

超音波探傷の数値シミュレーションのための FEM-BEM結合解法について

A Numerical Study on the Ultrasonic Simulation in a Steel Plate
Using Hybrid FE-BE Method

宮崎早苗* 田中康博** 三木千寿***

by S.Miyazaki, Y.Tanaka, C.Miki

A hybrid FE-BE method of ultrasonic wave simulation in a steel structure is studied for QNDE analysis. This proposed method has been included the advantages both of the FEM and the BEM. The FEM can treat the complex behavior of the wave propagation near the reflecting source without the special consideration about the special points, while the BEM is easily applicable for a larger spatial domain (even for free boundary problem). Based on this formulation, we have developed an improved ultrasonic wave simulator for QNDE.

1. はじめに

現在、構造物の非破壊検査には様々な非破壊検査方法が用いられているが[1-5]、これらからは、破壊力学を用いた構造物の安全性の評価に必要とされる精度の、欠陥の大きさ、形状、方向、分布などに関する情報を得ることは困難である[6]。このため、より精度の高い、より情報量の多い、より定量的な非破壊評価方法の開発を目指した研究が進められつつある。各種の非破壊検査法のうち、そのような、いわゆる定量的非破壊評価 (QNDE) に適しているのは超音波探傷法と思われる。しかし、定量的評価を行うためには、従来のエコー法の他に多くの反射源 (欠陥) の情報を含む反射波を、さらに詳細に分析する必要がある。

著者らは、これまで欠陥周辺の複雑な波の動きをとらえるため、有限要素法 (FEM) による数値シミュレーションを行い、コンピュータグラフィックスを用いることによって、亀裂などの反射源での超音波の反射、散乱特性を得、それを解析することによってQNDEへの足掛りとしようと試みてきた[7]。このシミュレーションでは、計算に膨大なコンピュータメモリ及び計算時間を要するため、解析領域を縮小し半無限領域として解析を行う目的で、Cundallの無反射境界を導入している。しかし、さまざまな形状の部材中のさまざまな形、寸法の欠陥に対する超音波波動の性質をとらえて定量的な評価を行うための情報を得るためには、さらに高精度な解析を行う必要があり、FEMのみの解析ではメモリ、及び計算時間に限界がある。

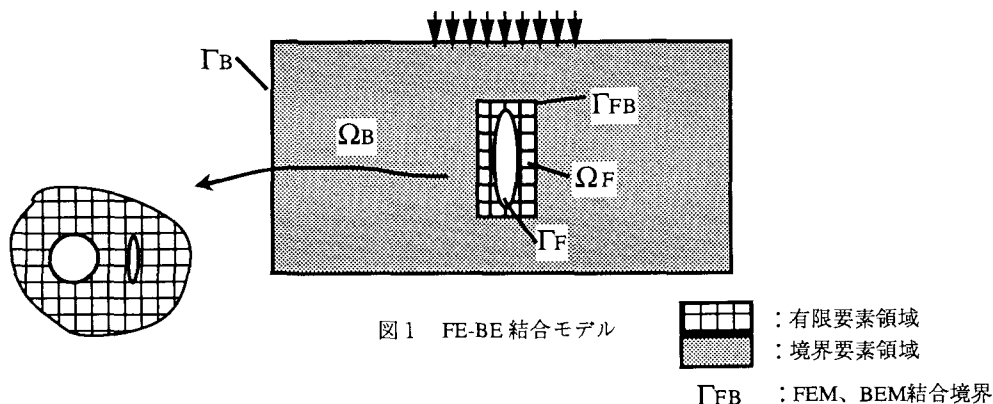
近年、境界要素法 (BEM) は FEMと並び多くの工学的問題への応用が盛んに試みられるようになってきた。すでにQNDEに関しては、超音波を用いての欠陥の同定問題に多く適用されている[6][8]。BEMをはじめとする積分方程式に基づいた解法では、無限、或は半無限領域の取扱いが容易であり、散乱波の放射条件が自動的に満たされるため、波動問題への適用の有効性が多くの解析例を通して示されてきている[9-13]。

このような特徴を有するFEMとBEMを結合させると、両者の長所のみを利用することができ、すでにFEMとBEMの結合解法に関する研究もいくつか報告されている[13,14]。本研究では、QNDEにおける超音波シミュレーションをより高精度に行う目的で、FEMとBEMのそれぞれの利点を取り入れた結合解法を提案しその定式化を行い、QNDEへの適用性をFEMのみでの解析と比較、検討する。

* NTTデータ通信 (株) (〒105 東京都港区芝公園1-3-1)

** 工博 NTTデータ通信 (株) (〒105 東京都港区芝公園1-3-1)

*** 工博 東京工業大学教授 土木工学科 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)



2. 有限要素、境界要素結合モデル

図1にFE-BE結合モデルを示す。円形、楕円形、スリットなどの反射源周辺部をFEMで解析領域 Ω_F としその他の部分はBEM解析領域 Ω_B とする。数値解析で欠陥形状の違いによる反射、散乱波特性を得ようとする場合、反射源近傍では、材料の非線形性が生じ、反射、散乱波が複雑な挙動を示すため、これをBEMで表現するのは難しくなる。一方、これをFEM解析で求めるためには、反射源周辺の要素の節点間隔を細かくしたり、要素の形状関数に高次の補間関数を用いたりする必要があるため、FEMのみの解析には、コンピュータの性能上解析領域に限界が出てくる。このための解決法として、無反射境界を導入した半無限領域化による解析領域の縮小が考えられるが、これは離散化誤差を含む危険性がある。

そこで、非線形性が生じる反射源周辺部にはFEM、それ以外の線形領域には、FEMで解析するより節点自由度が少なく、さらに、無限、半無限領域の取り扱いが容易なBEMを取り入れる。以下、FEMの定式化、BEMの定式化を説明した後に、FEMとBEMの結合法について述べる。

3. 有限要素法による定式化

有限要素領域 Ω_F においてNavier方程式に重み付き残差法を適用しGalerkin法を用いる。

$$\int_{\Omega_F} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_F} (\mathbf{F}_i(\mathbf{u}) + \mathbf{h}_{ij} \mathbf{u}_j - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{u}_i dS + \int_{\Omega_F} (\rho \mathbf{u}_j - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_j) - \mu \nabla^2 \mathbf{u}_j - \mathbf{f}_i) \delta \mathbf{u}_i dV \right] \\ = \int_{\Omega_F} \left[\delta(-T + U - W) + \int_{\Omega_F} \mathbf{k}_{i,jn} \mathbf{u}_{j,n} \delta \mathbf{u}_i dV \right] dt = 0 \quad (1)$$

$$\text{ただし、} \quad T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j dV \\ U = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \mathbf{h}_{ij} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} (\mathbf{k}_{im,jm} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j) dV \\ W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \mathbf{F}_i \mathbf{u}_i dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_i \mathbf{u}_i dV$$

以上により、FEMによる運動方程式表示は、行列式で

$$[M]\{\mathbf{u}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (2)$$

[M]: 質量マトリックス [K]: 剛性マトリックス
 {u}: 変位ベクトル {f}: 外力ベクトル

これに、時間軸方向の解析について、Newmark- β 法を用い変形すると、

$$[KF]\{\mathbf{u}\}_k = \{\mathbf{f}\}_k + \{\mathbf{g}\} \quad (3)$$

$$[KF] = [K] + 1/(\beta \Delta t^2)[M] \\ \{\mathbf{g}\} = [M]\{1/(2\beta - 1)\{\mathbf{u}\}_{k-1} + (1/(\beta \Delta t))\{\mathbf{u}\}_{k-1} + (1/(\beta \Delta t^2))\{\mathbf{u}\}_{k-1}\}$$

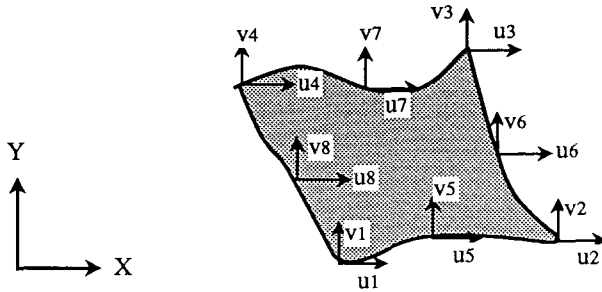


図2 有限要素モデル—四辺形アイソパラメトリック双二次要素

と表すことができる。反射源近傍での複雑な反射、散乱波伝播の様子を得るためには、要素の座標関数、変位関数に高次の補間関数を用いる必要があるため、ここでは、要素に四辺形アイソパラメトリック双二次要素（図2）を用いる。アイソパラメトリック双二次要素では、座標関数、変位関数が二次式で表される。このため、任意の要素についての質量マトリックス $[m]$ 及び剛性マトリックス $[k]$ はそれぞれ次式で表される。

$$[m] = \rho d \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] J d\xi d\eta$$

$$[k] = d \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] J d\xi d\eta \quad (4)$$

ρ : 材料密度

d : 板厚

$[D]$: Dマトリックス

J : ヤコビアン

$[N]$: 補間関数

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial N1/\partial x & \cdots & \partial N8/\partial x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \partial N1/\partial y & \cdots & \partial N8/\partial y \\ \partial N1/\partial y & \cdots & \partial N8/\partial y & \partial N1/\partial x & \cdots & \partial N8/\partial x \end{bmatrix}$$

4. 境界要素法による定式化

図1において、 ΩB 内の任意点 x での時刻 t における変位を $u_i(x, t)$ のように表す。このとき、変位で表した運動方程式は Navier 方程式を変形すると次のようになる。

$$(c1^2 - c2^2) u_{i, ij}(x, t) + c2^2 u_{j, ii}(x, t) + f_i(x)/\rho = \ddot{u}_i(x, t) \quad (5)$$

$c1$: 縦波伝播速度 ($=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$)

$c2$: 横波伝播速度 ($=\sqrt{\mu/\rho}$)

λ, μ : Lamé 定数

ρ : 材料密度

f_i : 単位質量当りの物体力

境界積分方程式は、 $\Gamma = \Gamma B + \Gamma FB$ とすると、

$$c_{ij}(y) u_j(y, t) + \int_0^t \int_{\Gamma} p_{ij}^*(y, t, y', t') u_j(y', t') d\Gamma(y') dt' \\ = \int_0^t \int_{\Gamma} u_{ij}^*(y, t, y', t') p_j(y', t') d\Gamma(y') dt' + f_i(y, t) \quad (6)$$

c_{ij} : 自由項の係数

u_j : j 方向の変位

u_{ij}^* : 変位の基本解

p_j : j 方向の表面力

p_{ij}^* : 表面力の基本解

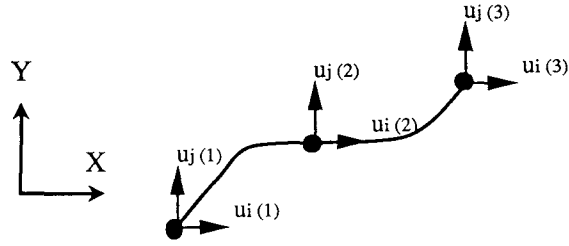


図3 境界要素モデルー3節点アイソパラメトリック要素

2次元問題の基本解 u_{ij}^* は次式で与えられる。

$$u_{ij}^*(x, t, y, \tau) = 1/(2\pi\rho) [r_i r_j / r^6 \{ (2\tau_s^2 - r^2/c_1^2) / (\tau_s^2 - r^2/c_1^2)^{1/2} H(\tau_s - r/c_1) - (2\tau_s^2 - r^2/c_2^2) / (\tau_s^2 - r^2/c_2^2)^{1/2} H(\tau_s - r/c_2) \} - \delta_{ij} / r^2 \{ (\tau_s^2 - r^2/c_1^2)^{1/2} H(\tau_s - r/c_2) - (\tau_s^2 - r^2/c_2^2)^{1/2} H(\tau_s - r/c_2) \} + \delta_{ij} / (c_2^2 (\tau_s^2 - r^2/c_2^2)^{1/2}) H(\tau_s - r/c_2)] \quad (7)$$

ただし、 $\tau_s = t - \tau$

$r = |x - y|$

δ_{ij} : Kronecker のデルタ

H : Heaviside の単位ステップ関数

また、Hookの応力-ひずみ関係、及び (7) 式より基本解 p_{ij}^* は、

$$p_{ij}^* = [\lambda \delta_{ij} \{ \partial r / \partial x_1 \partial u_{i1}^* / \partial r + \partial r / \partial x_2 \partial u_{i2}^* / \partial r \} + 2\mu \{ \partial r / \partial x_j \partial u_{i1}^* / \partial r + \partial r / \partial x_1 \partial u_{ij}^* / \partial r \}] n_1 + [\lambda \delta_{ij} \{ \partial r / \partial x_1 \partial u_{i1}^* / \partial r + \partial r / \partial x_2 \partial u_{i2}^* / \partial r \} + 2\mu \{ \partial r / \partial x_j \partial u_{i2}^* / \partial r + \partial r / \partial x_2 \partial u_{ij}^* / \partial r \}] n_2 \quad (8)$$

n_i : 境界上外向きの単位法線ベクトル

(6)式の積分方程式を直接離散化し数値的に解いていくため、境界 Γ 上に E 個の節点を設け、時間領域を N 個の微小ステップ（時間要素）に分割する。このとき、後にFEM領域と結合することを考えて、空間の離散化にはFEM領域と同じ次数のアイソパラメトリック要素を用いる。以上より、次に示すような離散化方程式が得られる。

$$c_{ij} u_j(y, t) + \sum_{i=1}^E \sum_{\lambda=1}^K \left\{ \int_{\Gamma} \int_{t_{\lambda-1}}^{t_{\lambda}} p_{ij}^* \varphi_u^T N d\Gamma dt \right\} u_j = \sum_{i=1}^E \sum_{\lambda=1}^K \left\{ \int_{\Gamma} \int_{t_{\lambda-1}}^{t_{\lambda}} u_{ij}^* \varphi_p^T N d\Gamma dt \right\} p_j + f_i(y, t) \quad (9)$$

φ_u : 変位に関する時間の補間関数

φ_p : 表面力に関する時間の補間関数

ここでは、安定な解を得るために、 φ_u は2次関数、 φ_p は0次関数を用いる。

これは

$$\sum_{\lambda=1}^K \{ [H\kappa, \lambda] \{u\} \lambda + [H\kappa-1, \lambda-1] \{u\} \lambda-1 + [H\kappa-2, \lambda-2] \{u\} \lambda-2 \} - \sum_{\lambda=1}^K [G\kappa, \lambda] \{p\} \lambda = \{f\} \kappa + \{f\} \kappa-1 + \{f\} \kappa-2 \quad (10)$$

変形すると、

$$[H\kappa\kappa]\{u\}_\kappa + [H\kappa-1,\kappa-1]\{u\}_{\kappa-1} + [H\kappa-2,\kappa-2]\{u\}_{\kappa-2} - [G\kappa\kappa]\{p\}_\kappa = \{w\}_\kappa + \{w\}_{\kappa-1} + \{w\}_{\kappa-2} \quad (11)$$

$$\{w\}_\kappa = \{f\}_\kappa - \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} [H\kappa\lambda]\{u\}_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} [G\kappa\lambda]\{p\}_\lambda$$

と表すことができる。さらに、 $\{p\}_\kappa$ について解くと、

$$\{p\}_\kappa = [KB]\{u\}_\kappa + [KB]\{u\}_{\kappa-1} + [KB]\{u\}_{\kappa-2} - (\{w'\}_\kappa + \{w'\}_{\kappa-1} + \{w'\}_{\kappa-2}) \quad (12)$$

$$[KB] = [G\kappa\kappa]^{-1} [H\kappa\kappa]$$

$$\{w'\} = [G\kappa\kappa]^{-1} \{w\}$$

5. 有限要素法と境界要素法の結合解法

(3)式に(12)式を代入することによってFEMとBEMを結合する。全領域の変位 u と節点力 f について、 Ω_F に属する節点に関するものには f 、 Γ_{FB} に属する節点に関するものには fb 、 Γ_B に属する節点に関するものには b 、という添字をつける。 Γ_{FB} 上で変位の連続条件と力のつり合い条件より、

$$\{ufb\}_f = \{ufb\}_b \quad (13)$$

$$\{ffb\}_f + \{ffb\}_b = \{0\} \quad (14)$$

FEMの節点力 $\{f\}$ とBEMの表面力 $\{p\}$ の関係は分布マトリックス $[D]$ により

$$\{f\} = [D]\{p\} \quad (15)$$

$[D]$: 表面力を節点力に変換するためのマトリックス

$[B]$: Booleマトリックス

ゆえに、(12)式より、

$$\{f\}_B = [D][KB](\{u\}_\kappa + \{u\}_{\kappa-1} + \{u\}_{\kappa-2}) - [D](\{w'\}_\kappa + \{w'\}_{\kappa-1} + \{w'\}_{\kappa-2}) \quad (16)$$

(3)、(16)式を全領域の自由度についてマトリックスで表示すると、

$$\begin{bmatrix} [KFf,f] & [KFf,fb] & 0 \\ [KFfb,f] & [KFfb,fb] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{uf\}_\kappa \\ \{ufb\}_\kappa \\ \{ub\}_\kappa \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} \{ff\}_\kappa \\ \{ffb\}_\kappa \\ \{fb\}_\kappa \end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} \{gf\}_\kappa \\ \{gfb\}_\kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3')$$

$$\begin{bmatrix} \{ff\}_\kappa \\ \{ffb\}_\kappa \\ \{fb\}_\kappa \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K^*fb,fb] & [K^*fb,b] \\ 0 & [K^*b,fb] & [K^*b,b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{ufb\}_\kappa \\ \{ufb\}_\kappa + \{ufb\}_{\kappa-1} + \{ufb\}_{\kappa-2} \\ \{ub\}_\kappa + \{ub\}_{\kappa-1} + \{ub\}_{\kappa-2} \end{bmatrix}_b + \begin{bmatrix} 0 \\ \{dfb\}_\kappa + \{dfb\}_{\kappa-1} + \{dfb\}_{\kappa-2} \\ \{db\}_\kappa + \{db\}_{\kappa-1} + \{db\}_{\kappa-2} \end{bmatrix} \quad (16')$$

$$[K^*] = [D][KB]$$

$$\{d\} = [D]\{w'\}$$

(14)式の条件にしたがって(16)'式を(3)'式に代入し、(13)式を用いて整理すると、

$$\begin{bmatrix} [KFf,f] & [KFf,fb] & 0 \\ 0 & [KFfb,fb] + [K^*fb,fb] & 0 \\ 0 & [K^*b,fb] & [K^*b,b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{uf\}_\kappa \\ \{ufb\}_\kappa \\ \{ub\}_\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{gf\}_\kappa \\ \{gfb\}_\kappa - (\{qfb\}_{\kappa-1} + \{qfb\}_{\kappa-2}) + \{dfb\}_\kappa + \{dfb\}_{\kappa-1} + \{dfb\}_{\kappa-2} \\ -(\{qdb\}_{\kappa-1} + \{qdb\}_{\kappa-2}) + \{db\}_\kappa + \{db\}_{\kappa-1} + \{db\}_{\kappa-2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

(17)式により結合解法の定式化ができた。

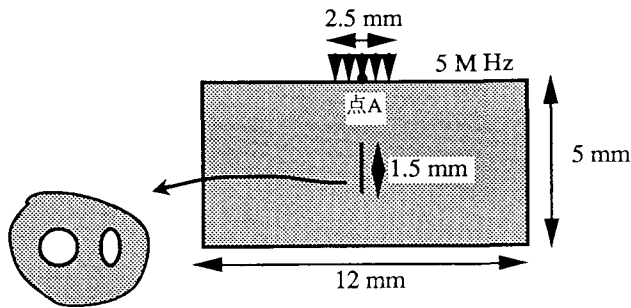


図4 解析モデル

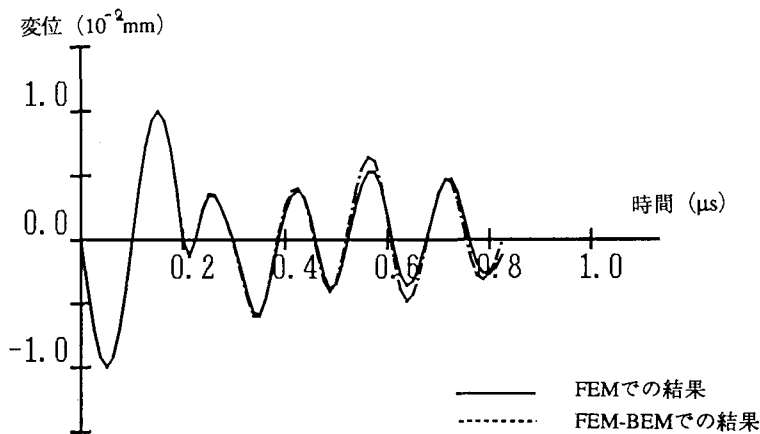


図5 点Aにおける反射波

6. 解析結果

以上をふまえて、図4に示されるような、内部に亀裂が存在する鋼材中を超音波が伝播する様子をFEM、及びFEM-BEM結合解法を用い、同一の解析領域、節点間隔、時間間隔をもつモデルについてそれぞれ解析した。

図5は、5MHz縦波の正弦波を1波長入射した際の、点Aでの反射波をとらえたものである。FEMでの解析の妥当性はすでに示されているが[7]、図5より、FEM-BEM結合解法を用いた場合FEMでの解析結果とほぼ等しい結果となっている。これより、FEM-BEM結合解法での解析が妥当であることが示された。

表1は、FEM、及びFEM-BEM結合解法での解析に使用されるメモリを表したものである。このFEMでの解析ではコンピュータの使用メモリがほぼ限界となっているため、より精度の高い解析を行うためにはモデル化の際なんらかのくふうが必要である。本シミュレーションでは、時間領域での解析も行われることから、これには離散化による誤差が含まれる可能性が高い。また、FEM-BEM結合解法を用いた場合、コンピュータの使用メモリはFEMを用いた場合の59%となっており、FEM-BEM結合解法を用いるとさらに精度を上げることができることがわかる。

以上より、FEM-BEM結合解法で解析することによってより多くの反射源（欠陥）の情報を含んだ反射波をとらえることができ、定量的非破壊評価のためには有望な方法であるといえる。

表1 使用メモリ

	仮想メモリ	実メモリ	計
FEM	52.8M	17.4M	70.2M
FEM-BEM	25.2M	16.2M	41.4M

7. 結論

本研究では、QNDEにおける超音波シミュレーションの計算効率を高めるためにFEMとBEMの利点を取り入れた結合方法を提案した。これにより、反射源近傍の複雑な波動伝播の様子を、特別な手法を使うことなしに再現すると同時に、FEMのみでの解析に比べ計算機の使用メモリが激減したことによりさらに近似度を上げることができるため、より現実に近いシミュレーションモデルで従来より高精度な解析を行うことが可能となった。

参考文献

- [1]三木、深沢、加藤、大畦：表面疲労亀裂検出に対する各種非破壊試験の適用性、土木学会論文集、第386号、(1987, 10)
- [2]田島、福井、三木、深沢：かど溶接ルート部に発生する疲労亀裂検出に対する非破壊試験の適用性、土木学会論文集、第386号、(1987, 10)
- [3]深沢、大畦、加藤、三木：非破壊試験による表面疲労亀裂検出に関する塗膜の影響、土木学会論文集、第398号、(1988, 10)
- [4]飯島、深沢、三木、田島：補剛トラス部材溶接継手の疲労亀裂検出に関する実験、土木学会論文集、第410号、(1989, 10)
- [5]春海、内田：弾性波のコンピュータシミュレーション、第回計算電気電子工学シンポジウム、(1988, 3)
- [6]広瀬：定量的非破壊評価とフラクチャーメカニクス、構造工学論文集、Vol.35A (1989, 3)
- [7]S.Miyazaki, C.Miki：Preliminary Study on Ultrasonic Wave Simulation in Quantitative Non-Destructive Evaluation, Review of Progress in QNDE, (1990) (投稿中)
- [8]田中、中村、中野：境界要素法による構造要素の欠陥同定、境界要素法研究会、境界要素法論文集第6巻、(1989, 12)
- [9]丹羽、小林、横田：積分方程式による任意形状、多数空洞周辺応力の解析、土木学会論文集、第195号、(1971, 11)
- [10]丹羽、小林、福井、東：積分方程式方による埋設物周辺の過渡応力の解析、土木学会論文集、第248号、(1976, 4)
- [11]上杉、大津：境界要素法による半無限弾性体における二次元波動場の解析、土木学会論文集、第374号、(1986, 10)
- [12]福井：二次元動弾性問題の時間積分境界要素法による解析、構造工学における数値解析シンポジウム論文集、第12巻(1988)
- [13]S.Hirose, J.D.Achenbach：Application of BEM to Transient Analysis of a 3-D Crack, Boundary Element Methods in Applied Mechanics, (1988)
- [14]東平、吉田：時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析、土木学会論文集、第410号、(1989, 10)
- [15]東平、大町：時間領域法を用いた弾性基礎上のフィルダムの振動モード解析手法、土木学会論文集、第416号、(1990, 4)

(1990年10月12日受付)