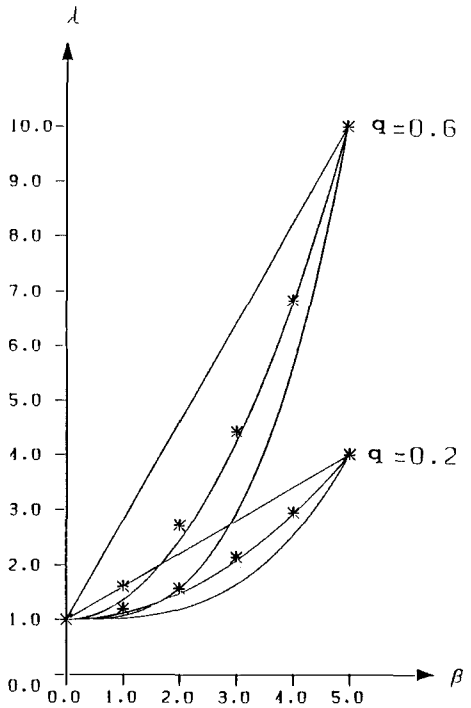
またｎの値は、図－２に示すような図から判断した。この図には、λ（β_D）が＊印で表示され、

$$\lambda = 1 + k\beta,\ 1 + k\beta^2,\ 1 + k\beta^3 \quad \cdots\cdots (26)$$

の直、曲線も描かれている。なお、この図は、$V_1 = 0.2$、$V_2 = 1.0$、$D_1 = B_1$、$D_2 = E$の場合である。υ、ｎを表－１に示す。

これらの図表中の記号は次のような確率分布であることを示す。Ｎ：正規分布、Ｌ：対数正規分布、W_1：ワイブル分布（下限値＝平均値－２×標準偏差）、W_2：ワイブル分布（下限値＝平均値－３×標準偏差）、B_1：ベータ分布（下限値＝平均値－２×標準偏差、上限値＝平均値＋３×標準偏差）、B_2：ベータ分布（下限値＝平均値－３×標準偏差、上限値＝平均値＋4.5 ×標準偏差）、Ｅ：極値分布（最大値）

確率分布形の組み合わせの中にx_1を正規分布としたものがないのは、既に指摘している[4)5)]ように、このような場合には、中央安全率をいくら高めても、βは１／V_1を越えないという不合理があり、実際的でないからである。



図－２　無次元化された初期費用の計算例

ここで用いた変動係数の値は実際の状況を勘案して、荷重項の変動係数が強度項のそれより大きく取ってある。そのためυとｎの値は、荷重項の確率分布の形と変動係数の違いに影響を受け、強度項の確率分布の形の違いの影響をほとんど受けていない。また荷重項を対数正規分布とした場合は、変動係数が大きくなると、他の確率分布の場合と違って、υの値が極端に大きくなっている。これは対数正規分布は変動係数の大小によりその分布形状が変化し、変動係数の値が大きいとかなり特殊な分布形状となり[6)]、変数の大きい部分の確率密度関数の裾野の形状が、極めて特殊なものになる（確率密度関数値がなかなか０に近付かない。付記３参照）ためである。通常、そのような裾野の情報を用いて対数正規分布と判断するのではないから、このような極めて特殊な分布は実際的でないと判断すべきであろう。また、ｋ＜１のケースもあるが、これらはいずれも上下限値が平均値に近い特殊な場合である。よってこのようなケースを除き、表－１から、大

表－1　υ、nの値

V_1 V_2	0.15, 0.25			0.2 , 0.5			0.2 , 0.7			0.2 , 1.0		
	q		n	q		n	q		n	q		n
D_1 D_2	0.2	0.6		0.2	0.6		0.2	0.6		0.2	0.6	
L N	1.45	2.34	1.4	1.94	3.82	1.5	2.23	4.68	1.5	2.67	6.00	1.5
L L	1.63	2.88	1.8	3.16	7.49	2.2	5.37	14.1	3.0	11.2	31.6	3.0
L B_1	1.42	2.25	1.1	1.86	3.58	1.2	2.09	4.28	1.2	2.45	5.35	1.2
L B_2	1.45	2.36	1.2	1.95	3.84	1.3	2.22	4.67	1.3	2.65	5.94	1.3
L E	1.74	3.21	2.0	2.60	5.81	2.0	3.18	7.54	2.0	4.06	10.2	2.0
W_1 N	1.37	2.11	1.0	1.79	3.37	1.1	2.06	4.18	1.1	2.47	5.41	1.2
W_2 N	1.45	2.34	1.2	2.04	4.11	1.4	2.36	5.07	1.5	2.84	6.53	1.5
W_1 L	1.59	2.78	1.7	3.14	7.42	2.1	5.41	14.2	3.0	11.3	31.9	3.1
W_2 L	1.66	2.97	1.8	3.35	8.06	2.2	5.60	14.8	2.8	11.4	32.2	3.1
W_1 B_1	1.28	1.85	0.9	1.59	2.78	0.9	1.78	3.35	0.9	2.06	4.19	0.9
W_2 B_2	1.43	2.30	1.0	2.01	4.03	1.2	2.32	4.95	1.3	2.78	6.33	1.3
W_1 E	1.71	3.13	1.9	2.53	5.59	1.9	3.10	7.29	1.9	3.96	9.88	2.0
W_2 E	1.77	3.31	2.0	2.78	6.33	2.0	3.42	8.27	2.0	4.39	11.2	2.0
B_1 N	1.38	2.13	1.0	1.80	3.41	1.1	2.08	4.23	1.1	2.49	5.47	1.1
B_2 N	1.42	2.26	1.1	1.95	3.84	1.4	2.24	4.73	1.5	2.70	6.10	1.5
B_1 L	1.60	2.81	1.7	3.19	7.56	2.1	5.45	14.4	2.8	11.5	32.4	3.1
B_2 L	1.62	2.87	1.8	3.21	7.63	2.2	5.40	14.2	2.8	11.1	31.3	3.0
B_1 B_1	1.29	1.86	0.8	1.60	2.80	0.8	1.79	3.36	0.8	2.07	4.21	0.8
B_2 B_2	1.41	2.22	1.0	1.93	3.78	1.2	2.21	4.63	1.2	2.64	5.91	1.2
B_1 E	1.72	3.16	1.9	2.56	5.67	2.0	3.13	7.40	2.0	4.01	10.0	2.0
B_2 E	1.73	3.20	2.0	2.65	5.95	2.0	3.26	7.77	2.0	4.16	10.5	2.0

凡のυとnの値の範囲を次のように判断し、以下この範囲で議論することとする。

$\upsilon = 1.5 \sim 15$　・・・・・・・・(25)

$n = 1 \sim 3$　・・・・・・・・・(26)

なおυの下限値の1.5 は、安全余裕のないものに比べて、極めて安全余裕を取ったβ＝5で設計されたものの初期費用が、50%増であることを意味する。通常この費用増が50%を下回ることは先ず考えられないから、これをυの下限値とすることは、常識にも合致すると思う。

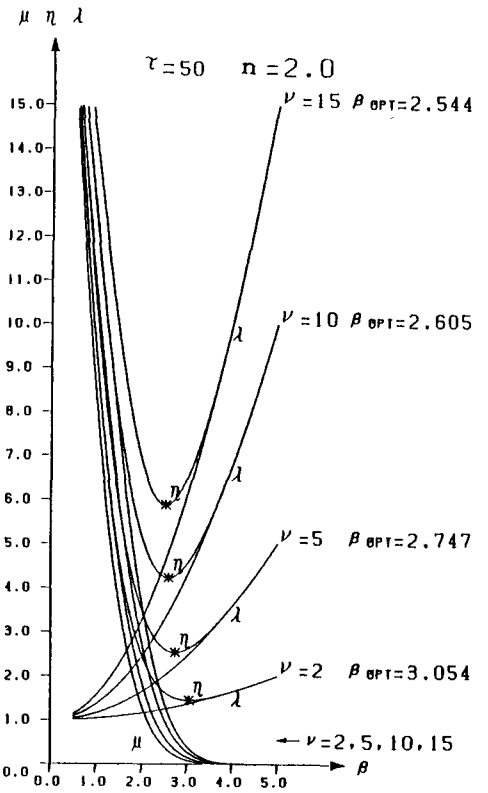
4．　計算結果の図示

無次元化された初期費用λ、破壊期待費用μ、総費用ηと最適安全性指標β_{opt}についての関係の例のうち、下記のn、υ、τの値の場合について、図－3に示す。

$n = 2$、$\upsilon = 2$，5，10，15、$\tau = 50$

・・・・・・・・・・・・・・(27)

前述したように、最適安全性指標β_{opt}は、τ（破壊損失費用の程度）、υ（安全度の増加に伴う初期費用の増加割合）、n（安全度の増加に伴う初期費用の増加曲線の形）の三



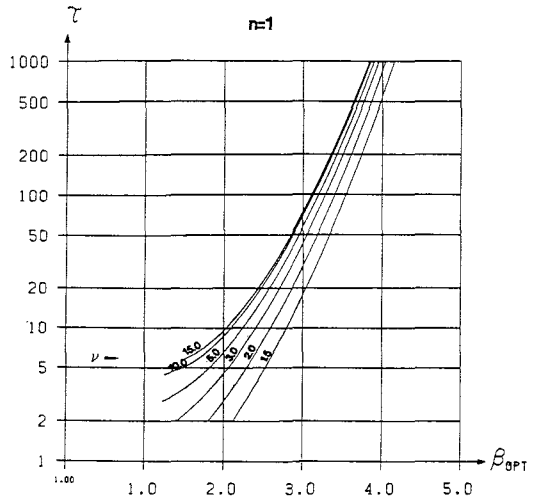
図－3　無次元化された費用とβ_{opt}の関係の例

つのパラメータによって決まる。図－４．１～４．３に、

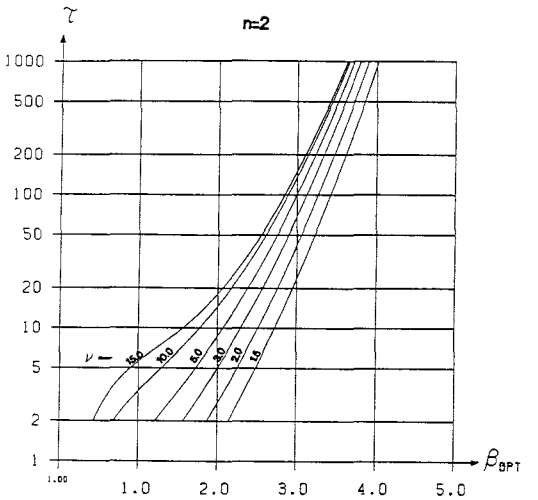
$n=1, 2, 3$、$\upsilon=1.5, 2, 3, 5, 10, 15$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ (28)

の組合わせについて、縦軸に$\log_{10}\tau$を取って、最適安全性指標β_{opt}（横軸）を示す。

次に縦軸に$\log_{10}\tau$を、横軸にυを取って、最適安全性指標β_{opt}をその等高線で表示したものを、図－５．１～５．３に示す。



図－４．１　最適安全性指標β_{opt}（ｎ＝１）



図－４．２　最適安全性指標β_{opt}（ｎ＝２）

５．　最適安全性指標β_{opt}の$\log_{10}\tau$、υの３次式による表現

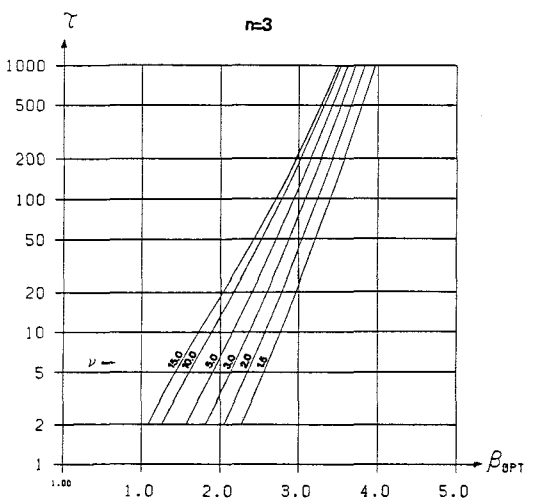
図－４．１～４．３を見ると、次数ｎを固定すれば、最適安全性指標β_{opt}は$\log_{10}\tau$（以下τ_1と表現する）とυの、次のような簡単な３次式で表現されそうである。

$$\beta_{opt}=G(\tau_1, \upsilon)$$
$$=a_1\tau_1^3+a_2\upsilon^3+a_3\tau_1^2\upsilon+a_4\tau_1\upsilon^2+a_5\tau_1^2+a_6\upsilon^2+a_7\tau_1\upsilon+a_8\tau_1+a_9\upsilon+a_{10} \quad \cdots\cdots\cdots (29)$$

この式（29）の係数a_i（$i=1\cdots10$）を、ｍ組のτ_1、υの組合わせについて、$\beta_{opt,j}$（$j=1\cdots m$）を計算し、最小二乗法で決め、その結果を表－２に示す。ただしｎ＝１の場合は、τの値が小さいと最適問題とならないことがあり、

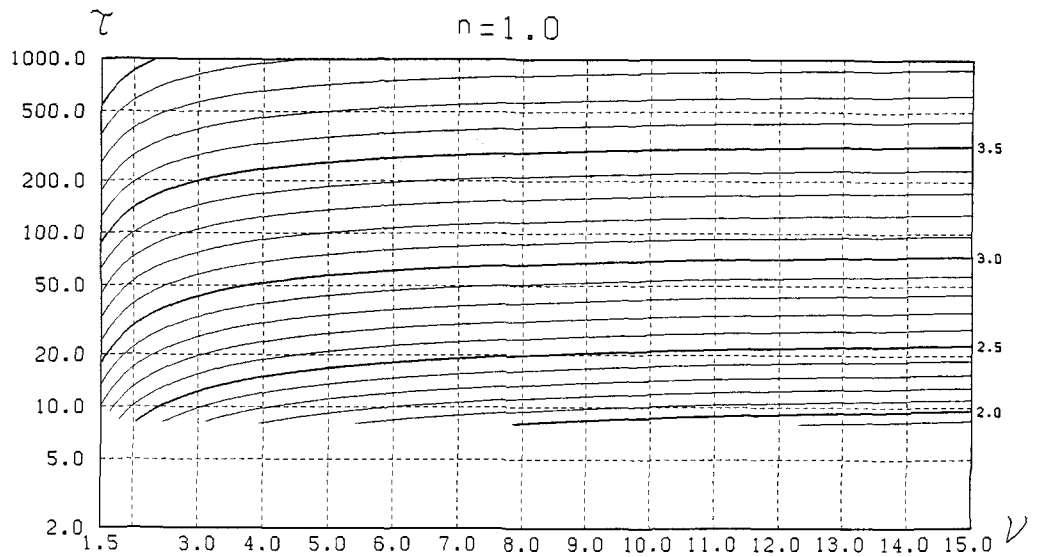
$$8\leqq\tau\leqq1000 \quad \cdots\cdots\cdots (30)$$

としてある。

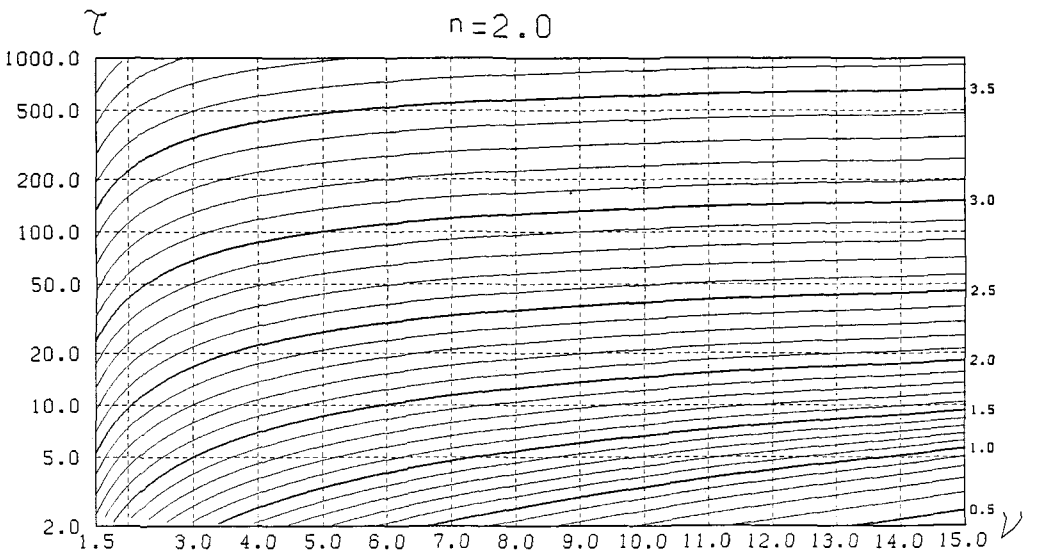


図－４．３　最適安全性指標β_{opt}（ｎ＝３）

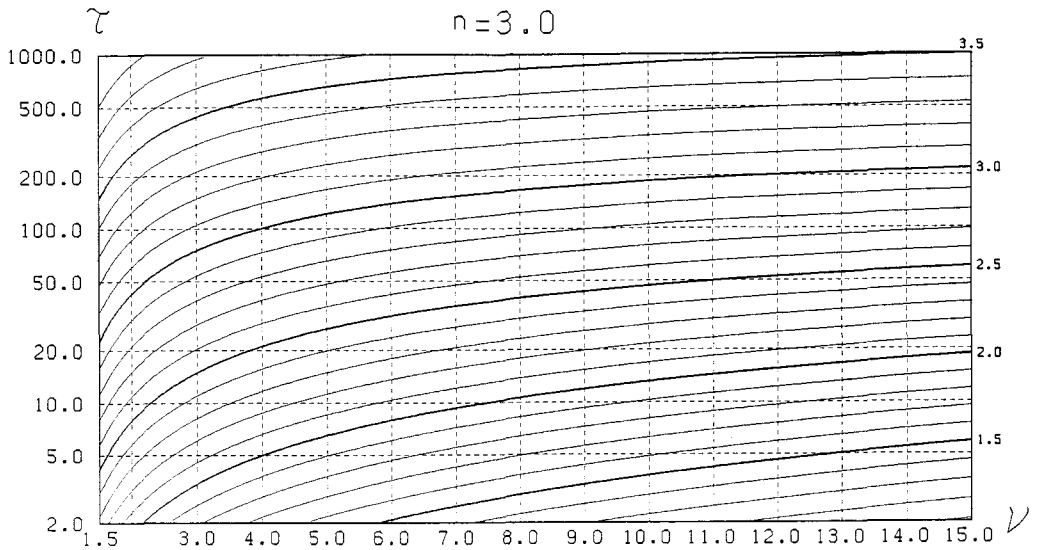
τが小さい場合に、若干のずれがあるが、この式（29）によるものと、正確に求めたβ_{opt}はほとんど一致している。



図－５．１　最適安全性指標β_{opt}の等高線（ｎ＝１）



図－５．２　最適安全性指標β_{opt}の等高線（ｎ＝２）



図－５．３　最適安全性指標β_{opt}の等高線（ｎ＝３）

表－２　３次式係数a_iの値

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	0.06429	-0.00063	-0.00828	-0.00152	-0.46316	0.02231	0.07034	1.68722	-0.29830	1.70776
1.5	0.08941	-0.00067	-0.01606	-0.00150	-0.57527	0.02379	0.10900	1.79473	-0.36304	1.67652
2	0.02212	-0.00073	-0.01637	-0.00163	-0.16168	0.02572	0.11750	0.95176	-0.39914	2.23806
2.5	-0.01248	-0.00073	-0.00542	-0.00144	0.01126	0.02544	0.06775	0.68993	-0.35283	2.35190
3	-0.01704	-0.00071	-0.00047	-0.00117	0.04132	0.02447	0.04054	0.61305	-0.31912	2.41793

６．　最適な安全のレベルを最適安全性指標β_{opt}で表現したことについて

本文では、総期待費用最小化原則に基づく設計を最適破壊確率$p_{f\,opt}$によらず、最適安全性指標β_{opt}を用いて表現した。その理由は主として次のようである。

１）仮に確率分布に関する情報があっても、直接破壊確率p_fを計算することは通常困難である。

２）次式が成立する安全性指標βは、計算が簡便で、その有効性は高い。[4)5)7)]

$$\beta \fallingdotseq -\Phi^{-1}(p_f) \qquad \cdots\cdots\cdots\

標で議論しても差し支えないと考えられる。

さて式（31）は通常、数%の誤差で成立する。[4)5)7)] しかしβの値が大きくなると、その誤差が数%であっても、破壊確率はかなり違い、

$$p_f \neq \Phi^{-1}(-\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\

数の強度項と荷重項を特定な確率分布（正規分布もしくは対数正規分布）に特定して扱われている。したがって本文のような一般性のある議論は出来ない。しかも、強度項を正規分布とするのは適切でなく、また、変動係数の大きい場合、荷重項を対数正規分布とするのも不適切である。

これまで示した図表などから次のことが言える。

1）ν（安全度の増加に伴う初期費用の増加割合）及びn（初期費用の増加曲線の次数）は表－1に見られるように、荷重項の確率分布の形とバラツキの大小によってかなり違った値となる。

2）図－3～5に見られるように、νの値が増加すると最適安全性指標β_{opt}を小さくする働きがあるが、νの値がある程度大きくなり、かつτが大きくなるにしたがって、その働きの度合いは減少する。

3）図－4、5に見られるように、τの値が増加すると、最適安全性指標β_{opt}を大きくする働きがある。このτの値がある程度以上になると、$\log_{10}\tau$の値にほぼ比例してβ_{opt}の値は大きくなる。

4）いずれにしても、破壊損失費用の初期費用に対する比τと、初期費用の増加割合ν及び初期費用の増加曲線の次数nが推定できれば、あらかじめ用意した図もしくは式を利用して、最適安全性指標β_{opt}を容易に求めることができる。

5）τ、ν、nのうち、nの値の違いは最適安全性指標β_{opt}に余り影響を与えない。この値を2に固定しても、β_{opt}の誤差は、特殊な場合（τが非常に小さく、νがかなり大きいような）を除き一般に小さい。νの値がある程度大きくなると、この値の変化も最適安全性指標β_{opt}にほとんど影響を与えない。総合的に言って、τの値が最適安全性指標β_{opt}の値を基本的に左右する。

6）τ、ν、nの値は特定しにくく、ある幅を持って推定されることが多い。中でも破壊損失費用の初期費用に対する比τの推定は困難である上に、この値の変化がもっとも最適安全性指標に影響を与える。

7）表－3には、総期待費用最小時における総期待費用に対する破壊損失期待費用の比ρ（$=\nu/\eta$）が示

表－3　ρ

n	1				2				3			
τ \ ν	2	5	10	15	2	5	10	15	2	5	10	15
2	0.049	-	-	-	0.051	0.150	0.282	0.363	0.036	0.094	0.151	0.190
5	0.036	0.060	0.068	-	0.048	0.119	0.206	0.330	0.041	0.102	0.163	0.207
10	0.030	0.040	0.032	0.026	0.045	0.096	0.129	0.157	0.043	0.102	0.154	0.189
50	0.022	0.022	0.015	0.011	0.039	0.059	0.054	0.047	0.045	0.087	0.104	0.106
1000	0.014	0.011	0.007	0.005	0.029	0.029	0.020	0.015	0.041	0.051	0.041	0.033

してある。この表に見られるように、破壊損失費用の初期費用に対する比τが小さく、安全度の増加に伴う初期費用の増加割合νが大きい場合には、最適安全性指標β_{opt}の値が小さくなり破壊確率が比較的大きくなるので、総期待費用最小時における総期待費用に対する破壊損失期待費用の比ρは、ある程度大きな値となるが、一般的には小さい。したがって、最適時の総期待費用の中に占める破壊損失期待費用は一般に非常に少ない。

8．　まとめ

本文で述べた要点をまとめると次のようになる。

1）総期待費用最小化の原則を、破壊確率でなく安全性指標βを用いて定式化し、数少ないパラメータによって、一般性のある議論を可能とした。

2）無次元化した初期費用は、$[1+\{(\nu-1)/5^n\}\beta^n]$と表現でき、通常$\nu=1.5\sim15$、$n=1$

～３である。これらの値は荷重項の確率分布の形とバラツキの程度の影響を受ける。
３）強度項を正規分布とすることも、また変動係数が大きい場合に強度項を対数正規分布とすることも適切でない。
４）総期待費用最小化の原則に基づく設計における最適安全性指標β_{opt}は、破壊損失費用の初期費用に対する比τと、初期費用の増加割合νおよび初期費用の増加曲線の次数ｎの、三つのパラメータによって決まる。
５）縦軸に$\log_{10}\tau$をとり、横軸にνをとって、最適安全性指標β_{opt}の等高線を示した。
６）最適安全性指標β_{opt}を、$\log_{10}\tau$、νの３次式で表現した。
７）比較的簡単な計算で求まり、しかも$\beta \fallingdotseq -\Phi^{-1}(p_f)$の関係がある安全性指標$\beta$を本文の$\beta$として用いて差し支えない。
８）安全度の増加に伴う初期費用の増加割合νは、その値が増加すると、最適安全性指標β_{opt}を小さくする働きがあるが、νの値がある程度大きくなり、かつ破壊損失費用の初期費用に対する比τが大きくなるにしたがって、その働きの度合いは減少する。
９）破壊損失費用の初期費用に対する比τは、その値が増加すると、最適安全性指標β_{opt}を大きくする働きがある。このτの値がある程度以上になると、$\log_{10}\tau$の値にほぼ比例してβ_{opt}の値は大きくなる。
10）破壊損失費用の初期費用に対する比τと、初期費用の増加割合νの値が推定できれば、あらかじめ用意した図もしくは式を利用して最適安全性指標β_{opt}は容易に求めることができる。
11）総合的に言って、三つのパラメータのうちτの値が最適安全性指標β_{opt}の値を基本的に左右する。
12）最適時の総期待費用の中に占める破壊損失期待費用は一般に非常に少ない。

９．　あとがき

最適な安全レベルを数値的に示し、その傾向について若干の吟味を加えた。なお総期待費用最小化原則に基づく設計について筆者が有する疑問点については、本文の結果を踏まえて、別稿で議論する予定である。

付記１　$\beta=5$を選択したことについて

特に$\beta=5$としなければならない理由はなく、安全度の増加に伴う初期費用の増加割合を定量的に定義するために便宜的に選択したものである。ただし、$\beta=5$は最適安全性指標β_{opt}を議論する場合の上限値よりやや大き目の値であるということも配慮されている。

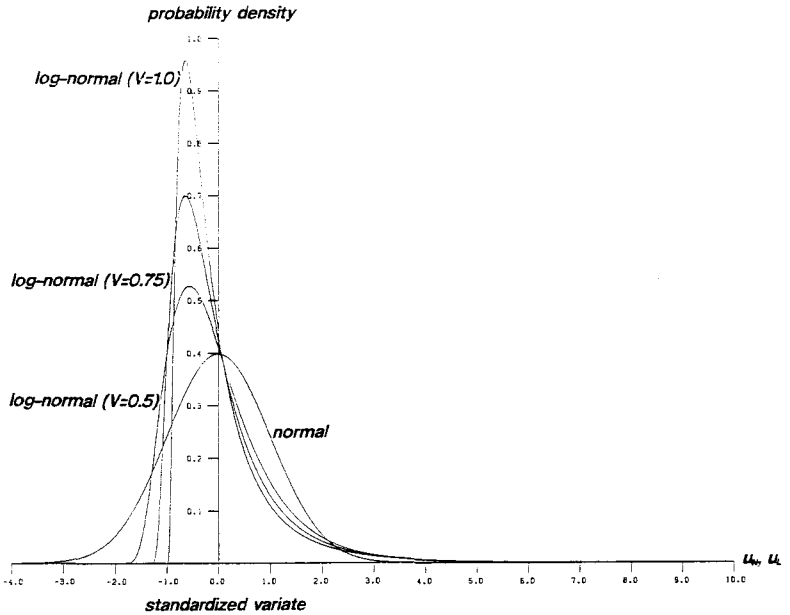
付記２　τを常数としたことについて

厳密には、破壊損失費用が初期費用に比例するとは言えない。しかし取敢えずこのようにおいて、損失費用の目安は、何かを基準にしてどの程度かという観点から考えざるをえないと思う。経済的、社会的影響による費用とか、非構造要素の費用を含める場合には、特にこのような比例性は成立しないが、比例性を前提としているというよりも、このτは費用の目安を立てるための常数と考えている。

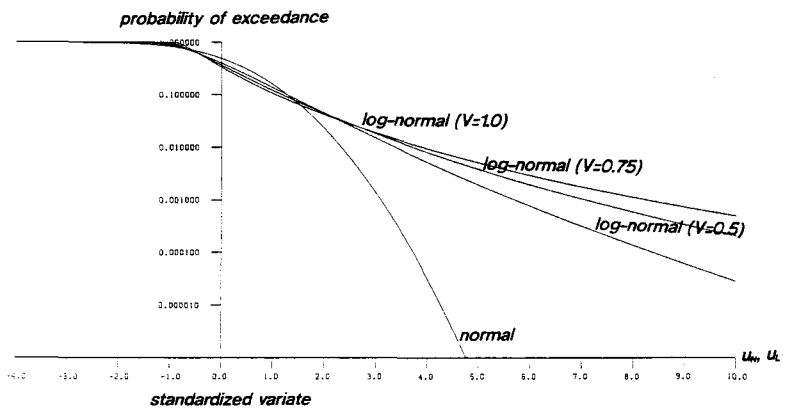
付記３　対数正規分布について

文献6)に示した方法で、標準化変数u_L｛＝（変数－平均値）／標準偏差｝を横軸にとって表わした、対数正規分布の確率密度関数$g_L(u_L)$のグラフを、正規分布のグラフ（図中のNormal）と共に、図－Ａ１

（図中のＶは変動係数）に示す。これらの図から変動係数の増加と共に、正規分布と違うものとなり、u_Lの下限値（＝１／Ｖ）が次第に平均値（u_L＝０）に近付き、グラフ形状はいびつになり、u_Lが３を越えても、なかなか０に近付いていっていない。このu_Lの大きい部分の正規分布との違いの模様を見るために図－Ａ２に、縦軸に超過確率、すなわち｛１－G_L（u_L）（標準化変数u_Lで表わした対数正規分布の分



図－Ａ１　標準化変数で表わした対数正規分布の確率密度関数（Ｖ＝0.5 ～1.0 ）



図－Ａ２　標準化変数で表わした対数正規分布の超過確率（Ｖ＝0.5 ～1.0 ）

布関数）｝の対数値を取って示してある。変動係数が大きくなると、超過確率はなかなか０になっていかない模様がよく分かる。このため、通常の確率分布と異なり、設計目標安全性指標β_Dがある程度大きくなった場合、荷重項を対数正規分布だとすると、中央安全率を極端に大きくする必要性が起きるのである。

参考文献

1）杉山俊幸、酒井利夫、藤野陽三、伊藤学：構造設計における信頼性レベル・安全率の設定に関する考察、土木学会論文報告集、第 327号、pp.21-28、1982.

2）Lind,N.C. ：Approximate Analysis and Economics of Structures, Proc. of ASCE, Jour. of the Structural Division, Vol.102, No.ST6, pp.1177 ～1196, 1977.

3）Jun KANDA ：Optimum Reliability for Probability-Based Structural Design,Journal of the Faculty of Engineering, The University of Tokyo, series B, May 1990.

4）長尚：安全性指標の有効性について、構造工学論文集、Vol.37A 、pp.459-466、1989.

5）CHOU, Takashi ：Utility of Reliability Index for Structural Design, Proc. of ICOSSAR'89, Vol. 3, pp.1699-1706, 1989.

6）CHOU, Takashi ：Probability Distributions by Standardized Variate, Proc. of JSCE, Structural Eng. /Earthquake Eng., Vol.2, No.2, Oct. 1985.

7）長尚：構造物の信頼性解析に用いる信頼性指標について、JCOSSAR'87論文集、Vol.1, pp.305-340, 1987.

（１９９０年１０月１２日受付）