

クラックを多数有する材料の巨視的弾性定数と クラック配置のパラメータ

Overall Moduli of Cracked Solid and Parameter for Crack Geometry

堀井秀之^{*} キエティサック サハサクモントリ^{**} 奥井義昭^{***}

By Hideyuki HORII, Kiertisak SAHASAKMONTRI, and Yoshiaki OKUI

The overall properties of solids containing cracks depend on the density, orientation, and spatial distribution of cracks. To describe the overall response of such solids, some quantities are necessary that characterize the arrangement of cracks. Instead of dealing with a general problem, the problem of solids containing a doubly periodic rectangular array of cracks is considered as a special case. In terms of the obtained solution, discussion is made on the essential characteristic of the required quantities. Results are compared with solutions of solids containing randomly distributed cracks. An essential difference between random distribution and non-random distribution is pointed out. The prediction of variation is a task in modelling of behaviors of solids with microstructures.

1. はじめに

クラックを多数有する材料の巨視的挙動はクラックの方向の分布、密度だけでなく、クラックの配置、すなわち空間的分布に依存する。クラックテンソル¹⁾はクラックの方向の分布を表わしているが、クラックテンソルによってクラックの空間的分布を表現することはできない。クラックの配置がランダムでない場合、クラックの空間的分布を表わすパラメータを抽出し、クラックを有する材料の構成則をそのパラメータの関数として導くことが課題となる。その場合、クラックの配置において、どのような要因が材料の巨視的挙動に影響しているのかを明らかにする必要がある。一般的なクラック配置の問題を閉じた形で解くことができれば、そのような情報を得ることができるであろうが、一般的なクラック配置の問題を解くこと以前に、そのような問題を設定すること自身が難しい。ここでは、ノンランダムなクラック配置の一例として二重周期クラックの問題を解き、巨視的弾性定数を近似的に陽な形で求める。クラックの空間的分布のみに着目し、クラックの方向はすべて同一とする。結果をランダムクラックの解 (Self-Consistent Method とシミュレーション) と比較し、ランダム解とノンランダム解の差異を議論する。また、微視構造を有する材料の力学における今後の課題の一つとして、材料挙動のバラツキを議論する。

* Ph.D. 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

** 工博 隣大林組設計本部設計第11部 (〒101 東京都千代田区神田司町2-3-1)

*** 工修 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科 (〒338 埼玉県浦和市下大久保255)

2. 二重周期クラックを有する材料の巨視的弾性定数

ノンランダムなクラック配置の一例として二重周期クラックの問題（図1）を考える。単純なクラックの配置を考えることにより、クラックの配列は、クラックの密度 $\rho = c^2/HW$ とクラックの配置を表わす角度 $\phi = \tan^{-1}(H/W)$ とによって規定される。二重周期クラックを有する材料の巨視的弾性定数は、この2つのパラメータの関数として求まるはずである。

この問題は既に解かれているが、二重無限級数の評価を必要とする解法においては、二重無限級数の計算方法によって解が異なるというパラドクスが存在する²⁻⁴⁾。例えば、図2に示すように矩形領域にクラックを配置し、クラックの数を増加させ、極限を考える。このとき、解の極限は矩形領域の形状 C/R に依存し、一意に定まらない。図3に示すように応力拡大係数の値は、 C/R の値によって変化し、 $C/R = \infty$ において二重周期クラックの解に一致する。

Horii⁵⁾らは Method of Pseudo-tractions⁶⁾を用いて問題の定式化を行った。パラドクスは平均応力の概念を導入することにより解決され、解が二重無限級数の取り方によらず一意に求まることが示された。その結果、応力拡大係数は以下のように求まる。

$$\frac{K_I}{\sigma_y \sqrt{\pi c}} = 1 + \rho H_I(\phi), \quad (1)$$

$$\frac{K_{II}}{\tau_{xy} \sqrt{\pi c}} = 1 + \rho H_{II}(\phi)$$

また、巨視的弾性定数は次式で与えられる。

$$E_x = E, \quad \nu_{xy} = \nu,$$

$$E_y = \frac{E}{1 + 2\pi\rho[1 + \rho H_I(\phi)]}, \quad (2)$$

$$\nu_{yx} = \frac{\nu}{1 + 2\pi\rho[1 + \rho H_I(\phi)]},$$

$$G_{xy} = \frac{G}{1 + 2\pi\rho[1 + \rho H_I(\phi)]G/E},$$

式(1)及び(2)において、クラックの配置に対する依存性は、 $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ のみによって現われている。これらはクラックの配置を表わす角度 ϕ の関数であり、それぞれモードⅠ、モードⅡに対するものである。これらは二重無限級数の形で与えられるが、値は級数の取り方に依存せず、

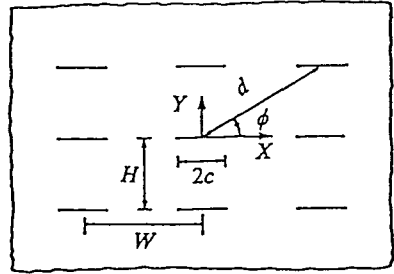
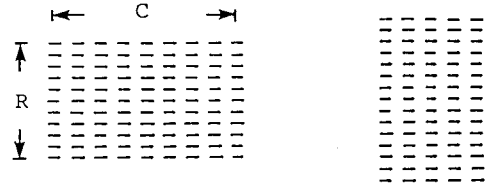


図1 二重周期クラックの問題



(a) $C/R = 1.5$

(b) $C/R = 0.6$

図2 二重無限級数の計算方法

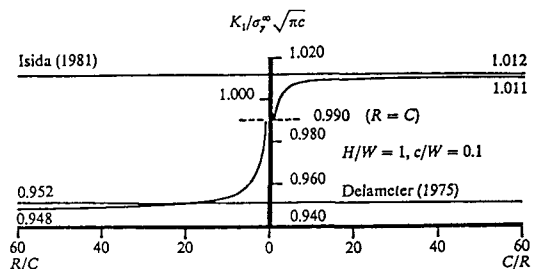


図3 二重無限級数の異なる取り方により求まる応力拡大係数の値

一意に定まる。変化する ϕ の値に対する関数 $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ の値を図 4、5 に示す。

図 4、5 より、モード I、II において ϕ に対する依存性が大きく異なることがわかる。全く同じクラックの配置に対しても荷重条件の違いによって、巨視的挙動の ϕ に対する依存性が異なるということは注目に値する。

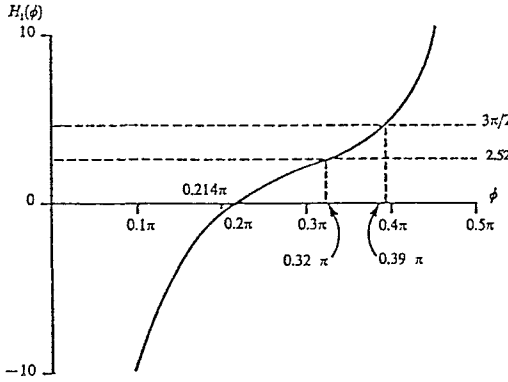


図 4 $H_I(\phi)$ の値：モード I

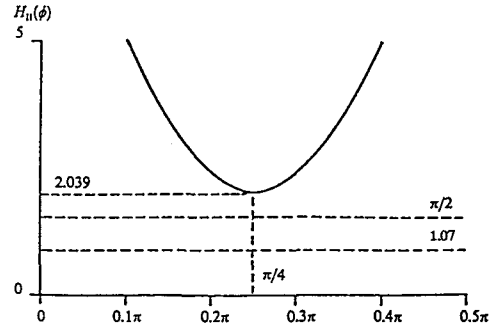


図 5 $H_{II}(\phi)$ の値：モード II

3. Self-Consistent Method の解とランダムクラックのシミュレーション

前節で示した二重周期クラックの解と比較するために、位置はランダムで、方向は全て同一なクラックを有する材料の巨視的弾性係数（図 6）を、Self-Consistent Method により求めた。未知の巨視的弾性定数を有する等価な異方性材料中の 1 つのクラック（図 7）を考え、その解より計算される平均弾性定数が、最初に仮定した弾性定数に等しいという条件 (Consistency condition) より、巨視的弾性定数を求めることができる。

得られる巨視的弾性定数は式 (2) と同じ形をしているが、 $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ の部分は ϕ の関数ではなく、定数としてその値が次のように求められる。

$$\begin{aligned} H_I &= 3\pi/2 = 4.71, \\ H_{II} &= \pi/2 = 1.57 \end{aligned} \quad (3)$$

次に、多数のランダムクラックの問題（図 6）の解を直接求めることを考える。乱数を発生させてクラックの位置を与え、そのクラックの配置に対する解を Method of Pseudotraction により求める。ある与えられたクラックの配置に対して、平均応力と平均ひずみの値を求め、式 (2) より H_I 、 H_{II} の値が得られる。Self-Consistent Method による場合と同様に、 H_I 、 H_{II} は定数として求まる

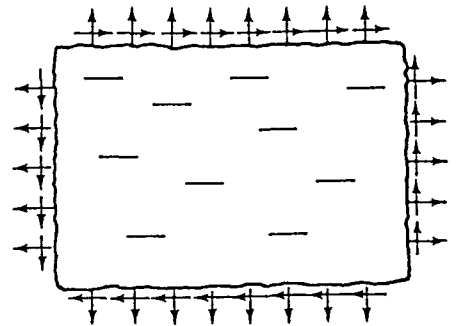


図 6 同一方向のランダムクラック

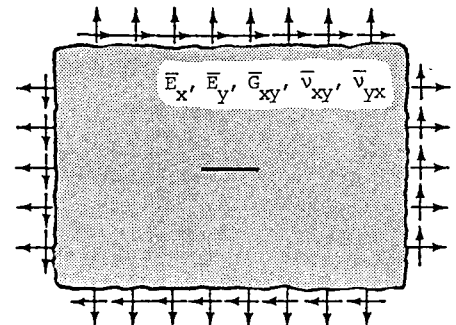


図 7 等価な異方性無限板中の単一クラック

が、その値はクラックの配置を乱数を発生させ与える度に異なる。解のバラツキについては後で議論を行うが、ここでは多数回計算を行い、 H_I 、 H_{II} の平均値を求める。正方領域（面積 A ）に45個のクラックを $\rho = \Sigma c^2 / A = 0.05$ として配置し、Method of Pseudotractionsにおいて、低次項から11項 $[(c/d)^{10}]$ のオーダーまで]取って解を求めた。計算を120回繰り返し、それぞれの配置に対する解を平均して次の値を得た。

$$H_I = 2.52, \quad H_{II} = 1.07 \quad (4)$$

結果を図4、5に、二重周期クラックの解と共に示した。モードIIの場合（図5）は、二重周期クラックの結果は $\phi = 45^\circ$ のとき最小となり、Self-Consistentの解に最も近くなる。すなわち、Self-Consistentの解に最も近い結果を与える二重周期クラックの配置は、 $\phi = 45^\circ$ の場合である。Self-Consistentの解はランダムなクラックの配置に対するものであり、 $\phi = 45^\circ$ の場合に最も近い結果が得られるということは妥当であると考えられる。

ところが、モードIの場合（図4）、 $H_I(\phi)$ は極小値を持たず、 $-\infty$ から $+\infty$ まで変化する。Self-Consistentの解と同じ結果を与える二重周期クラックの配置は、 $\phi = 71^\circ$ の場合である。この配置は、モードIIの場合の $\phi = 45^\circ$ とは大きく異なり、クラック間の鉛直方向の距離と水平方向の距離との比は1:0.35である。

これは二重周期の解とランダムな解の比較であり、異なる問題の解を較べているわけであるから、このことから直接結論を引き出すことはできない。しかし、この比較はいくつかの示唆を与えている。二重周期の解は、モードIとモードIIの場合とではその特性が大きく異なるが、Self-Consistent Methodによる解、及びシミュレーションの解にはその違いは現われない。この決定的な違いは、ランダムな解とノンランダムな解の違いに起因していると考えられる。ランダムとはある定義に基づいて人為的に規定されるものであるが、ランダムな解にはどのような意味があるのだろうか？

4. 相互干渉の方向性とクラックの配置を表わすパラメータ

モードIとモードIIにおける結果の相違は何に起因しているのだろうか？ その原因を探ることが、クラックを多数有する材料の構成則を確立するために重要である。

ここで示した二重周期クラックの解はMethod of Pseudotractionsによるものであるが、それはクラック間の相互干渉を評価する手法である。定式化の過程で、クラック間の相互干渉は、あるクラックにより他のクラックの位置に生ずる応力として取り扱われる。ある一つのクラックにより点 (d, θ) （図8）に生ずる応力は、高次項を無視すれば、

$$\Delta \sigma = \sigma(c/d)^2 f_I(\theta) : \text{モードI}, \quad \Delta \tau = \tau(c/d)^2 f_{II}(\theta) : \text{モードII} \quad (5)$$

で与えられ、相互干渉の方向性は $f_I(\theta)$ 、 $f_{II}(\theta)$ によって表わされる。 $f_I(\theta)$ 、 $f_{II}(\theta)$ の値を図9に示すが、モードIとモードIIとでは相互干渉の方向性が大きく異なることがわかる。モードIにおいては、相互干渉の方向依存性が大きい。二重周期クラックの問題では、この $f_I(\theta)$ 、 $f_{II}(\theta)$ の性質と ϕ で表わされるクラックの配置が相まって、 $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ という形で相互干渉の効果が巨視的挙動に現われている。図4に示したモードIにおける結果は、相互干渉の強い方向性に起因しているものと考えられる。

相互干渉の方向性は微視構造の種類や荷重条件によって異なる。Self-Consistent Methodによる評価が妥当でない場合があるとすれば、それは微視構造の間の相互干渉が強い方向依存性を

有している場合であると考えられる。

ここでは最も単純な配置である二重周期クラックを考えた。巨視的弾性定数は、関数 $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ を通してクラックの配置に依存している。関数 $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ はクラック間の相互干渉を評価した結果である。クラックの一般的な配置を考えると、巨視的弾性定数はどのようなパラメータを用いて記述されるべきであろうか？ そのようなパラメータはクラック間の相互干渉とクラックの配置を反映したものでなくてはならず、それはここで現われた $H_I(\phi)$ 、 $H_{II}(\phi)$ の一般化として得られるものと考えられる。その場合、荷重条件により相互干渉の効果が異なることに注意しなければならない。また、クラックの方向が分布している場合には、その分布を表わすクラックテンソルとクラックの空間的分布を表わすパラメータとが連成することが考えられる。



図 8 相互干渉の評価

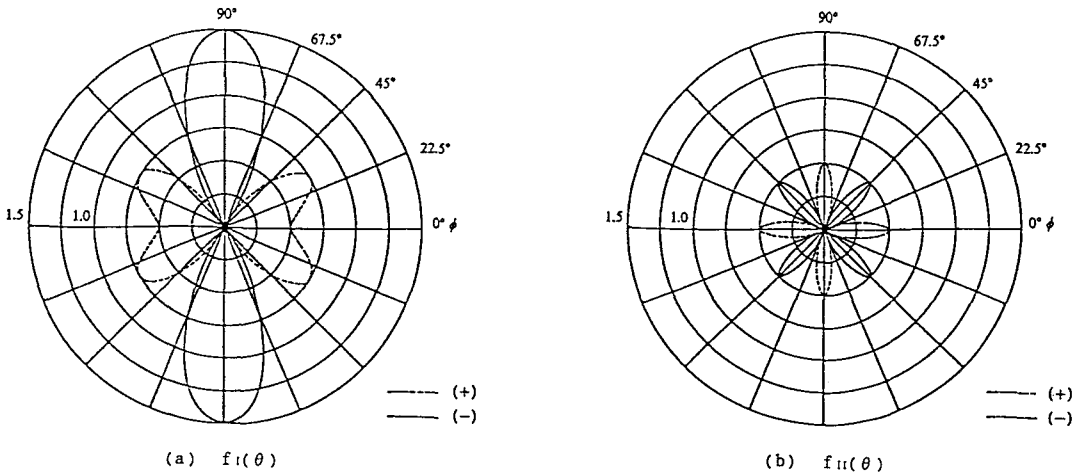


図 9 相互干渉の方向依存性: $f_I(\theta)$ 、 $f_{II}(\theta)$ の変化

5. バラツキの定量化と材料挙動のモデル化

3 節でランダムクラックのシミュレーションの結果を示したが、乱数を発生させクラックの位置を与え、Method of Pseudotractions によって求めた解と式 (2) から求まる H_I 、 H_{II} の値にはかなり大きなバラツキがある。120 回行った計算結果から、0.5 ごとの範囲 (例えば $0.0 \leq H_I \leq 0.5$) に入る相対頻度を図 10 に示す。 H_I 、 H_{II} とも大きくばらつくことがわかる。 H_I 、 H_{II} の平均値は前出のとおりで、それぞれ 2.52、1.07 であるが、標準偏差はそれぞれ 1.68、0.75 である。 H_I は H_{II} に較べてバラツキが大きい。このことは 4 節で議論した相互干渉の方向性の大小と密接に係わっている。バラツキの原因はクラックどうしの相対位置のバラツキであり、それ

が式(5)に表わされる相互干渉の方向性と相まって、巨視的挙動のバラツキとして現われる。モードⅠとモードⅡにおける相互干渉の方向性の違いから、巨視的挙動のバラツキの違いが生じている。

微視構造を有する材料の挙動においてバラツキの存在は本質的であり、それを考えないで平均的な挙動のみを扱うだけでは不十分であろう。3節のランダムクラックのシミュレーションにおいて、計算回数を増やしてゆく場合の平均値と標準偏差の変化を調べると、どちらもあまり変化せず、変動が小さくなってゆく。計算回数を無限回に増やしても標準偏差はゼロにならない。このことはクラック密度を一定にしたまま物体を大きくしても、平均して得られる巨視的挙動のバラツキは小さくならないことを意味している。

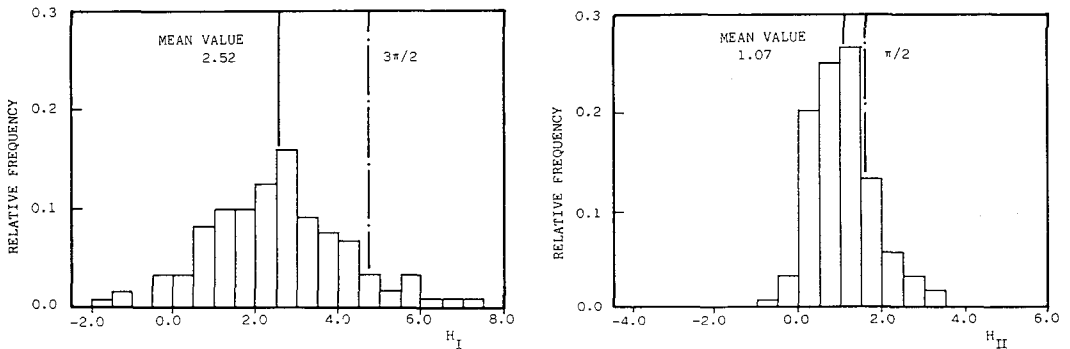


図10 ランダムクラックのシミュレーションにおける H_I 、 H_{II} の相対頻度分布

6. おわりに

ノンランダムの一例として二重周期クラックの問題を考え、Self-Consistent Method 及びシミュレーションによるランダムクラックの解と比較することにより、微視構造を有する材料の挙動のモデル化に関する考察を行った。支配的なメカニズムは微視構造間の相互干渉であり、モデル化にあたっては、微視構造の空間的分布と相互干渉の効果をモデルに取り入れる必要があることが明かとなった。微視構造の空間的分布のバラツキと相互干渉に起因して、材料の巨視的挙動には本質的にバラツキが存在する。モデル化の今後の課題の一つは、このバラツキ予測しうるモデルを構築することであるが、そのためには統計的な取扱いが必要となるものと考えられる。

参考文献

- 1) Oda, M., Suzuki, K., and Maeshibu, T., *Soils and Foundations*, **24**, 27-40 (1984).
- 2) Delameter, W.R., Herrmann, G., and Barnett, D.M., *J. Appl. Mech.*, **42**, 74-80 (1975).
- 3) Delameter, W.R., Herrmann, G., and Barnett, D.M., *J. Appl. Mech.*, **190** (1977).
- 4) Ishida, M., Ushijima, N., and Kishine, N., *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs.*, **A**, **47**, 27-35 (1981).
- 5) Horii, H., and Sahasakmontri, K., *Micromechanics and Inhomogeneity*, Springer, 137-159 (1990).
- 6) Horii, H., and Nemat-Nasser, S., *Int. J. Solids Structures*, **21**, pp.731-745 (1985).

(1990年10月12日受付)