

招待論文

逆問題と非破壊検査

INVERSE PROBLEMS AND NON-DESTRUCTIVE TESTING

西村直志

廣瀬壮一

by Naoshi NISHIMURA* and Sohichi HIROSE**

An overview of some solution techniques for inverse problems related to non-destructive testing is given. In particular, methods of determining the shape of scatterers or cracks based on linearised inverse scattering theory or optimisation are investigated.

1. 前書

非破壊検査の目的は単なる欠陥の検出、すなわち、欠陥の有無の判定に留まるわけではない。むしろ、欠陥の検出自体は非破壊検査における最低限の課題である。非破壊検査の究極の目的は、材料及び構造体の安全性評価、余寿命に関する情報を得ることである。そのためには、まず、破壊条件や供用条件を判定するに十分な欠陥の諸特性を明らかにしなければならない。一度、欠陥の幾何、あるいは材料パラメータが求められると、構造体の余寿命は予測される荷重条件の下で破壊力学的アプローチを用いて推定することができる。

通常、実験データは供試体表面において測定される。したがって、非破壊検査に求められている課題は、表面において得られた実験データから内部欠陥の詳細なパラメータ（例えば、位置、大きさ、形状、方向、分布等）を決定する“逆問題”である。非破壊評価法には様々なものがあるが¹⁾、ここでは超音波散乱法に関連する逆散乱問題の解析法を中心にレビューを行なう。後述するように、一般に逆散乱問題は非線形問題となる。したがって、逆散乱問題に対してはいくつかのアプローチが提案されているが、本報では、適当な近似を導入した線形化逆解析法と最適化手法を用いた非線形逆解析法について概説する。

2. 散乱問題の基礎式

2.1 散乱問題

弾性体内部の欠陥を非破壊評価するためには、弾性波を用いた逆散乱解析を行なう必要がある。しかし、ここでは、簡単のために周波数域におけるスカラー波（例えば音響波）の3次元散乱問題を考える。スカラー波は弾性波と非常に類似した性質を持っているので、ここでの議論は弾性波による散乱解析に容易に拡張できる。

スカラー場の量は $u(\mathbf{x}, \omega)$ によって記述されるものとする。ここに、 $\mathbf{x}$ は位置ベクトルであり、 ω は角周波数である。Fig. 1に示すように、入射波 $u_I(\mathbf{x}, \omega)$ が散乱体 D に入射すると、散乱波 $u_S(\mathbf{x}, \omega)$ が発生する。全スカラー場 u は入射波 u_I と散乱波 u_S の和によって表わされる。

$$u(\mathbf{x}, \omega) = u_I(\mathbf{x}, \omega) + u_S(\mathbf{x}, \omega) \quad (1)$$

散乱体 D は境界 ∂D で囲まれた有限領域であるとし、完全に柔らかい散乱体（動弾性問題では剛体に対応する）、完全に剛な散乱体（動弾性問題では空洞）、あるいは D 内の波数（角周波数/波速）

* 正員 工博 京都大学助手 工学部土木工学科（〒606 京都市左京区吉田本町）

** 正員 工博 岡山大学助手 工学部土木工学科（〒700 岡山市津島中 3-1-1）

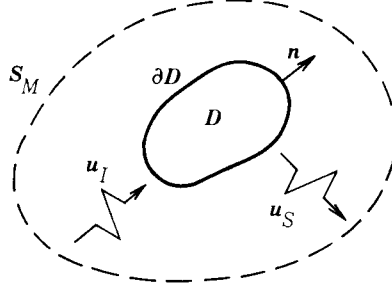


Fig. 1 Geometrical configuration of a scattering problem.

が場所の関数 $k_D(\mathbf{x})$ ($=\omega/c_D(\mathbf{x})$, $c_D(\mathbf{x})$: 波速) で記述されるような透過性の散乱体 (動弾性問題ではインクルージョン) のいずれかであるとする。一方、 D の外部領域 $R^3 \setminus D$ は線形、均質、等方な 3 次元無限媒質であり、そこでの波数は k によって与えられているものとする。

さて、式 (1) によって定義される全スカラー場 u は次の Helmholtz 方程式を満足する。

$$\Delta u + k^2 u = -q(\mathbf{x}, \omega)$$

ここに非斉次項 $q(\mathbf{x}, \omega)$ は、 D (あるいは ∂D) における等価散乱源を表わす。 q は完全に柔らかい散乱体、完全に剛な散乱体、透過性の散乱体に対してそれぞれ以下のような式によって表わされる。

$$q(\mathbf{x}, \omega) = \begin{cases} -\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, \omega) & (\text{完全に柔らかい散乱体}) \\ -u(\mathbf{x}, \omega) \nabla \cdot \gamma(\mathbf{x}) \mathbf{n} & (\text{完全に剛な散乱体}) \\ -k^2 O(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, \omega) & (\text{透過性の散乱体}) \end{cases} \quad (2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} O(\mathbf{x}) &= \{1 - k_D^2(\mathbf{x})/k^2\} \Gamma(\mathbf{x}) \\ \Gamma(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{for } \mathbf{x} \notin D \end{cases} \\ \gamma(\mathbf{x}) &= -\mathbf{n} \cdot \nabla \Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

であり、 $\mathbf{n}$ は ∂D 上における外向き法線ベクトルである。関数 Γ および γ はそれぞれ特性関数、ならびに特異関数と呼ばれている。式 (2) より明らかなように等価散乱源 $q(\mathbf{x}, \omega)$ は散乱体に関する幾何および材料定数に関する情報を含んでいる。したがって、等価散乱源は逆散乱問題の解析において重要な役割を果たす。

さて、3 次元 Helmholtz 方程式の基本解

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) = (4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{-1} \exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

を用いると、散乱体 D による散乱波 u_S は次式のように表わされる。

$$u_S(\mathbf{x}, \omega) = \int_{R^3} q(\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) dV_y \quad (3)$$

さらに、式(2)で与えられた q を上式に代入して散乱波 u_S を各散乱体に対して積分表現すると、次のようになる。

$$u_S(\mathbf{x}, \omega) = \begin{cases} - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) dS_y & (\text{完全に柔らかい散乱体}) \\ \int_{\partial D} u(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) dS_y & (\text{完全に剛な散乱体}) \\ -k^2 \int_{R^3} O(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}, \omega) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) dV_y & (\text{透過性の散乱体}) \end{cases}$$

逆散乱問題は次のように記述できる。

- $u_I(\mathbf{x}, \omega)$ と k は既知であるとする。
- $u_S(\mathbf{x}, \omega)$ (あるいは $\partial u_S / \partial n$) は散乱体を取り囲む測定表面 S_M (あるいはその一部分) においてある周波数域 $\omega_{min} \sim \omega_{max}$ において既知であるとする。
- このとき散乱体の境界 ∂D 、あるいは D 内の波数 $k_D(\mathbf{x})$ (すなわち、波速 $c_D(\mathbf{x})$) を求める。

2.2 遠方散乱場と等価散乱源の関係

式(3)に遠方近似 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$ ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$) を代入すると

$$\begin{aligned} u_S^{far}(\mathbf{x}, \omega) &= (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} \exp(ik|\mathbf{x}|) \int_{R^3} q(\mathbf{y}, \omega) \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) dV_y \\ &:= (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} \exp(ik|\mathbf{x}|) \Omega(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \end{aligned} \quad (4)$$

なる遠方散乱場に対する積分表現を得る。ここに、 $\Omega(\hat{\mathbf{x}}, \omega)$ は遠方における散乱振幅を表わし、 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ なる単位方向ベクトルの関数である。さて次に、等価散乱源 q の空間に関する Fourier 変換を考える。

$$\tilde{q}(\mathbf{K}, \omega) = \int_{R^3} q(\mathbf{y}, \omega) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{y}) dV_y \quad (5)$$

式(4)と式(5)より

$$u_S^{far}(\mathbf{x}, \omega) = (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} \exp(ik|\mathbf{x}|) \tilde{q}(\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{x}}, \omega) \quad (6)$$

を得る。 $\hat{\mathbf{x}}$ on S^2 なる $\hat{\mathbf{x}}$ に対して $\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{K}$ -空間における半径 k なる球面 (いわゆる Ewald 球) を定義する。よって、ある固定された単一の波数 k に対しては、Ewald 球上における $\tilde{q}$ しか求められない。全 $\mathbf{K}$ -空間における $\tilde{q}$ を規定するには、 S^2 なる球面に対して波数 k (すなわち周波数 ω) を変化させて遠方散乱場を検出すればよい。しかしながら、このようにして求められた $\tilde{q}$ を実空間へ逆変換するだけでは、等価散乱源 q を決定することはできない。何故なら、式(2)より明らかなように、関数 q は全スカラー場 $u(\mathbf{x}, \omega)$ を含んでおり、波数 k の変化と共に変動するからである。

このように逆散乱問題は一般に非線形問題²⁾となる。このような逆散乱問題の解析には2つのアプローチがある。一つは適当な近似を導入して、非線形逆散乱問題を線形化して解析を行なう方法であり、Born 逆解析法、POFFIS 法等がある。もう一つは、非線形問題に対して何ら近似を導入せずに最適化手法を用いて解く解法である。これらについては、以下で詳しく述べる。

3. 線形化された逆散乱問題の解析

3.1 Born 逆解析法

D が比較的コントラストの低い透過性の散乱体であるとし、低周波域における波動散乱を考える。この時、散乱体内における散乱波 u_S の振幅はかなり小さいと考えられるために³⁾、これを無視すると式(2)_cは

$$q^{Born}(\mathbf{x}, \omega) = -k^2 O(\mathbf{x}) u_I(\mathbf{x}, \omega) \quad (7)$$

となる。ここで、入射波 $u_I(\mathbf{x}, \omega)$ が周波数スペクトル $F(\omega)$ を持ち、 $\hat{\mathbf{k}}_I$ なる進行ベクトルを持つ平面波であると仮定する。すなわち、

$$u_I(\mathbf{x}, \omega) = F(\omega) \exp(ik\hat{\mathbf{k}}_I \cdot \mathbf{x}) \quad (8)$$

式 (8) を式 (7) に代入して、式 (6) を利用すると

$$u_S^{far, Born}(\mathbf{x}, \omega) = -k^2 F(\omega) \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} \tilde{O}(\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{x}} - k\hat{\mathbf{k}}_I)$$

が得られる。これによって $\mathbf{K}$ -空間における $\tilde{O}$ を求め、逆 Fourier 変換すると、関数 $O(\mathbf{x})$ を決定することができる。

Fig. 2 は弾性問題における散乱波動に対して Born 逆解析法を適用し、2次元楕円インクルージョンの特性関数を再現したものである。散乱体を取り囲む 60 箇所におけるパルス-エコー法を想定し、SV 波入射に対する SV 波散乱波を数値解析によって模擬的に作成してそれを逆散乱問題の入力データとして用いた。ただし、インクルージョンの弾性定数 E_D 、密度 ρ_D 、ポアソン比 ν_D はそれぞれ $E_D/E = 1.43$ 、 $\rho_D/\rho = 1$ 、 $\nu_D = \nu = 0.25$ (E 、 ρ 、 ν は外部領域における値) の場合を考えている。図中の実線が求められるべき形状であるが、よく再現されている。Fig. 3 は数値的に求めた P 波入射に対する P 波散乱データを用いて再現した 2 次元空洞の特性関数を表わしている。(a) は単一の空洞であり、(b) は隣合わせた 2 個の空洞の場合である。(b) の場合には 2 個の空洞の干渉によって空洞が向かい合っている側の境界が幾分曖昧になっているが、ほぼ空洞の形状が再現されている。

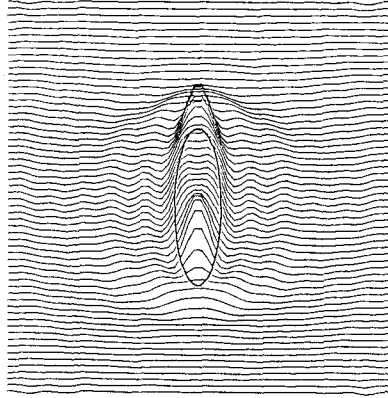


Fig. 2 Characteristic function of an inclusion reconstructed from pulse-echo data of SV to SV wave.

Born 近似に基づく逆散乱解析については Prosser⁴⁾ による研究を初めとして、数多くの論文が発表されている⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾。また、Rose and Richardson⁹⁾、Rose and Opsal¹⁰⁾ は時間域における Born 逆解析法を提案している。さらに、実験データを用いた Born 逆解析法の検証も行なわれている¹¹⁾。また、本来、Born 近似は低コントラストの散乱体に対して仮定されたものであるが、Fig. 3 にも示されたように、空洞や、クラックなど反射率の高い散乱体に対しても Born 逆解析法は有効であることが確かめられている¹²⁾¹³⁾。Born 逆解析法に関するレビューは Rose¹³⁾ によって詳しくなされている。

3.2 POFFIS (physical optics far field inverse scattering) 法

ここでは、高周波数域での完全に柔らかい散乱体による波動散乱を考える。この時、次の Kirchhoff 近似を導入することができる。すなわち、入射側境界における散乱波は入射波に等しく、影になる境

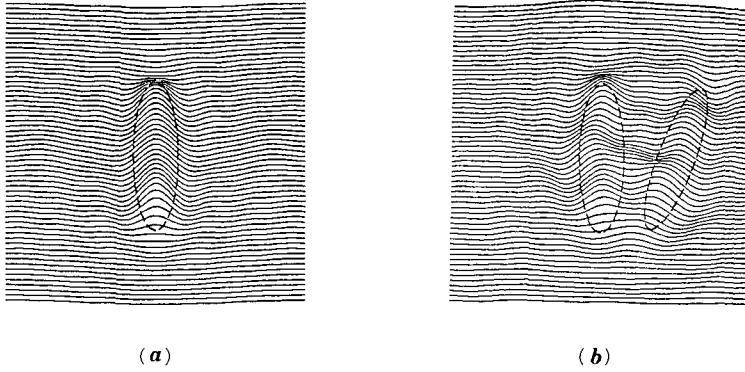


Fig. 3 Characteristic functions of (a) a cavity and (b) two cavities reconstructed from pulse-echo data of P to P wave.

界においては散乱波はゼロであると仮定する。入射波 u_I が式 (8) で定義した平面波であるとする、式 (2)_a で表わされた等価散乱源 q は次のように表わされる。

$$q^{po}(\mathbf{x}, \omega) = -2ik\gamma(\mathbf{x})\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_I u_I(\mathbf{x}, \omega) H(-\hat{\mathbf{k}}_I \cdot \mathbf{n}) \quad (9)$$

ここに、 $H(\cdot)$ は Heaviside 関数を表す。式 (9) を式 (6) に代入すると、

$$u_S^{far, po}(\mathbf{x}, \omega) = -2ikF(\omega) \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_{R^3} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}}_I \gamma(\mathbf{y}) H(-\hat{\mathbf{k}}_I \cdot \mathbf{n}) e^{-ik(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{k}}_I) \cdot \mathbf{y}} dV_y$$

を得る。ここで、波数 k が十分大きいことを考慮して、遠方散乱場に対しては上式の積分の停留値だけが寄与すると仮定する。停留値を与える条件は $\nabla_y[(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{k}}_I) \cdot \mathbf{y}] = 0$ (ただし、 ∇_y は境界 ∂D における $\mathbf{y}$ に関する勾配を表す。) によって与えられる。すなわち、停留点における法線ベクトル $\mathbf{n}_{st}$ は $(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{k}}_I) \cdot \mathbf{n}_{st} = 0$ を満足する。以上のことより、遠方散乱場は

$$u_S^{far, po}(\mathbf{x}, \omega) = -2ikF(\omega) \mathbf{n}_{st} \cdot \hat{\mathbf{k}}_I \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} \tilde{\gamma}_H(\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{x}} - k\hat{\mathbf{k}}_I) \quad (10)$$

ここに、 $\tilde{\gamma}_H$ は入射側における特異関数 $\gamma_H(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) H(-\hat{\mathbf{k}}_I \cdot \mathbf{n})$ の Fourier 変換像である。式 (9) によって求められた $\tilde{\gamma}_H$ を逆変換すれば、特異関数を求めることができ、散乱体の境界 ∂D を決定できる。

POFFIS 法は Bojarski¹⁴⁾ の研究を初めとして、数多くの研究者により開発が進められてきた。POFFIS 法に関する詳しいレビューは Bojarski¹⁵⁾, Cohen and Bleistein¹⁶⁾ によってなされているので参照されたい。なお、Bleistein and Cohen¹⁷⁾, Bojarski¹⁸⁾ は POFFIS 法における近距離データの処理法を議論している他、Mager and Bleistein¹⁹⁾ は遠方散乱場のデータの一部分が欠損した場合の POFFIS 法の精度について数値解析を行なっている。

4. 最適化問題としての逆問題の解法

逆問題を数値的に解く場合、有限個のパラメータの同定を行う形となることが多い。これらを求めるためには原理的にはパラメータの個数以上の実験データが有れば良く、データ数と大差無い数のパラメータを推定しようとする研究もある²⁰⁾。しかし実験には誤差が付物であり、良い逆解析を行うには十分な冗長性を持った計測をシステムティックに解析する事が望ましい。その様なデータ処理法としては最適化系のものがある。以下では逆散乱問題を最適化手法で解いた Colton らの結果、及びそれに密接に関連したクラック形状決定問題に於ける解析例を示す。

4.1 逆散乱問題

今、簡単のために完全に柔らかい散乱体 D による散乱問題を想定する。又、記号の簡略化を図り、以下では $u(\mathbf{x}, \omega)$ 等を $u(\mathbf{x})$ 等と書く事にする。

以下で扱う逆散乱問題は次の様に定式化される。今、散乱体の形状が未知とし、いくつかの既知の入射波 u_I^i ($i = 1 \sim m$) に対して遠方場の散乱振幅 Ω^i (式 (4) 参照) が与えられている時、これらに適合する散乱体の形状を決定する。これらの入射波の波数は i によって異なっても良いが、以下では簡単のため同一の場合を考える。なお、一般に入射波一波 ($m = 1$) だけからは D の形状は一意的には決まらないが、入射波を平面波に限ったときに一波で形状が決定できるかどうかは未解決問題である²¹⁾²²⁾²³⁾。

この逆問題の解法はいくつか提案されているが、以下では、良い3次元数値結果が得られている Colton ら²¹⁾ の手法を紹介する。まず、実験の情報により散乱体の位置がある程度推定できるものとする。Colton らは平面入射波 $u_I^i(\mathbf{x}) := e^{i\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x}}$ の場合を考え、座標原点を散乱体内に取り、補助的に

$$(\Delta + k^2)v = 0 \text{ in } D, \quad v = -\frac{e^{i\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x}}}{4\pi|\mathbf{x}|} \text{ on } \partial D$$

を満たす場 v を導入する。ここに、 $\hat{\mathbf{k}}_I^i$ は入射波の伝播方向を表す単位ベクトル。この時 v の平面波分解

$$v(\mathbf{x}) = \int_{S^2} g(\hat{\mathbf{y}}) e^{i\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}}$$

の重み関数 g は遠方場の散乱振幅 Ω^i と

$$\int_{S^2} \Omega^i(\hat{\mathbf{x}}) \overline{g(\hat{\mathbf{x}})} d\hat{\mathbf{x}} = 1$$

を満たす。ここに S^2 は単位球面である。そこで Colton らは g 及び ∂D を適当に離散化し、最小化問題

$$\underset{g}{\text{minimise}} \sum_i \left| \int_{S^2} \Omega^i(\hat{\mathbf{x}}) \overline{g(\hat{\mathbf{x}})} d\hat{\mathbf{x}} - 1 \right|^2, \quad \underset{\partial D}{\text{minimise}} \int_{\partial D} \left| \int_{S^2} g(\hat{\mathbf{y}}) e^{i\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} + \frac{e^{i\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{x}}}{4\pi|\mathbf{x}|} \right|^2 dS$$

を順次解く事により散乱体形状を求める事を提案した。なお、説明の都合により、2番目の最小化は本質を損なわない範囲で簡略化した。Colton & Monk は以上の方法で共鳴域 (波長が散乱体寸法と同オーダー) の2次元²⁴⁾、3次元問題²¹⁾を解いている。又、この方法は不均一な散乱体の場合にも拡張でき、ごく簡単な場合について数値解析が行われている²⁵⁾。

この他にも、Kress ら²²⁾ は、仮想境界一重層ポテンシャル法及び Tikhonov の正則化²⁶⁾を組み合わせつつ非線形計画法により Colton & Monk とほぼ同規模の3次元逆問題を解いている²⁷⁾。Onishi²⁸⁾等は境界要素法と直接探査型の非線形計画法 (コンプレックス法) を組み合わせ、2次元問題を解いている。同時に遠方場の情報欠損、即ち、限定された方向でのみ遠方場の情報が得られている場合についても扱っている。最近では中川・北原²⁹⁾も phase shift (要するに遠方場の Fourier 係数に定数を加えたものの対数) に注目した3次元軸対称逆解析を行っている。なお、これらと同種の Helmholtz 以外の問題の解析としては弾性波を利用した欠陥形状同定問題を境界要素法と共役勾配法によって解いた田中らの研究³⁰⁾がある。

4.2 クラック形状決定問題

いま、ある物体 D 内にクラック S がある事がわかっているがその位置や形は不明であるとする。 S の幾何学的情報を得るために、この物体中に例えば Laplace 方程式で支配される物理量 u を発生させる (波動現象は後述)。その様な u は例えば2次元面外静弾性変形、電位、温度等である。この物体に対して、数学的には外部境界で Dirichlet データを与え、対応する Neumann データを計測す

る事に相当する実験を行う。例えば、せん断変位を与えてトラクションを測る、電位を与えて電流を測る、ないしは温度を与えて熱束を測る、等がこれに当たる。考える逆問題は、得られた実験データ及びクラックはトラクションを受けない、電氣的、または熱的に絶縁状態である等の条件からクラック形状を推定するものである。以下では、この逆問題を超特異積分方程式法を用いて解く方法³¹⁾を紹介する。

先ず順問題を考える。滑らかな境界 ∂D を有する 3 次元有界領域 D はその内部にクラック S を含んでいるものとする。この時 Laplace 方程式に支配されるクラック問題は次の境界値問題に帰着される： $D \setminus S$ に於いて

$$\Delta u = 0 \text{ in } D \setminus S, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^- = 0 \text{ on } S, \quad \lim_{\mathbf{x}(\in S) \rightarrow \mathbf{x}_0(\in \partial S)} \varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi := u^+ - u^-,$$

及び ∂D に於ける境界条件を満たす関数 $u(\mathbf{x})$ を求める。ここに、上付きの $+$ ($-$) は S への正(負)の側からの極限、 φ は u の S での不連続量、即ち力学で言う開口変位を示す。クラックの正の(負の)側とは S の法線ベクトル $\mathbf{n}$ ($-\mathbf{n}$) の向く方向である。この問題を解く事は次の積分方程式を外境界 ∂D 上の u 及び $\partial u / \partial n$ の未知の部分、及び S 上の φ について解く事と等価である：

$$\frac{u(\mathbf{x})}{2} - \int_{\partial D} \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} dS_y + \int_{\partial D} \frac{\partial \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) dS_y = \int_S \frac{\partial \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} \varphi(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n} dS_y \right) = \int_S \frac{\partial^2 \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x \partial n_y} \varphi(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in S \quad (12)$$

ここに $\dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ であり、 $\dot{=}$ を付した積分記号は有限部分を表す。

次にクラック S の形状が未知である場合を考える。クラック形状を求めるために ∂D に複数の Dirichlet データ u^I ($I = 1 \sim N$) を与え、対応する Neumann データ $\partial u^I / \partial n$ を計測するか、またはその反対の計測を行う。この時、 n 次元問題に於いては ($n = 2, 3$)、 n 回実験を行えば S は一意的に定まることが知られているので (Friedman & Vogelius³²⁾ 及び久保³³⁾)、実験回数 N は $N \geq 3$ とする。さて、これらのデータからクラック形状 S を推定する問題を最小化問題に置き換えて解く事を考える。最小化するコスト関数 $J(S)$ は次のように計算される S の関数である：先ず与えられた S に対して、式 (12) より得られる次の積分方程式を φ^I について解く：

$$\begin{aligned} & \oint_S n_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{y}) \dot{G}_{,ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi^I(\mathbf{y}) dS_y \\ & = \left(\int_{\partial D} \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u^I}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u^I(\mathbf{y}) dS_y \right)_{,i} n_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in S, \quad I = 1 \sim N. \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) 右辺は実験結果から評価できる量である事に注意する。ここで、式 (11) より、 $J(S)$ を

$$\begin{aligned} J(S) := & \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \int_{\partial D} \left(\left[\frac{u^I(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} u^I(\mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial D} \dot{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u^I}{\partial n}(\mathbf{y}) dS_y \right] \right. \\ & \left. + \int_S \dot{G}_{,i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) n_i(\mathbf{y}) \varphi^I(\mathbf{y}) dS_y \right)^2 dS_x \end{aligned}$$

と定義する。上式中の $[\]$ も実験結果から計算可能な量である。クラック S は $J(S)$ の最小点として求まる。以下では、この問題を超特異積分方程式における感度解析と非線形計画法を組み合わせ

解いた例³¹⁾を示す。なおこれらの数値例では実際には実験は行わず、積分方程式法による数値解析で得られた模擬データで代用している。

領域 D として Fig. 4 に示した稜の長さが $2l$ の立方体を考える。外部境界では各座標（稜方向）の線形関数である 3 つの Dirichlet データを与え、データの誤差はないものとする。初期クラックは円形であり真のクラックはアスペクト比（長軸長/単軸長）が $(5 + \sqrt{2})/(5 - \sqrt{2})$ の楕円である。収束計算の第一段階ではクラックが円形であると仮定した所、Fig. 4(a) に示した途中経過を経て同図中の真のクラックに十分近い位置に収束した。次に第一段階の解を初期クラック形状として、楕円を許す第二段階の解析を行った結果、真のクラックへの収束をみた (Fig. 4(b) 参照)。

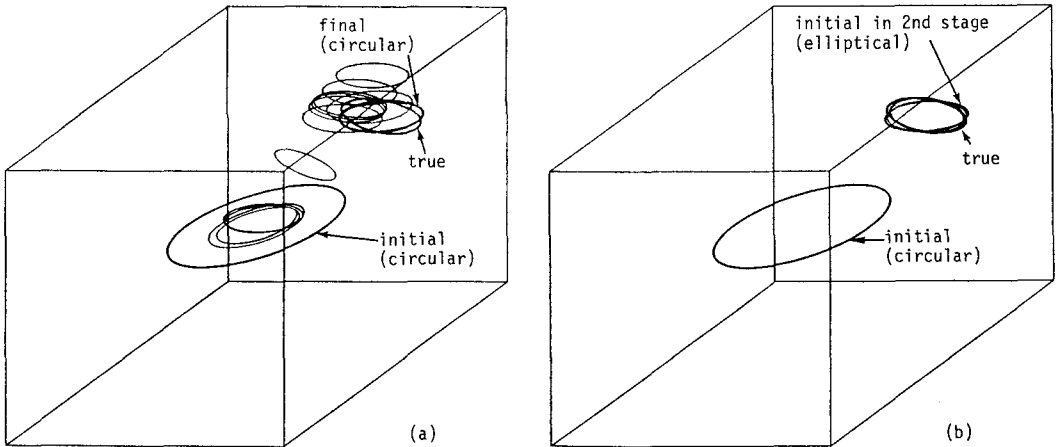


Fig. 4 Mode of convergence in 3D elliptical crack analysis (a) with circular crack assumption. (b) with elliptical crack assumption in the 2nd stage.

また、この方法は Helmholtz 方程式の場合にも使う事が出来る³¹⁾。一例として半径 r の 2 次元円形領域 D を考え、 $kr = 1$ の場合の解析結果を示す。外部境界に於いては二つの Dirichlet データ $u^1 = e^{ikx_1}$, $u^2 = e^{ikx_2}$ を与える。又境界での Neumann データ、より正確には、 $\partial u^I / \partial n - \partial U^I / \partial n$ に $\pm 20\%$ の誤差を与える。Fig. 5 には真のクラック、初期仮定共に図に示した直線である場合の収束の様子を示した。

なお、Laplace 方程式に支配される現象のクラック逆問題の数値解析の他の試みとしては、Santosa & Vogelius³⁴⁾ が 2 次元 FEM 解析によって類似の問題を解いている。Kubo ら³⁵⁾³⁶⁾ は普通の 3 次元境界要素法によって、予想される多くのクラック形状について順問題を解析した後、実験に最もよく合うクラックを拾うという方法でこの問題を解いている。Nishimura & Kobayashi³⁷⁾ に於いては Newton 法を用いた非常に複雑な 2 次元超特異積分方程式法が提案されている。また動弾性問題に於いては、Tanaka et. al³⁸⁾ が普通の積分方程式を用いたクラック決定問題を取扱っている。最小化系のその他の逆問題の解析例としては非定常熱伝導に注目して未知の欠陥形状を求めようとするもの³⁹⁾ 等がある。

5. 結言

本報では非破壊検査に関連した逆問題、特に波動等を用いた欠陥形状決定問題に重点を於いてその解法を紹介したが、これら以外にも逆問題に定式化できる工学的計測は少なくない。本報がこれら諸々の逆問題の解析において参考となれば幸いである。なお、具体的な問題を解く上では本報で述べる事が出来なかった他の逆問題手法の解説⁴⁰⁾や、シンポジウムの論文集⁴¹⁾⁴²⁾等が参考になろう。

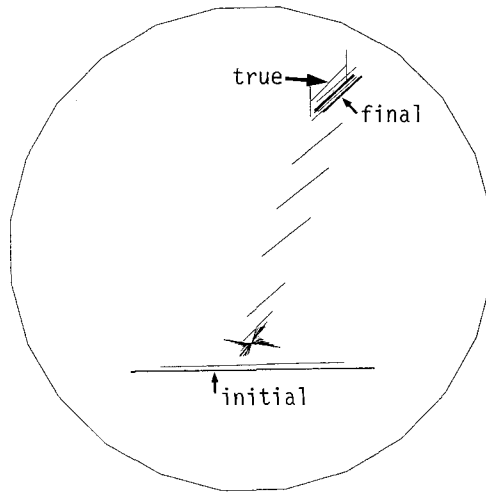


Fig. 5 2D crack detection analysis (Helmholtz).

参考文献

- (1) 構造工学委員会非破壊評価小委員会: 土木構造材料の定量的非破壊評価へのアプローチ, 土木学会論文集, No.428, 1991 (掲載予定) .
- (2) Langenberg, K.J.: Introduction to the special issue on inverse problems, *Wave Motion*, Vol.11, pp.99-112, 1989.
- (3) Gubernatis, J.E., Domany, E. and Krumhansl, J.A.: Formal aspects of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, *J. Appl. Phys.*, Vol.48, pp.2804-2811, 1977.
- (4) Prosser, R.T.: Formal solutions of inverse scattering problems, *J. Math. Phys.*, Vol.10, pp.1819-1822, 1969.
- (5) Lee, D.A.: Scatterer sizing from elastodynamic backscattering using splines, *Modeling and Simulation*, Vol.12, p.1253, 1982.
- (6) Richardson, J.M.: The deterministic problem in the scattering of elastic waves from weak inhomogeneities, in: *1979 Ultrasonics Symposium Proceedings* (eds. deKlerk, J. and McAvoy, B.R.), IEEE, Piscataway, N.J., pp.356-360, 1979.
- (7) Rose, J.H. and Opsal, J.L.: Inversion of ultrasonic data, in: *Review of Progress in Quantitative NDE Vol.1* (eds. Thompson, D.O. and Chimenti, D.E.), Plenum Press, NY, pp.187-195, 1982.
- (8) Rose, J.H. and Krumhansl, J.A.: Determination of flaw characteristics from ultrasonic scattering data, *J. Appl. Phys.*, Vol.50, pp.2951-2952, 1979.
- (9) Rose, J.H. and Richardson, J.M.: Time domain Born approximation, *J. Nondestructive Evaluation*, Vol.3, p.45, 1982.
- (10) Rose, J.H. and Opsal, J.L.: The inverse Born approximation: Exact determination of shape of convex voids, in: *Review of Progress in Quantitative NDE Vol.2B* (eds. Thompson, D.O. and Chimenti, D.E.), Plenum Press, NY, pp.1097-1116, 1983.
- (11) Hsu, D.K., Rose, J.H. and Thompson, D.O.: Reconstruction of inclusions in solids using ultrasonic Born inversion, *J. Appl. Phys.*, Vol.55, pp.162-168, 1984.
- (12) Niwa, Y. and Hirose, S.: Inverse scattering of elastic waves for a cavity, *Struct. Eng./Earthq. Eng.*, Vol.3, pp.267s-275s, 1986.
- (13) Rose, J.H.: Elastic wave inverse scattering in nondestructive evaluation, *J. Pure Appl. Geophys.*, Vol.131, pp.715-739, 1989.
- (14) Bojarski, N.N.: Three dimensional electromagnetic short pulse inverse scattering, Special Projects Lab. Rep., Syracuse Univ. Res. Corp., Syracuse, NY., NTIS #AD-845 126, 1967.
- (15) Bojarski, N.N.: A survey of the physical optics inverse scattering identity, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, Vol.AP-30, pp.980-989, 1982.
- (16) Cohen, J.K. and Bleistein, N.: The singular function of a surface and physical optics inverse scattering, *Wave Motion*, Vol.1, pp.153-161, 1979.

- (17) Bleistein, N. and Cohen, J.K.: Progress on a mathematical inversion technique for non destructive evaluation, *Wave Motion*, Vol.2, pp.75-81, 1980.
- (18) Bojarski, N.N.: A survey of the near-field far-field inverse scattering inverse source integral equation, *IEEE Trans. of Antennas and Propag.*, Vol.AP-30, pp.975-979, 1982.
- (19) Mager, R.D. and Bleistein, N.: An examination of the limited aperture problem of physical optics inverse scattering, *IEEE Trans. of Antennas and Propag.*, Vol.AP-26, pp.695-699, 1978.
- (20) Sotiropoulos, D.A. and Achenbach, J.D: Crack characterization by an inverse scattering method, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.24, pp.165-175, 1988.
- (21) Colton, D. and Monk, P.: The numerical solution of the three-dimensional inverse scattering problem for time harmonic acoustic waves, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.8, pp.278-291, 1987.
- (22) Kress, R.: *Linear Integral Equations*, Springer, 1989.
- (23) Colton, D.: The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves, *SIAM Review*, Vol.26, pp.323-350, 1984.
- (24) Colton, D. and Monk, P.: A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region II, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.46, pp.506-523, 1986.
- (25) Colton, D. and Monk, P.: A new method for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium, *Inverse Problems*, Vol.5, pp.1013-1026, 1989.
- (26) Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.I.: *Solutions of Ill-Posed Problems*, Halsted Press, 1977.
- (27) Kress, R.: International Symposium 'Inverse Problems in Engineering Sciences' (大阪工業大学、1990) に於ける口頭発表, 1990.
- (28) Onishi, K., Ohura, Y. and Kobayashi, K.: Inverse Scattering in 2D for shape identification by BEM, *Proc. BEM12, Comp. Mech. Publ.*, Vol.2, pp.435-446, 1990.
- (29) 中川克也、北原道弘: 遠方散乱場の位相情報の一定量化策について, *境界要素法論文集*, Vol.7, pp.111-116, 1990.
- (30) 田中正隆、中村正行、中野隆志: マルチ加振法による構造要素の欠陥同定(欠陥が複数個有る場合) *機械学会論文集 (A)*, Vol.56, pp.1900-1905, 1990.
- (31) 西村直志、山本巧、小林昭一: 積分方程式法によるクラック形状決定問題の解法について *境界要素法論文集*, Vol.7, pp.213-218, 1990.
- (32) Friedman, A. and Vogelius, M.: Determining cracks by boundary measurements, *IMA preprint series* #476, 1989.
- (33) 久保司郎、坂上隆英、大路清嗣: 電気ポテンシャル CT 法によるき裂同定における逆問題解の一意性, *機械学会論文集 (A)*, Vol.55, pp.2316-2319, 1989.
- (34) Santosa, F. and Vogelius, M.: A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements, Technical report No. 90-3, Center for the Mathematics of Waves, Univ. Delaware, 1990.
- (35) 坂上隆英 他: 電気ポテンシャル CT 法による三次元内部き裂の同定, *機械学会論文集 (A)*, Vol.56, pp.27-32, 1990.
- (36) Kubo, S.: Inverse problems related to the mechanics and fracture of solids and structures, *JSME Int. J.*, Vol.31, pp.157-166, 1988.
- (37) Nishimura, N. and Kobayashi, S.: Regularised BIEs for crack shape determination problems, *Proc. BEM12, Comp. Mech. Publ.*, Vol.2, pp.425-434, 1990.
- (38) Tanaka, M., Nakamura, M. and Nakano, T.: Detection of cracks in structural components by the elastodynamic boundary element method, *Proc. BEM12, Comp. Mech. Publ.*, Vol.2, pp.413-422, 1990.
- (39) Banks, H.T. and Kojima, F.: Boundary shape identification problems in two-dimensional domains related to thermal testing of materials, *Q. Appl. Math.*, Vol.47, pp.273-293, 1989.
- (40) Bonnet, M. and Bui, H.D.: On some inverse problems for determining volumic defects by electric current using boundary integral equation approaches: an overview, *境界要素法論文集*, Vol.6, pp.179-197, 1989.
- (41) 日本機械学会: シンポジウム逆問題のコンピュータ手法とその応用講演論文集, 1989.
- (42) Colton, D., Ewing, R. and Rundell, W. (Eds.): *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, 1990.

(1991 年 1 月 18 日受付)