

3次元周期亀裂群の解析について

ON ANALYSIS OF THREE-DimensionALLY PERIODICALLY DISTRIBUTED CRACKS

堀 宗朗* 三浦 尚**

by Munee HORI and Takashi MIURA

A three-dimensional problem of periodically distributed cracks is considered. By studying an equivalent inclusion method for an isolated crack in an infinite domain, found is a quite effective scheme to solve this kind of problem; the essentially same limiting procedure of flattening an oblate spheroidal cavity to a penny-shaped crack can be applied for periodically distributed cracks. It is shown that, despite the difference in a mathematical tool (the Green function for the isolated crack and the Fourier series expansion for the periodically distributed cracks), the resulting tensorial equations that determine the equivalent eigenstrains are of the same mathematical form. A stress intensity factor of the cracks subjected to uniaxial tension normal to their faces is computed as one simple result according to the proposed analysis method.

1. 序

複数の亀裂を含む材料の挙動を考える際、個々の亀裂の挙動と同様に隣接する亀裂の間に働く相互作用の評価はきわめて重要な問題である。何故なら、相互作用によって亀裂端部での歪や応力の集中が増加し、本質的に局所的な現象である破壊現象の発生・進行が助長されるからである。通常、亀裂や亀裂を含む材料の解析に使われるモデルは、無限体中の孤立亀裂である(図1参照)。一方、亀裂間の相互作用を考えるために、規則的に亀裂が分布した周期構造のモデルが使われることがある(図2参照)。前者は、2次元や3次元の設定においてグリーン関数を利用した一般的解法が提案されている^{1), 2)}。後者ではいくつかの2次元問題が解かれているが^{3), 4)}、3次元の設定での一般的解析手法はその複雑さのため確立していない。

相互作用が正確に評価できるため、周期構造モデルは相互作用の影響が大きい現象の解析に適している⁵⁾。近年、その基本的な数学的性質が解明されたことにより^{6), 7)}、破壊現象に伴う問題に対し2次元のみならず3次元の周期構造モデルの適用が期待されている。本論文は、その数学的結果を基に、周期的に分布する亀裂群の3次元問題を周期構造を用いて一般的に解析する手法について報告する。

本論文では、亀裂をきわめて薄い空隙とみなし、Equivalent Inclusion法によって空隙問題の解を求め、ついで空隙の厚さが0に近づくときの解の極限を求めて亀裂問題を解くことを図る(図3参照)。ここで、

* Ph.D 東北大学講師 工学部土木工学科 (〒980 宮城県仙台市青葉区青葉)

** 工博 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒980 宮城県仙台市青葉区青葉)

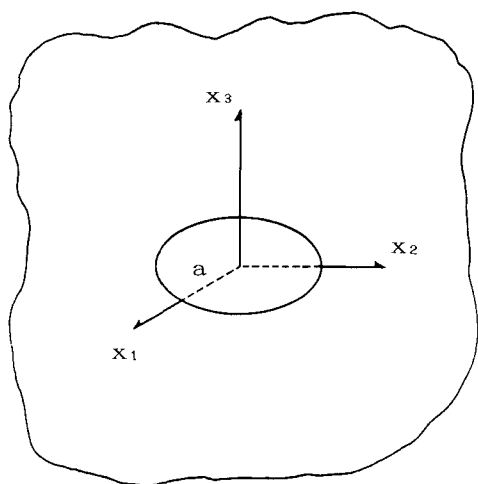


図1 無限体中の孤立亀裂

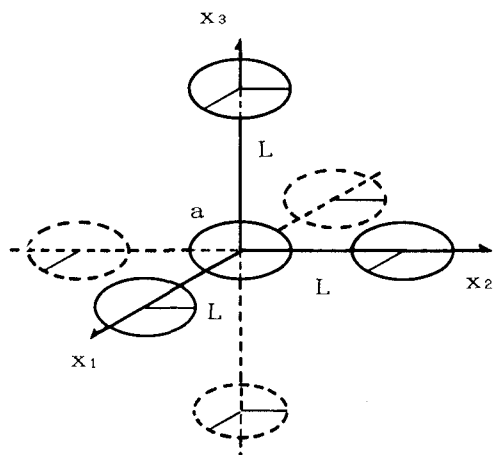


図2 周期亀裂群

Equivalent Inclusion法は、適当なアイゲン歪の分布する均一体を仮想的に考え、その均一体が空隙を含む不均一体と同一の物理場をもつようなアイゲン歪を求めるものであり^{8), 9)}、アイゲン歪に対する積分方程式が得られる。より明瞭な理解のために、無限体中の孤立した亀裂に対応させてこの手法を周期亀裂群に適應する。この積分方程式は孤立亀裂と周期亀裂群とで全く同じ数学的形式に帰着することが示される。また、空隙の厚さを0にする極限操作も全く同一の形式で行うことが可能となることも示される。

簡単のため、亀裂は円盤状 (penny-shaped) であり、亀裂の周りの材料は弾性係数 $C = \lambda \delta \otimes \delta + 2\mu I$ の等方線形弾性体と仮定する。ここで、 λ と μ はLameの弾性係数、 δ は Kronecker のデルタ、 I は4階の対称単位テンソルである。他のより一般的な場合に対してここに示される解析方法は適用可能である。

2. 3次元無限体内の孤立亀裂

3次元の均一無限体内の孤立楕円体の問題に関する Eshelby の解に基づく⁸⁾、Equivalent Inclusion法を用いた遠方応力 σ^∞ が働くときの孤立亀裂問題の解法を示す。亀裂面に力の働いていない円盤状亀裂は楕円体空隙の厚さが0になった極限とみなすことができるので¹⁰⁾、まず最初に楕円体空隙の問題を考える。

楕円体空隙を含む不均一体の代わりに、均一弾性体 V を考え、ついで適当なアイゲン歪 $e^*(x)$ が楕円体領域 Ω に分布した場合を考える。 V の弾性を C とする。 $e^*(x)$ が V 内に発生させる応力場 $\sigma(x)$ は

$$\sigma(x) = - \int_{\Omega} \lambda(x-y) : e^*(y) dV_y - C : e^*(x) \quad x \in V. \quad (2.1)$$

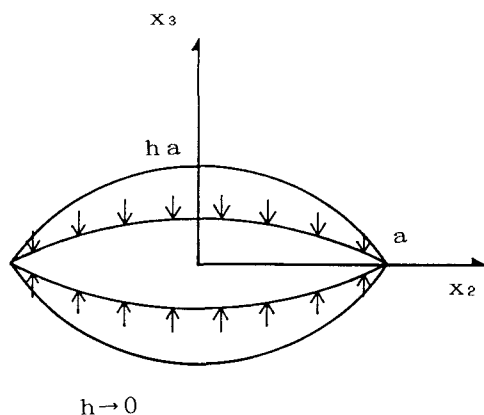


図3 楕円体空隙の極限としての亀裂

ここで、 $\lambda(\mathbf{x})$ はVのグリーン関数 $G(\mathbf{x})$ が決定する4階のテンソル場 ($\lambda_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{ijpq} G_{pr}/\partial x_q \partial x_s(\mathbf{x}) C_{rskl}$) であり⁹⁾、 $:$ は2階のコントラクションを表す。遠方応力 σ° が作用するとき、楕円体領域 Ω 内で応力が消えるようなアイゲン歪 $\varepsilon^*(\mathbf{x})$ を求める。この $\varepsilon^*(\mathbf{x})$ によって、Vの物理場(応力・歪・変位場)は、同じ σ° が作用する時の楕円体空隙を含む不均一体の物理場と同一になる。式(2.1)より、この $\varepsilon^*(\mathbf{x})$ は次の積分方程式を満足する。

$$-\int_{\Omega} \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : \varepsilon^*(\mathbf{y}) dV_y - C : \varepsilon^*(\mathbf{x}) + \sigma^\circ = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.2)$$

積分方程式(2.2)は $\varepsilon^*(\mathbf{x})$ について線形であり解析的に一意的に解かれる。その解は、

$$\varepsilon^*(\mathbf{x}) = (\text{一定}) = (C+\Lambda)^{-1} : \sigma^\circ. \quad (2.3)$$

ここで、テンソル Λ は、弾性 C と楕円体領域 Ω とで決定される Eshelbyのテンソル S によって $-C:S$ として与えられる。

楕円体領域 Ω の主軸を $a_1 = a_2 = a$ 、 $a_3 = ha$ とし、 h を0にとる極限を考える。この Ω の極限は円盤状亀裂領域に対応する(図3参照)。 Ω の主軸と対応した直交座標系でのテンソル Λ の成分を、 h に関して2次以上の項を落として表わすと、

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{1111} & \Lambda_{1122} & \Lambda_{1133} \\ \Lambda_{2211} & \Lambda_{2222} & \Lambda_{2233} \\ \Lambda_{3311} & \Lambda_{3322} & \Lambda_{3333} \end{pmatrix} \sim -\frac{2\mu}{1-2\nu} \begin{pmatrix} \nu^2/(1-\nu) & \nu^2/(1-\nu) & \nu \\ & \nu^2/(1-\nu) & \nu \\ \text{sym.} & & 1-\nu \end{pmatrix} + \frac{\pi\mu h}{16(1-\nu)} \begin{pmatrix} 13-(1-16\nu) & -4(1+2\nu) \\ & 13 & -4(1+2\nu) \\ \text{sym.} & & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{3i3i} \sim -\mu + \frac{\pi\mu(2-\nu)h}{4(1-\nu)} \quad (i=1,2), \quad \Lambda_{1212} \sim -\frac{\pi\mu(7-8\nu)h}{16(1-\nu)} \quad (2.4a \sim c)$$

($\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{klij}$)。ここで、 Λ_{33ii} と Λ_{3i3i} (i not summed) の h に関する0次の項は $-C_{33ii}$ と $-C_{3i3i}$ であるから、 $C+\Lambda$ の h に関する0次の項は特異となり、逆テンソルが存在しない。したがって、 $h \rightarrow 0$ の極限で式(2.3)の $(C+\Lambda)^{-1}$ と ε^* は発散する。 ε^* の成分の内、 h の-1次の項をもつものは、

$$\varepsilon_{33}^* \sim \frac{1}{h} \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \sigma_{33}, \quad \varepsilon_{3i}^* \sim \frac{1}{h} \frac{8(1-\nu)}{(7-8\nu)\pi\mu} \sigma_{3i} \quad (i=1,2). \quad (2.5a,b)$$

式(2.5)で与えられた $h \rightarrow 0$ で発散する ε^* が孤立亀裂に対応したアイゲン歪である。ここで、 $\varepsilon^*(\mathbf{x})$ は発散するけれども、積分領域の厚さが消えるため、結果として応力場は亀裂端部以外では有限となることに注意すべきである。

式(2.4)から明らかなように、 $h \rightarrow 0$ の極限操作の結果、 $(C+\Lambda)^{-1}$ に現われる Λ の成分は、 Λ_{3333} 、 Λ_{2323} 、 Λ_{3131} だけである。同様な極限操作は $C+\Lambda$ と等価な $I-S$ に対しても可能であるが、1) $I-S$ は対称テンソルではない、2) $(I-S)^{-1}$ に S のいろいろな成分が複雑に現われる、という2つの理由によって、 $C+\Lambda$ に対する極限操作の方がより簡単であると考えられる。

3. 3次元周期構造の亀裂

前章での結果を基に、周期亀裂群の問題を考える。簡単のため、亀裂群は x_3 -座標に垂直で、各座標方向に等間隔 $2L$ で配置される(図2参照)。この不均一周期構造の代わりに、 $2L \times 2L \times 2L$ の単位体 U の中央の半径 a 厚さ ha の楕円体領域 Ω にアイゲン歪が分布している均一周期構造を考える。ついで、1) 一様

応力 σ° の下で Ω 内の応力場を消すアイゲン歪を求め、2) Ω が $h \rightarrow 0$ となる場合のそのアイゲン歪の極限をとる。均一周期構造は、1)の場合は周期空隙群に、2)の場合は(亀裂面に力の働いていない)周期亀裂群に対応していることは明かである(弾性問題のフーリエ級数展開による基礎的解法は文献^{7), 9), 11)}を参照)。

フーリエ級数展開によって^{6), 9)}、 Ω 内の任意のアイゲン歪場 $\mathbf{e}^*(\mathbf{x})$ がつくる周期応力場 $\sigma(\mathbf{x})$ は、次のように与えられる。

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{\xi} (-\lambda^p(\xi) - C) : f < \mathbf{e}^*(\mathbf{y}) \exp(i \xi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) >_{\Omega} \quad \mathbf{x} \in V. \quad (3.1a)$$

ここで、 f は単位体 U に対する楕円体領域 Ω の体積比($= h \pi (a/L)^3/6$)、 $< >_{\Omega}$ は Ω でとられる体積平均である。4階のテンソル $\lambda^p(\xi)$ は、 $\xi = \xi/|\xi|$ と定義すると、 $\xi \neq 0$ に対し、

$$\begin{aligned} \lambda^p(\xi) = 2 \left\{ \frac{\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} \delta \otimes \delta + \frac{\nu}{1-\nu} (\delta \otimes \xi \otimes \xi + \xi \otimes \xi \otimes \delta) \right. \\ \left. + \text{sym}(\xi \otimes \delta \otimes \xi) - \frac{\nu}{1-\nu} \xi \otimes \xi \otimes \xi \otimes \xi \right\}, \end{aligned} \quad (3.1b)$$

また $\xi = 0$ に対し、 $\lambda^p(0) = 0$ である。

積分方程式(2.2)と同様に、周期空隙群に対応するアイゲン歪 $\mathbf{e}^*(\mathbf{x})$ は、式(3.1a)を用いた次の積分方程式を満足する。

$$\sum_{\xi} (-\lambda^p(\xi) - C) : f < \mathbf{e}^*(\mathbf{y}) \exp(i \xi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) >_{\Omega} + \sigma^\circ = 0 \quad \mathbf{x} \in U. \quad (3.2)$$

孤立楕円体空隙に対応する積分方程式(2.2)と異なり、周期楕円体空隙群に対応する積分方程式(3.2)の解は $\mathbf{e}^*(\mathbf{x}) = (\text{一定})$ ではない。しかし、式(3.2)の左辺の Ω での体積平均を計算し、それを 0 としたテンソル式をアイゲン歪 $\mathbf{e}^*(\mathbf{x})$ の体積平均、 $\bar{\mathbf{e}}^* = < \mathbf{e}^*(\mathbf{x}) >_{\Omega}$ で解く場合、その解の $\bar{\mathbf{e}}^*$ が十分良い近似を与えることが数値計算によって示されている¹¹⁾。すなわち、

$$\Lambda^p = \sum_{\xi} f g(-\xi) g(\xi) \lambda^p(\xi), \quad g(\xi) = < \exp(i \xi \cdot \mathbf{x}) >_{\Omega}, \quad (3.3a, b)$$

で定義されるテンソル Λ^p を用いると、積分方程式(3.2)の左辺の Ω での体積平均は以下のような $\bar{\mathbf{e}}^*$ を決定するテンソル式に帰着する。

$$\bar{\mathbf{e}}^* = (C + \Lambda^p)^{-1} : \sigma^\circ. \quad (3.3c)$$

この式(3.3c)から、 $\mathbf{e}^*(\mathbf{x}) \sim \bar{\mathbf{e}}^*$ と近似される。テンソル Λ と Λ^p の違いを除けば、式(3.3c)は式(2.3)と全く同じ形式である。以下、式(3.2b)で定義される Λ^p の $h \rightarrow 0$ の極限を考える。

3.1 亀裂に対応する積分 g

定義式(3.3b)から明らかなように、積分 $g(\xi)$ は Ω 内で1、 Ω 外で0をとる階段関数 $H(\mathbf{x})$ のフーリエ係数である。ここで、任意の Ω に対し $H(\mathbf{x})$ と $g(\xi)$ は次の関係式を満足する。

$$< H(\mathbf{x}) >_{\Omega} = 1 = \sum_{\xi} f g(-\xi) g(\xi). \quad (3.4a)$$

式(3.4a)は Ω の $h \rightarrow 0$ の極限でも成立する($h = 0$ では $f = 0$ となることに注意)。

楕円体領域 Ω の積分 $g(\xi)$ は解析的に計算され、 $\Xi = a \{ (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (h \xi_3)^2 \}^{1/2}$ とおくと、

$$g(\xi) = 3 \Xi^{-3} (\sin \Xi - \Xi \cos \Xi). \quad (3.4b)$$

したがって、 $g(-\xi) = g(\xi)$ である。また、 ξ に関して $O(g(\xi)) = |\xi|^{-2}$ の速さで、 $|\xi|$ が増加に伴い $g(\xi)$ は減少していく。 $h \rightarrow 0$ の極限において、 $g(\xi)$ は有限の値を取り($g(0) = 1$ であることに注意)、 ξ_3 に依存しないことがわかる。

3.2 亀裂に対応するテンソル Λ^p

式(3.4)を用いて、式(3.3a)で定義される Λ^p の成分の $h \rightarrow 0$ での極限を考える。 ξ の鏡像(成分が $\pm \xi_i$ で与えられる点)に対して、式(3.1b)の $\lambda^p(\xi)$ の和をとると、 λ^p_{ijij} と λ^p_{jijj} (i, j not summed)以外の成分の和は打ち消し合う⁶⁾。よって、 $|\xi| = 1$ より ξ_3 を消去し、式(3.4)を用いて、 Λ^p の0でない成分を次のように計算する。

$$\begin{pmatrix} \Lambda^p_{1111} & \Lambda^p_{1122} & \Lambda^p_{1133} \\ \Lambda^p_{2211} & \Lambda^p_{2222} & \Lambda^p_{2233} \\ \Lambda^p_{3311} & \Lambda^p_{3322} & \Lambda^p_{3333} \end{pmatrix} = - (1-f) \frac{2\mu}{1-2\nu} \begin{pmatrix} \nu^2/(1-\nu) & \nu^2/(1-\nu) & \nu \\ & \nu^2/(1-\nu) & \nu \\ \text{sym.} & & 1-\nu \end{pmatrix} \\ - \frac{2\mu}{1-\nu} \sum_{\xi} f g(-\xi) g(\xi) \begin{pmatrix} 2(\xi_1)^2 - (\xi_1)^4 & \nu \{ (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \} - (\xi_1)^2 (\xi_2)^2 & -\nu (\xi_2)^2 - (\xi_1)^2 (\xi_3)^2 \\ & 2(\xi_2)^2 - (\xi_2)^4 & -\nu (\xi_1)^2 - (\xi_2)^2 (\xi_3)^2 \\ \text{sym.} & & \{ (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \}^2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^p_{3323} = \Lambda^p_{3131} = -\mu + \mu \sum_{\xi} f g(-\xi) g(\xi) \left\{ (\xi_1)^2 + \frac{2}{1-\nu} (\xi_1)^2 (\xi_3)^2 \right\},$$

$$\Lambda^p_{212} = -\mu \sum_{\xi} f g(-\xi) g(\xi) \left\{ (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 - \frac{2}{1-\nu} (\xi_1)^2 (\xi_3)^2 \right\} \quad (3.5a \sim c)$$

($\Lambda^p_{jkl} = \Lambda^p_{ikl} = \Lambda^p_{jlk} = \Lambda^p_{lik}$)。式(3.5a~c)の第1項は Λ の h に関する0次の項と一致する。

式(3.5)の ξ に関する3重無限和は、実は2重無限和に帰着する。ベクトル ξ の定義より $(\xi_i)^2 = (n_i)^2 / ((n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2)$ であるから、収束する無限和、

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + m^2} = \frac{\pi}{m} \coth \pi m, \quad \sum_n \frac{1}{(n^2 + m^2)^2} = \frac{1}{2m^4} \{ \pi m \coth \pi m + (\pi m)^2 \operatorname{cosech} \pi m \} \quad (3.6a, b)$$

を用いて、 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1, \xi_2, 0)$ 及び $\eta = |\eta|$ とおき、 s_1 と s_2 を以下のように定義する。

$$s_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\xi} g(-\xi) g(\xi) \eta^2 = \sum_{\eta_1, \eta_2} g(-\eta) g(\eta) Y \coth Y, \\ s_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\xi} g(-\xi) g(\xi) \eta^4 = \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{2} g(-\eta) g(\eta) (Y \coth Y + Y^2 \operatorname{cosech} Y). \quad (3.6c, d)$$

ここで、 $Y = L\eta$ である。 $Y \rightarrow \infty$ の極限で、 $\coth Y \rightarrow 1$ 、 $\operatorname{cosech} Y \rightarrow 0$ であるから、 $O(g(\eta)) = \eta^{-2}$ より無限和 s_1 と s_2 は収束することがわかる。したがって、 $h \rightarrow 0$ の極限で式(3.5)の右辺の無限和は収束することが確認される。

3.3 周期亀裂群に対応する平均アイゲン歪

以上の結果は、1)テンソル $C + \Lambda^p$ の h に関する0次の項は、テンソル $C + \Lambda$ の h に関する0次の項と同一であること、2)テンソル $C + \Lambda^p$ の h に関する1次の項は、式(3.6)で定義される無限和 s_1 と s_2 だけで決定

されること、を示す。したがって、 $h \rightarrow 0$ の極限で逆テンソル $(C + \Lambda^p)^{-1}$ が発散し、式(3.3)で与えられる平均アイゲン歪 $\bar{\varepsilon}^*$ の h に関する-1次の項は、式(2.5)と同様に、

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{h} \left\{ 2 \mu d \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} + \frac{s_2}{1-\nu} \right) \right\}^{-1} \sigma_{33}, \\ \bar{\varepsilon}_{3i} &= \frac{1}{h} \left\{ 4 \mu d \left(1 + \frac{(3-\nu)s_1}{2(1-\nu)} - \frac{s_2}{1-\nu} \right) \right\}^{-1} \sigma_{3i} \quad (i = 1, 2).\end{aligned}\quad (3.7a, b)$$

ここで、 d は亀裂密度、 $\pi(a/L)^2/6$ 、である。式(3.7)は近似解であることに注意すべきである。しかし、上記の手法を次のように拡張して、積分方程式(3.2a)を正確に解くことは可能である。楕円体領域 Ω を m 個の適当な部分領域に分割し各部分領域で一樣となるアイゲン歪とその部分領域での式(3.2a)の体積平均を考える。 m 個のアイゲン歪に対し、 m 個のテンソル式が得られるため、部分領域で一定の値をとる(区間的一様)アイゲン歪場が計算できる。このアイゲン歪は部分領域の分割数 m が増加するにつれて、式(3.2a)のより正確な近似解となる。 $m \rightarrow \infty$ の極限においては、式(3.2a)が正確に解けることが示されている¹¹⁾。

4. 周期亀裂群の応力拡大係数の推定

第3章で求められた発散するアイゲン歪場 $\varepsilon^*(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon}^*$ を、例えば、式(3.1a)に代入することで周期亀裂群のつくる応力場が決定できる。他の物理場も同様である。本論文で提案された周期亀裂群問題の一般的解析法の有効性を示す簡単な例として、亀裂に垂直な一樣引張応力(σ_{33})がかかるときの亀裂先端での応力拡大係数を計算する。ここで、応力拡大係数が亀裂先端での応力場の特異性の他に、亀裂先端で0になる亀裂開口変位の減衰の仕方も表わすことを利用する。

式(2.5a)と式(3.7a)で与えられる一樣アイゲン歪がつくる亀裂開口位 $[u_3]$ は、亀裂先端で次のように減衰する(式(3.7a)では $[u_3]$ の近似が与えられることに注意)。

$$[u_3] \sim \frac{2}{E} \lim_{h \rightarrow 0} (-h \Lambda_{3333} \varepsilon_{33}) \quad \{\text{or} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (-h \Lambda_{3333} \bar{\varepsilon}_{33})\} \quad (2a)^{1/2} r^{1/2}. \quad (4.1)$$

ここで、 r は亀裂内の点から亀裂先端までの距離である。 $[u_3]$ の r に関する減衰の項が応力拡大係数と比例することが証明されている^{2), 9)}。

孤立亀裂の場合、亀裂面に垂直な遠方応力 σ_{33} のつくる応力拡大係数 K_I は、 $K_I = 2(a/\pi)^{1/2} \sigma_{33}$ として与えられる。したがって、同じ一樣応力 σ_{33} がつくる周期亀裂群の各亀裂先端での応力拡大係数を K_I^p とすると、 K_I^p と K_I の比は、式(4.1)の鍵括弧内の項の比と同じになる。なお、積分方程式(3.2)の解は一樣でないため、孤立亀裂と異なり、周期亀裂群の亀裂先端の応力場の特異性は一樣ではなく、場所に依存する。すなわち、例えば、 $R^{1/2} \sigma_{33}$ の $R \rightarrow 0$ の極限值が亀裂先端の場所場所で異なる(R は亀裂外の点から亀裂先端までの距離)。したがって、近似された一樣アイゲン歪は、その極限値を亀裂の周方向で平均したものに対応することになり、 K_I^p はその意味で平均化された応力拡大係数と考えられる。

テンソル Λ と Λ^p の h に関する0次の項は同じであることから、式(4.1)を用いると周期亀裂群の平均応力拡大係数は以下の式で与えられる。

$$K_I^p = \frac{\pi}{4} K_I \{d(1-\nu)^2 + ds_2\}^{-1}. \quad (4.2)$$

図4に a/L に対する K_I^p/K_I の変化を示す。無限和は s_2 は適当に打ち切られて近似されている。亀裂間の相互作用により周期亀裂群の亀裂先端の平均応力拡大係数が、孤立亀裂の応力拡大係数と異なることが示されている。5)によって証明されているように、 $a/L \rightarrow 0$ の極限で二つの応力拡大係数が一致することが

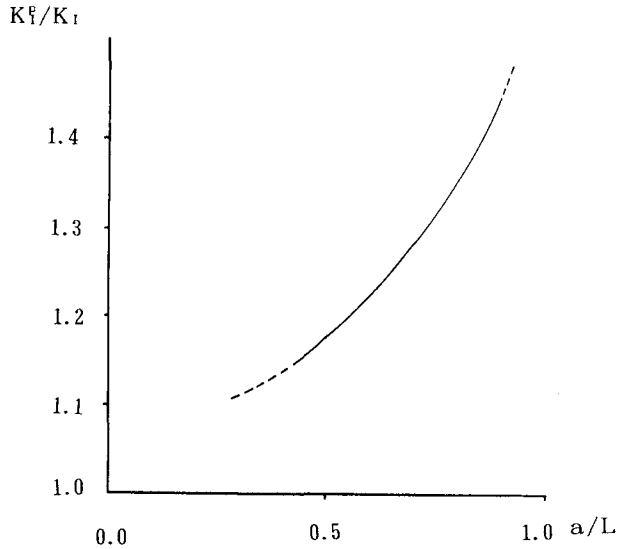


図4 周期亀裂群の応力拡大係数

数値的にも示されている（亀裂密度 d が小さい場合 2 重無限和の収束が遅いため、その部分は図 4 で点線で表わしてある）。なお、例えば、 x_1 、 x_2 軸上にある亀裂先端の局所的な応力場の特異性は、式 (4.2) で与えられる平均応力拡大係数より大きくなることは明らかである。場所に依存した応力場の特異性の正確な推定には、アイゲン歪の近似の改善が必要である（第 3 章参照）。

5. 結論

Equivalent Inclusion法と適当な極限操作を用いることで、3次元の周期的に分布した亀裂群の問題に対する一般的な解析法が見いだされた。アイゲン歪を決定するテンソル式及びその極限は、無限体中の孤立亀裂と周期亀裂群で全く同一の形式になることが示された。

参考文献

- 1) 石田 誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数、培風館、1976.
- 2) Sneddon, I.N. and Lowengrub M.: Crack Problems in Classical Theory of Elasticity: John Wiley and Sons, 1969.
- 3) Diameter, W.R., Herrmann, G., and Barnett, D.M.: Weakening of an Elastic Solid by a Rectangular Array of Cracks, J. Appl. Mech., 42, 74-80, 1975.
- 4) Horii, H. and Sahasakmontri, K.: Mechanical Properties of Cracked Solids, Micromechanics and Inhomogeneity (ed. by Weng, G.J., Taya, M., and Abe, H.), Springer, 137-159, 1990.
- 5) Walker, K.P., Jordan, E.H., and Freed, A.D.: Nonlinear Mesomechanics of Composites with Periodic Microstructure, NASA TM-102051, 1989.
- 6) Hori, M. and Nemat-Nasser, S.: Some Considerations on Periodic Structure (to appear in Mechanics of Material).
- 7) 堀 宗朗、三浦 尚：周期構造モデルの基本的性質、構造工学論文集、Vol.36A、353-362、1990.

- 8) Eshelby, J.D.: The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. Proc. Roy. Soc., A241, 376-396, 1957.
- 9) Mura, T.: Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff, New York, 1982.
- 10) Willis, J.R.: The Stress Field around an Elliptical Crack in an Anisotropic Medium. Int. J. Eng., 5, 171-190, 1968.
- 11) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Composites with Periodic Microstructure, Comp. Structures, 16, 13-19, 1983.

(1 9 9 0 年 1 0 月 1 2 日 受付)