

非線形インクルージョン界面の動的解析

DYNAMIC ANALYSIS FOR A NONLINEAR INTERPHASE OF AN INCLUSION

廣瀬壮一* 北原道弘**

By Sohichi HIROSE and Michihiro KITAHARA

The time-domain boundary integral equation method is applied to the dynamic analysis of a nonlinear interphase of a three dimensional inclusion. The interphase is assumed to be a thin layer which consists of a distribution of nonlinear springs. The tractions are continuous across the interphase, while the displacements are discontinuous from inclusion to matrix. The relationship between traction and displacement discontinuity is nonlinear, which is like a perfect elastoplasticity. The matrix and the inclusion themselves are assumed to be linearly elastic. Therefore the ordinary formulation of the boundary integral equation is made and the nonlinearity of the spring is involved in the form of the boundary condition. Numerical examples are shown for a spherical inclusion subjected to a plane P wave. A comparison is also made between a linear spring and a nonlinear spring.

1. まえがき

複合材料は様々な用途に用いられているが、その力学的挙動は複雑であり、十分に解明されているわけではない。特に、異なる材料の接する界面においては剥離や滑動などの非線形現象が発生し易く、その力学的挙動は非常に複雑なものになる。一方、超音波非破壊評価の分野では、複合材料界面の評価を遠方で検出された波動から定量的に行なおうとする試みがなされている^{(1,3)・(14)}。界面における剥離はどの程度なのか。また、界面での損傷はどれくらいか。このような問題に定量的に答えるためには、材料界面を適当な非線形モデルを用いてモデル化し、動的な非線形解析を行なわなければならない。このような背景の下に、本研究は、界面を非線形バネでモデル化し、時間域境界積分方程式法を用いて3次元インクルージョン界面での動的挙動を明らかにするものである。インクルージョン界面に線形バネを用いた3次元解析は周波数域において Kitahara et al.⁽¹⁾によつて、また、時間域において Hirose⁽²⁾によつてなされているが、本研究は Hirose⁽²⁾による線形解析を非線形解析に拡張したものである。

時間域境界積分方程式はこれまでいくつかのクラックや界面に関する非線形問題に適用されてきた。Burridge⁽³⁾, Das and Aki⁽⁴⁾, Andrews⁽⁵⁾は積分方程式法を地震断層の破壊問題に応用した。彼らは均質無限弾性体内にある2次元平面せん断クラックの破壊問題を解析している。Das^{(6)・(8)}は同様なアプローチにより3次元平面せん断クラックの破壊問題を解析した。Hirose and Achenbach⁽⁹⁾は3次元円板状クラックの引張破壊

* 工博 岡山大学助手 工学部土木工学科 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

** 工博 東海大学助教授 海洋学部海洋土木工学科 (〒424 清水市折戸3-20-1)

問題を境界積分方程式により解析し、AE理論との比較、検討を行なっている。また、Wolf and Darbre¹⁰⁾ は2次元粘弾性半無限体と剛基礎の動的相互作用問題を時間域境界積分方程式により解析した。Wijeyewickrema and Keer¹¹⁾、Mendelsohn and Doong¹²⁾ は2次元動的接触問題を境界積分方程式により定式化し、SH波動に関していくつかの解析例を示している。

2. 問題

Fig.1に示すように3次元無限領域Dの内部にインクルージョン $\bar{D}$ が存在すると仮定する。領域Dおよび $\bar{D}$ は共に均質等方線形弾性体であり、それぞれ材料定数が (c_L, c_T, ρ) と $(\bar{c}_L, \bar{c}_T, \bar{\rho})$ により与えられているものとする。ここに、 c_L, c_T は縦波(P波)と横波(S波)の波速であり、 ρ は密度を表わす。また、 $\bar{\cdot}$ はインクルージョンに関する量であることを示す。外部領域Dとは異なる材料定数を持つインクルージョン $\bar{D}$ に入射波 u^{in} が入射すると、相互作用により散乱波 u^{sc} が発生する。通常、インクルージョンの解析では、外部領域Dとインクルージョン $\bar{D}$ は境界Sにおいて完全に接合されており、変位と表面力が共に連続であると仮定することが多い。しかし、ここでは、Fig.1に示すように境界S上にバネを挿入し、表面力は連続であるが、変位は不連続であるような力学的挙動を表現する。さらに、挿入されたバネは非線形弾性バネであると仮定する。バネ定数など詳細については数値解析例において示す。

本研究では、上述のようなバネ結合されたインクルージョンに入射波 u^{in} が入射したときの境界Sでの動的挙動を明らかにする。

3. 境界積分方程式

前節で述べたように、領域Dおよび $\bar{D}$ は均質等方線形弾性体である。したがって、境界Sにおける非線形バネの存在にかかわらず、Dおよび $\bar{D}$ における弾性波動場に対する境界積分方程式は容易に導ける。

まず、領域Dにおける全変位場 u の積分表現は次のように書ける。

$$\begin{aligned} u_k(x, t) = & u_k^{in}(x, t) + \int_S U_{ik}(y, t; x) * t_i(y, t) dS_y \\ & - \int_S T_{ik}(y, t; x) * u_i(y, t) dS_y, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $*$ は時間 t に関する合成積を表わし、 t_i は表面力 t の i 方向成分を示す。また、 U_{ik}, T_{ik} は次式で与えられる基本解である。

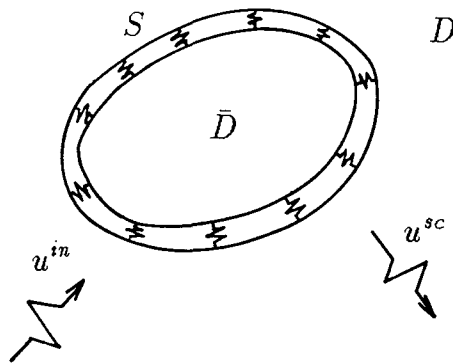


Fig.1 Elastic inclusion in spring contact.

$$U_{ik}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \left(\frac{3r_{,i}r_{,k}}{r} - \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \int_{c_L^{-1}}^{c_T^{-1}} \lambda \delta(t - \lambda r) d\lambda \right. \\ \left. + \frac{r_{,i}r_{,k}}{r} \left[\frac{1}{c_L^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_L}\right) - \frac{1}{c_T^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_T}\right) \right] + \frac{\delta_{ik}}{rc_T^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_T}\right) \right\}. \quad (2)$$

$$T_{ik}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) = C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial y_j} U_{pk}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}). \quad (3)$$

ただし、 $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ であり、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルである。また、 C_{ijkl} は弾性定数を表わす。

式(1)における点 $\mathbf{x} \in D$ を境界上の点 $\mathbf{x} \in S$ に極限移行すると次の境界積分方程式を得ることができる。

$$c_{ik}(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}, t) + p.v. \int_S T_{ik}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) * u_i(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \\ - \int_S U_{ik}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) * t_i(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

ただし、 $c_{ik}(\mathbf{x})$ は自由項であり、p.v.は主値積分を示す。時刻 $t=N\Delta t$ において式(4)を離散化し、マトリックス形式で表わすと以下ようになる。

$$\sum_{m=1}^N \left([T]^{N-m} \{u\}^m - [U]^{N-m} \{t\}^m \right) = \{u^{\text{in}}\}^N. \quad (5)$$

ただし、 $\{ \}^m$ は時刻 $t=m\Delta t$ における量を表わし、式(4)における自由項 c はマトリックス $[T]$ の対角項に含まれている。

領域 $\bar{D}$ における変位 $\bar{u}$ に対する境界積分方程式は式(4)を導出したのと同様に次のように書ける。

$$\bar{c}_{ik}(\mathbf{x}) \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) + p.v. \int_S \bar{T}_{ik}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) * \bar{u}_i(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \\ - \int_S \bar{U}_{ik}(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}) * \bar{t}_i(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} = 0 \quad \mathbf{x} \in S. \quad (6)$$

上式を離散化し（離散化の手法については後述）、マトリックス表示すると以下ようになる。

$$\sum_{m=1}^N \left([\bar{T}]^{N-m} \{\bar{u}\}^m - [\bar{U}]^{N-m} \{\bar{t}\}^m \right) = \{0\}. \quad (7)$$

4. 界面での境界条件、および方程式系

第2節で述べたように本研究では境界 S に非線形弾性バネを挿入し、インクルージョン界面での力学的挙動を表現する。

簡単のために、まず、バネが線形の場合を考えよう。この時、境界 S 上の表面力は変位の不連続量に比例するので、次の条件が成立する。

$$t(x, t) = -\bar{t}(x, t) = \mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{u}}(x, t) - \mathbf{u}(x, t)) \quad \mathbf{x} \in S \quad t \in [0, \infty) \quad (8)$$

ここに $\mathbf{k}$ はバネ定数である。式(8)を用いて式(5)と(7)を結合すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{k} \\ -\bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{k} & \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}^0 \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^N = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{\text{in}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}^N \\ - \sum_{m=1}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{T} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{k} \\ -\bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{k} & \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}^{N-m} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^m \quad (9)$$

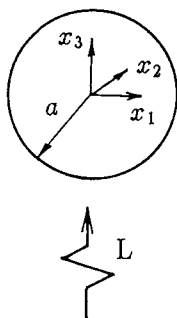


Fig.2 A spherical inclusion subjected to a plane incident wave.

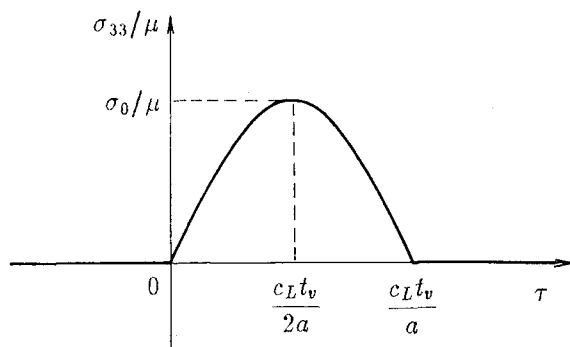


Fig.3 Variation of an incident stress σ_{33} with time.

を得る。上式の右辺はすべて既知であるので、各時間ステップでの変位 $\{u, \bar{u}\}^N$ ($N=1, 2, \dots$) を順次求めることができる。

バネが非線形弾性バネである時、境界 S における境界条件は一般に

$$t(x, t) = -\bar{t}(x, t) = f(\bar{u}(x, t) - u(x, t)) \quad x \in S \quad t \in [0, \infty) \quad (10)$$

と表わされる。 f はバネの非線形性を表わす関数である。この場合、解くべき方程式系は式(9)と同様の形式に表わすことができる。式(9)との唯一の相違点はバネ定数 k が境界 S での変位の不連続量に応じて時々刻々変化することである。このことを考慮して各時刻毎に式(9)を解けば界面における非線形挙動を明らかにすることができる。

5. 数値計算例

解析例として Fig.2に示すような球状インクルージョンに平面引張（あるいは圧縮）P波が真下から入射した場合を考えた。一例として、入射波は応力成分 $\sigma^{\pm}$ が次式で表わされる平面引張（圧縮）P波であると

$$\sigma_{ij}^{\pm} = \frac{\pm \sigma_0}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{a\pi}{c_L t_v} \tau - \frac{\pi}{2}\right) \{\lambda \delta_{ij} + 2\mu \delta_{i3} \delta_{j3}\} H(\tau) H\left(\frac{c_L t_v}{a} - \tau\right) \quad (11)$$

ただし、 $\tau = (c_L t - (x_3 + a))/a$ である。すなわち、主応力成分である σ_{33} は、Fig.3に示すように継続時間 $c_L t_v/a$ が3であり、 $\tau = c_L t_v/(2a)$ において最大応力 σ_0 を有するものである。

インクルージョン $\bar{D}$ および外部の母材 D の弾性定数は以下のように与えた。

$$\bar{c}_L/c_L = 2, \quad \bar{c}_T/c_T = 2, \quad \bar{c}_L/\bar{c}_T = \sqrt{3}, \quad c_L/c_T = \sqrt{3} \quad \bar{\rho}/\rho = 1 \quad (12)$$

インクルージョン内の波速が外部の波速に比べて2倍速いことからインクルージョンは外部の母材に比べて4倍の硬さを持っている。

複合材料の種類は多い上に、材料界面での動的特性はほとんど明らかになっていない。そのため、ここでは一数值解析例として次式で表わされる最も簡単な非線形バネを用いることにする。

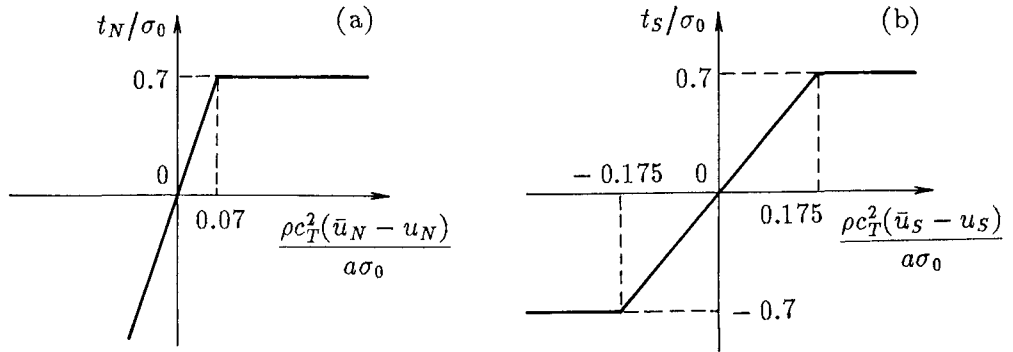


Fig.4 Nonlinear relationship between the displacement discontinuity and the traction on the boundary S. (a) Normal and (b) tangential components.

$$t_N/\sigma_0 = \begin{cases} 10\mu(\bar{u}_N - u_N)/(a\sigma_0) & \mu(\bar{u}_N - u_N)/(a\sigma_0) \leq 0.07 \\ 0.7 & \mu(\bar{u}_N - u_N)/(a\sigma_0) > 0.07 \end{cases} \quad (13)$$

$$t_S/\sigma_0 = \begin{cases} 4\mu(\bar{u}_S - u_S)/(a\sigma_0) & |\mu(\bar{u}_S - u_S)/(a\sigma_0)| \leq 0.175 \\ \pm 0.7 & \mu(\bar{u}_S - u_S)/(a\sigma_0) \geq 0.175 \end{cases} \quad (14)$$

ここに、下添字の N, Sはそれぞれ法線方向、及び接線方向の成分を表わし、 $\bar{}$ はインクルージョン側の値を表わしている。式(13)、(14)をグラフに表わしたものが Fig.4(a)、(b)である。法線方向のバネは圧縮側には線形であるが、引張側には完全弾塑性の性質を持つ。一方、接線方向のバネはいずれの方向にも完全弾塑性の特性を持つものである。

式(4)および(6)で表わされた積分方程式の離散化においては、変位を時間に関して一次線形関数で、空間に関して要素内一定の補間関数で表わし、表面力を時間、空間共に区間内一定の関数によって補間した。数値解析においては球面を624個の一定要素に分割し、 $c_T \Delta t/a=0.15$ の時間ステップ幅で解析を行なった。なお、ここで扱っている問題は非線形問題であるので、本来ならば各時間ステップごとの解の収束計算が必要である。しかし、ここでは単に前時間ステップにおける解の代入計算により時間ステップを進め、収束計算は行なっていない。このため幾分解の精度は低下している可能性がある。

Fig.5は平面引張P波が入射した時の境界S上における表面力の半径方向成分 t_r の分布を初期のいくつかの時間ステップの対してプロットしたものである。右半分は非線形バネに対する結果であり、左半分は線形バネに対する結果である。非線形バネの場合、球の上下端においてバネが降伏し、表面力が上限値 $t_r/\sigma_0=0.7$ に達している様子がわかる。Fig.6は平面圧縮P波が入射した時の境界S上の表面力の経時変化を示したものである。境界Sに挿入したバネは圧縮力に対してはいつまでも線形的挙動を示す。したがって、この場合の結果は線形バネに対する結果と全く同じとなっている。Fig.7(a)、(b)はそれぞれ平面引張P波、及び圧縮P波が入射した時の境界上の4点A～Dにおける x_3 方向変位の経時変化を示したものである。引張P波が入射した場合、バネが降伏して向かい合う点の間の変位の不連続量が大きくなっていることがわかる。また、入射応力波が通過した後(点A, Cでは $c_L t/a=3$ 以後、点B, Dでは $c_L t/a=5$ 以後)はバネが線形に回復し、向かい合う点での変位の不連続量は急速に減少している。一方、圧縮P波が入射した場合は変位の不連続量がそれほど大きくなることなく静的解へ漸近している。

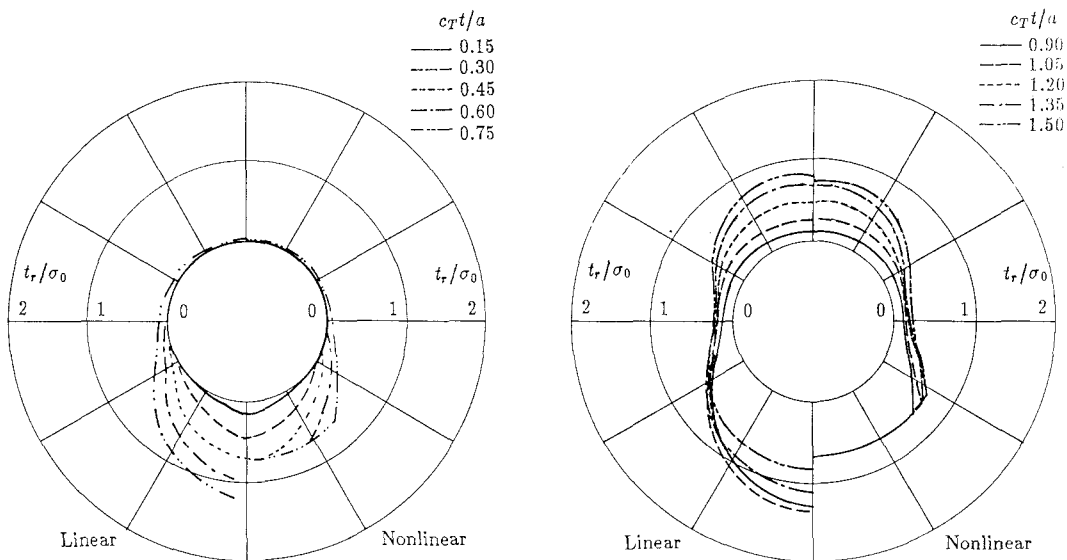


Fig.5 Variation of the traction t_r for various values of $c_T t/a$.
The incident wave is a tensile P wave.

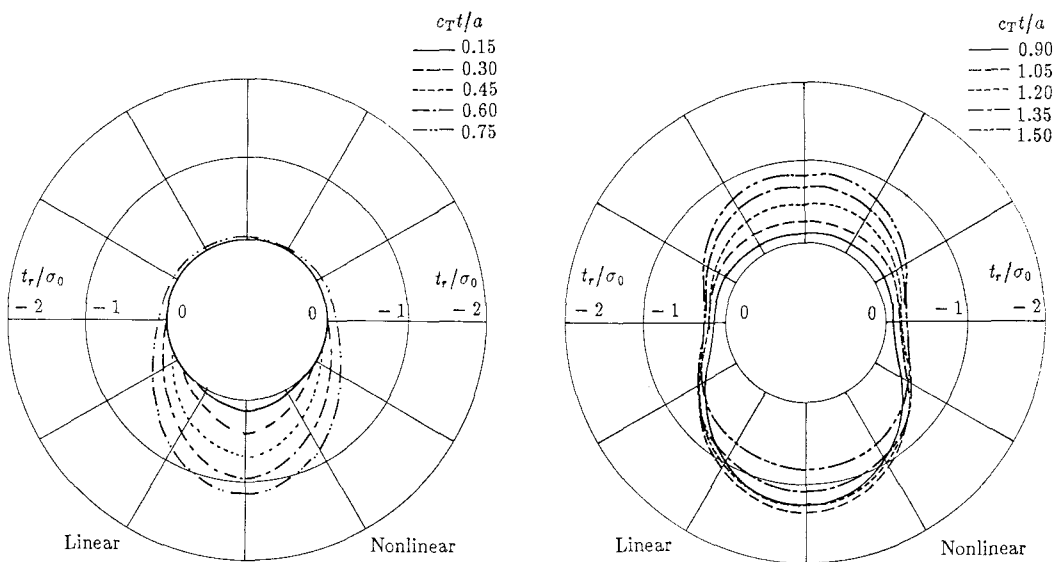


Fig.6 Variation of the traction t_r for various values of $c_T t/a$.
The incident wave is a compressive P wave.

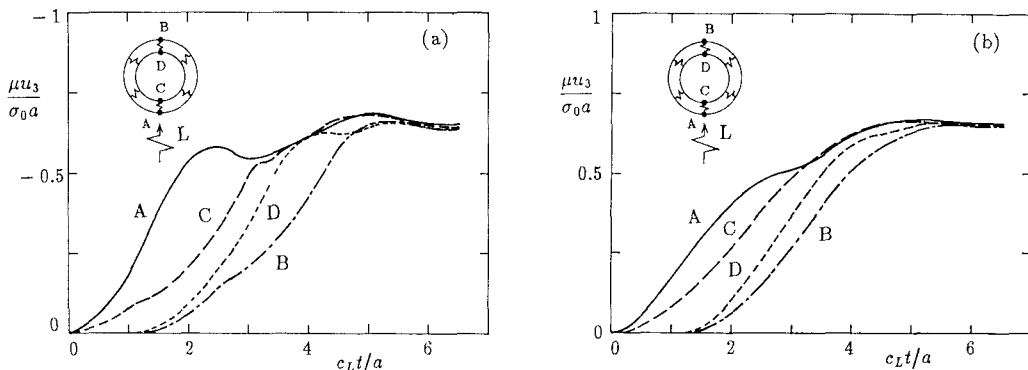


Fig.7 Variation of the vertical displacements with time at several points.

(a) Tensile and (b) compressive incident P waves.

6. おわりに

本研究では、時間域境界積分方程式法を用いて非線形インクルージョン界面の動的解析を行なった。界面での非線形性はバネを用いてモデル化した。ここでは、最も単純な完全弾塑性的特性を持つ非線形バネを用いたが、今後、界面での剥離や接触なども考慮できる境界条件を導入する予定である。また、非線形界面を有するインクルージョンからの散乱波を計算し、界面での損傷評価のための基礎データを蓄積する予定である。

参考文献

- 1) Kitahara, M., K. Nakagawa and J. D. Achenbach, Backscatter from a spherical inclusion with compliant interphase characteristics, in D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds.), Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol.8, Plenum Press, New York, 1989.
- 2) Hirose, S., Time domain boundary integral equation method for 3-D scattering problems by inclusions, in M. Tanaka et al. (eds.), Boundary Elements XII Vol.1, Comput. Mech. Pub., Southampton (co-published with Springer-Verlag, Berlin), 1990, pp.555-565.
- 3) Burridge, R., The numerical solution of certain integral equations with non-integrable kernels arising in the theory of crack propagation and elastic wave diffraction, Philos. Trans. Roy. Soc. London Vol.A265, pp.353-381, 1969.
- 4) Das, S. and K. Aki, A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation, Geophys. J. Roy. Astr. Soc. Vol.50, pp.643-668, 1977.
- 5) Andrews, D. J., Dynamic plane-strain shear rupture with a slip-weakening friction law calculated by a boundary integral method, Bull. Seism. Soc. Amer. Vol.75, pp.1-21, 1985.
- 6) Das, S., A numerical method for determination of source time functions for general three-dimensional rupture propagation, Geophys. J. Roy. Astr. Soc. Vol.62, 591-604, 1980.
- 7) Das, S., Three-dimensional rupture propagation and implications for the earthquake source mechanism, Geophys. J. Roy. Soc. Vol.67, pp.373-393, 1981.
- 8) Das, S. and B. V. Kostrov, On the numerical boundary integral equation method for three-

dimensional dynamic shear crack problems, J. Appl. Mech. Vol.54, pp.99-104, 1987.

- 9) Hirose, S. and J. D. Achenbach, Acoustic emission and near-tip elastodynamic fields of a growing penny-shaped crack, Eng. Fract. Mech. (submitted for publication)
- 10) Wolf, J. P. and G. R. Darbre, Non-linear soil-structure interaction analysis based on the boundary-element method in time domain with application to embedded foundation, Earthq. Eng. Struct. Dyn. Vol.14, pp.83-101, 1986.
- 11) Wijeyewickrema, A. C. and L. M. Keer, Nonlinear antiplane response of rigid inclusion to incident stress wave, J. Eng. Mech. ASCE Vol.113, pp.1565-1583, 1987.
- 12) Mendelsohn, D. A. and J.-M. Doong, Transient dynamic elastic frictional contact: A general 2D boundary element formulation with examples of SH motion, Wave Motion Vol.11, pp.1-21, 1989.
- 13) Achenbach, J. D., O. K. Parikh and Y. C. Lu, Wave phenomena related to nonlinear mechanical behavior of adhesives, in D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds.), Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol.9, Plenum Press, New York, 1693-1700, 1990.
- 14) Rose, J. H., Reflection coefficients for defective diffusion bonds, in D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds.), Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol.9, Plenum Press, New York, 1317-1322, 1990.

(1990年10月12日受付)