

非関連流れ則を用いた剛塑性有限要素解析

RIGID-PLASTIC FINITE ELEMENT METHOD WITH NON-ASSOCIATED FLOW RULE

1) 2) 3)

田村 武, 小林 昭一, 橋本 一三

by Takeshi TAMURA, Shoichi KOBAYASHI and Ichizo HASHIMOTO

A formulation of Rigid-Plastic Finite Element Method (RPFEM) with the non-associated flow rule is introduced. RPFEM was originally applied in Mechanical Engineering to evaluate necessary thrusts for the metal forming process and recently it is utilised for wide range of fields including frictional materials such as soils and rocks. It is wellknown, however, that the associated flow rule for frictional materials results in a huge amount of volume expansion due to dilatancy and that the formulation with the non-associated flow rule is required for such materials. One of the most crucial aspects in formulating RPFEM is to interpret it as solving the weak form of equations of equilibrium with stress-strain rate relationship derived from the assumed yield function and plastic potential. From this point of view, the fundamental relations necessary for RPFEM with the non-associated flow rule and a few numerical examples will be shown.

1. はじめに

剛塑性有限要素法は構造物の極限解析にしばしば用いられる数値解析法のひとつである。この理論的發展の過程ではいわゆる上解定理に基づく定式化が中心であり、必然的に関連流れ則が仮定されてきた。近年この手法が土質材料のように摩擦角を有するものにも適用され始めたが、これに対して関連流れ則を用いるとダイレイタンスによる過大な膨張が生じることになる。そこで摩擦角を有しながら、かつ、ダイレイタンスによる膨張を軽減するようなモデル、すなわち非関連流れ則による剛塑性解析が必要となってきた。しかしこれについては、もはや上解定理に基づく機械的な理論構成は不可能となり、塑性ひずみ速度に関する制約条件や応力-塑性ひずみ速度関係を陽な形で予め求めておく必要がある。そこで本研究は、Drucker-Prager型の降伏関数を仮定したうえで、この非関連流れ則を適用した場合の剛塑性有限要素法の定式化と数値解析例について述べる。なお、本文においては、応力、ひずみとも圧縮を正としておく。

2. 関連流れ則に基づく応力-ひずみ速度関係^{1) 2)}

はじめに関連流れ則に基づく関係式について考える。Drucker-Pragerの降伏条件：

$$f(\sigma_{ij}) = -\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (1)$$

をとる。ここに I_1 は応力 σ_{ij} の第一不変量、 J_2 は偏差応力 s_{ij} の第二不変量、そして α は材料定数である。応力空間において Drucker-Prager 型の降伏条件は図-1 のように原点を内部に含む円錐形の曲面で表わされる。関連流れ則においては、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は降伏曲面上でその外向き法線とならねばならない。そして、そのような降伏曲面上の点が塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に対応する応力 σ_{ij} である。

1) 京都大学工学部土木工学科 助教授, 2) 同 教授

3) 日建設計

〒606 京都市左京区吉田本町

それではまず、どのような条件を塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に課せれば、降伏曲面の法線となり得るかを考察する。塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ はその円錐上の一点で法線方向を向かねばならないので、いわゆる双対錐の母線に平行とならねばならない（図-2 参照）。いま、Drucker-Prager の降伏条件の場合についてこの双対錐の方程式を求めてみよう。関連流れ則を仮定する場合、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は降伏曲面の法線方向を向くから、 Λ を正の係数として

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \Lambda (-\alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}) \quad (2)$$

となる。ここに、ここに δ_{ij} は Kronecker の記号である。両辺を自乗した式を用いて Λ を消去すれば、

$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\dot{\epsilon}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+6\alpha^2}} (-\alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}) \quad (3)$$

を得る。ここに、

$$\bar{\dot{\epsilon}} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (4)$$

とおいた。式（3）において等方成分をとれば、次式が求まる。

$$h(\dot{\epsilon}_{ij}) = \dot{\theta} + \frac{3\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \bar{\dot{\epsilon}} \quad (=0) \quad (5)$$

ここに

$$\dot{\theta} = \dot{\epsilon}_{kk} \quad (6)$$

は、塑性ひずみ速度の体積成分である。これが Drucker-Prager の降伏曲面（円錐）の双対錐の式である。すなわち関連流れ則を適用しようとする場合、このような制約条件が、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に課せられる。

関連流れ則に基づく剛塑性材料の構成関係は、式（5）を満たす塑性ひずみ速度を法線ベクトルとするような降伏曲面上の点を見つけることと等価である。しかし、円錐型の降伏曲面を仮定する場合、明らかに母線に沿うすべての点で同一の法線ベクトルをもつことから、応力点の決定に一意性がなくなる。たとえば、von Mises 型の降伏関数の場合、等方応力成分は構成関係としては不定である。そこで、つぎに問題となるには、式（5）を満たす塑性ひずみ速度と直交するような（降伏曲面が作る）錐の母線方向ベクトルを求めることである。しかし、容易にわかるように降伏曲面の双対錐の法線が、この求める母線方向になる（図-2 参照）。以上のことから、関連流れ則に基づく剛塑性材料の応力-塑性ひずみ速度関係を2つの成分として表現するのが自然である。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad (7)$$

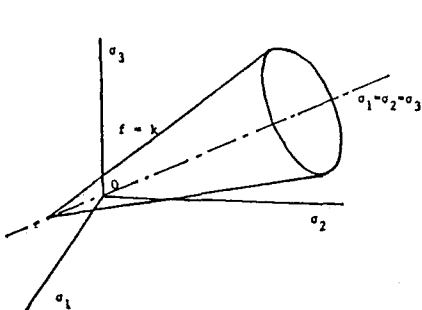


図-1

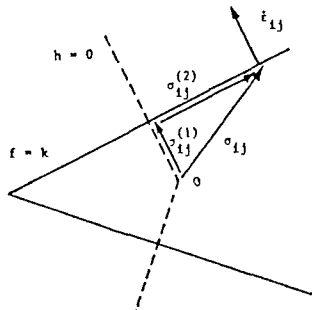


図-2

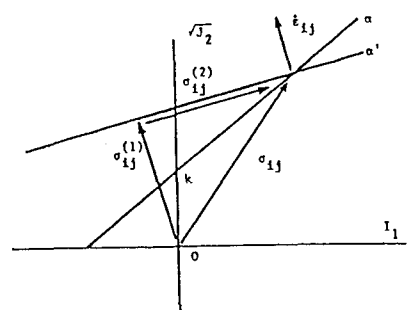


図-3

ここで

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \gamma \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \lambda \frac{\partial h}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (9)$$

である。すなわち図-2に示すように、 $\sigma_{ij}^{(1)}$ は応力空間の原点から降伏曲面に降ろした垂線と等しい応力成分であり、一方、 $\sigma_{ij}^{(2)}$ は降伏曲面が作る錐の母線に平行な応力成分である。ただし、式(8)の係数 γ は、 $\sigma_{ij}^{(1)}$ の先端が降伏曲面上にあること：

$$f(\sigma_{ij}^{(1)}) = k \quad (10)$$

から定められる。しかし、式(9)の係数 λ はここでは不定のままである。この値は、拘束条件式(5)と表裏の関係にあるもので、式(5)とともに、場の方程式(つりあい方程式など)を解くことによって初めて求められる。

以上のことを具体的に計算すると

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \delta_{ij} + \frac{3\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} \quad (12)$$

となって、これらを式(8)、(9)に代入して、式(7)の形にすれば次式を得る。

$$\sigma_{ij} = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} + \lambda \left(\delta_{ij} + \frac{3\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\epsilon}} \right) \quad (13)$$

塑性ひずみ速度の制約条件式(5)と不定数 λ を含む式(13)が関連流れ則に基づくDrucker-Prager型の剛塑性材料の構成関係となる。

3. 非関連流れ則に基づく応力-ひずみ速度関係

関連流れ則の場合と同じ降伏条件式(1)を仮定する。ただし、その降伏曲面上の点で塑性ひずみ速度は、降伏曲面に垂直とはならず、その点を通る他の円錐面(塑性ポテンシャル曲面と呼ぶ)：

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = k' \quad (14)$$

に対して垂直になるとする(図-3参照)。定数 k' は降伏曲面上で異なる値をとる。ただし、式(1)と式(14)の曲面は共通の軸をもつ円錐である。両者の交点における2つの法線はこの軸方向成分のみを修正することで重ねることができる。また、式(14)の双対錐を

$$\bar{h}(\dot{\epsilon}_{ij}) = 0 \quad (15)$$

とする。式(15)で表わされる円錐のひとつの母線に平行であることが、塑性ひずみ速度に課せられる制約条件である。求められることは、式(15)を満足する塑性ひずみ速度が与えられたとき、これと軸方向成分のみが異なる法線をもつような降伏曲面(式(1))上の点の一般表示である。これは以下のようにして導くことができる。図-3のように求めようとする応力点を通るような塑性ポテンシャル曲面をあたかも降伏曲面とみなす。そして関連流れ則の場合と同じように、応力 σ_{ij} を分解する。

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \quad (16)$$

ここで

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = \bar{\gamma} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{e}} \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (18)$$

とおく。 $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)}$ 、 $\bar{\sigma}_{ij}^{(2)}$ はそれぞれ、塑性ひずみ速度に平行な成分、式(15)の曲面に垂直な成分（つまり式(14)の母線の方成分）である。関連流れ則の場合とは異なり、式(17)の係数 $\bar{\gamma}$ を単独に定めることはできない。なぜなら、求める応力点自体により式(14)の右辺の k' が異なるからである。むしろ、式(18)の係数 $\bar{\lambda}$ は不定である。しかし、この $\bar{\lambda}$ が定まったとすると、応力 σ_{ij} が降伏条件式(1)を満たすという条件：

$$f(\sigma_{ij}) = f(\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + \bar{\sigma}_{ij}^{(2)}) = k \quad (19)$$

から $\bar{\gamma}$ を求めることができる。すなわち、関連流れ則と同様に1つの不定パラメータ $\bar{\lambda}$ を含んだ形で、非関連流れ則に基づく剛塑性材料の応力-塑性ひずみ速度を表現することができる。

以上のことをやはり Drucker-Prager の降伏条件について実際に行なってみよう。塑性ポテンシャルを表わす関数を

$$\bar{f} = -\bar{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} = k' \quad (20)$$

とする。ここで $\bar{\alpha}$ は新たな材料定数である。式(20)に対して、塑性ひずみ速度の制約条件は

$$\bar{h}(\dot{\epsilon}_{ij}) = \dot{\theta} + \frac{3\sqrt{2}\bar{\alpha}}{\sqrt{1+6\bar{\alpha}^2}} \bar{e} \quad (21)$$

となる。したがって、式(20)の塑性ポテンシャル面（円錐）の母線の方は

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \delta_{ij} + \frac{3\sqrt{2}\bar{\alpha}}{\sqrt{1+6\bar{\alpha}^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{e}} \quad (22)$$

となる。これらを考慮して式(19)を具体的に計算すると、ひとつのパラメータ $\bar{\gamma}$ は

$$\bar{\gamma} = \frac{\sqrt{2}\{3(\alpha - \bar{\alpha})\bar{\lambda} + (1 + 6\bar{\alpha}^2)k\}}{(1 + 6\alpha\bar{\alpha})\sqrt{1 + 6\bar{\alpha}^2}} \quad (23)$$

として表現される。これらを式(17)、(18)に代入すると、式(16)は以下ようになる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\sqrt{2}\{3(\alpha - \bar{\alpha})\bar{\lambda} + (1 + 6\bar{\alpha}^2)k\}}{(1 + 6\alpha\bar{\alpha})\sqrt{1 + 6\bar{\alpha}^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{e}} + \bar{\lambda} \left(\delta_{ij} + \frac{3\sqrt{2}\bar{\alpha}}{\sqrt{1 + 6\bar{\alpha}^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{e}} \right) \quad (24)$$

このようにして塑性ひずみ速度が与えられたとき、ひとつの不定パラメータ $\bar{\lambda}$ のみで応力を書き下すことができる。

なお、Drucker-Prager の降伏条件のパラメータ α 、 k は、平面ひずみ条件において Mohr-Coulomb の降伏条件のパラメータである内部摩擦角 ϕ と粘着力 c と以下の関係を有する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{cases} \sqrt{\frac{(3 + 2r \sin^2 \phi) - \sqrt{9 + 12r(1-r) \sin^2 \phi}}{6r^2(3 + \sin^2 \phi)}} & (r \neq 0) \\ \frac{\sin \phi}{3} & (r = 0) \end{cases} \\ k = \frac{3c\alpha}{\tan \phi} \end{array} \right. \quad (25)$$

ただし、 r は、非関連流れ則のパラメータであって、

$$r = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \quad (26)$$

と定義する。

5. 数値計算例

縦14、横21の合計294個の同じ大きさの4節点アイソパラメトリック要素を用い、平面ひずみ条件のもとで、表面左端部(1/3の範囲)に等分布荷重を加えた。領域の左右端はなめらか、下端は粗とした。内部摩擦角 ϕ は 30° とし、非関連流れ則のパラメータ r を種々変化させて結果を比較した。図-4(a)、(b)はそれぞれ、 $r=1$ および0の場合の速度場を示している。体積膨張の激しい(a)では速度ベクトルの大きさを1/4としている。(b)は非圧縮の場合であるが、比較のため図-5に $\phi=0^\circ$ の場合(これも非圧縮)を示す。

図-6は、 $\phi=30^\circ$ の場合、(a) $r=1$ 、(b) $r=0.75$ 、(c) $r=0.5$ (d) $r=0.25$ 、(e) $r=0$ および(f) $r=-0.25$ について塑性ひずみ速度の自乗和($\bar{e}^2$) 大きさの等高線を比べたものである。これらから、塑性体積ひずみが小さい場合ほど、ある領域に沿ってひずみ速度が集中していくのがわかる。なお、荷重強度は(a) 32.1 cから順次、(e) 25.2 cまで減少した。図-7は、 $\phi=0^\circ$ の場合の結果である。

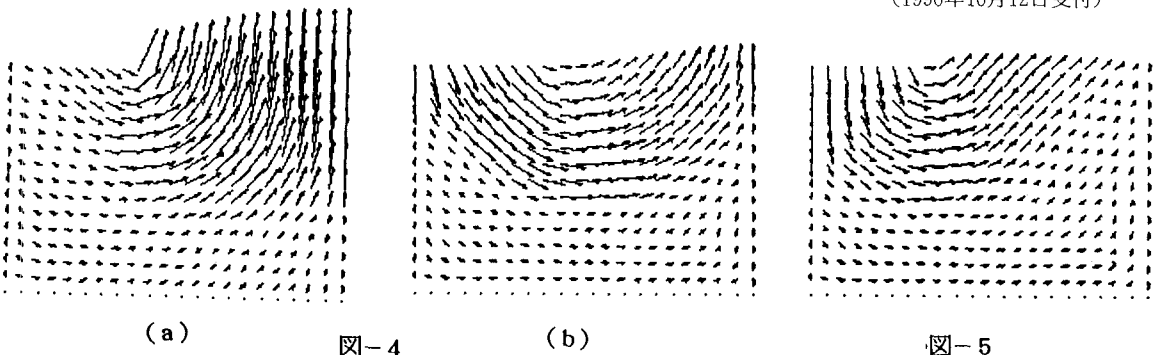
6. まとめ

剛塑性材料の非関連流れ則に基づく応力-塑性ひずみ速度関係と、塑性ひずみ速度の制約条件とを導く目的で、種々の式の誘導を行なった。制約条件と応力の不定成分の関係は、降伏曲面あるいは塑性ポテンシャル曲面(円錐型を仮定)の母線とその双対錐の母線の関係として捉えられることが明らかになった。また、数値解析例の結果、同じ摩擦角を有する材料でも、体積ひずみが小さい(非関連性が大きい)場合にはある領域に沿ってひずみ速度が集中することが認められた。今後、さらに細かな要素分割により検討を行なう予定である。

参考文献

- 1) Tamura, T., Kobayashi, S. and T. Sumi : Rigid-plastic Finite Element Method for Frictional Materials, Soils and Foundations, Vol.27, No.3, pp.1-12, 1987.
- 2) Tamura, T. and R. Pak : Rigid-plastic Limit Analysis of Discontinuous Media by a Finite Element Method, Canadian Geotechnical Journal, Vol.26, pp.367-374, 1989.

(1990年10月12日受付)



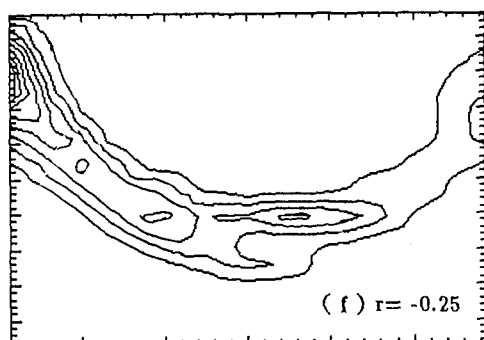
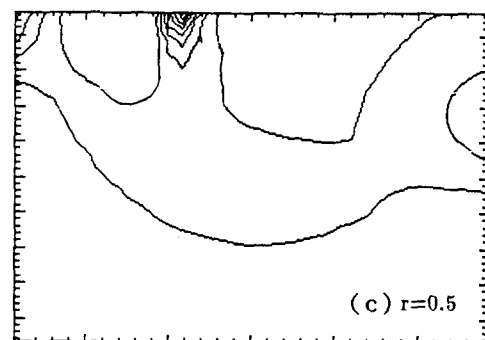
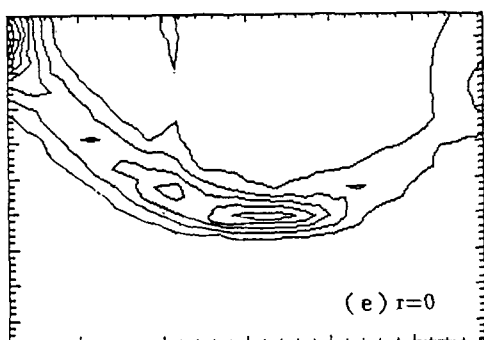
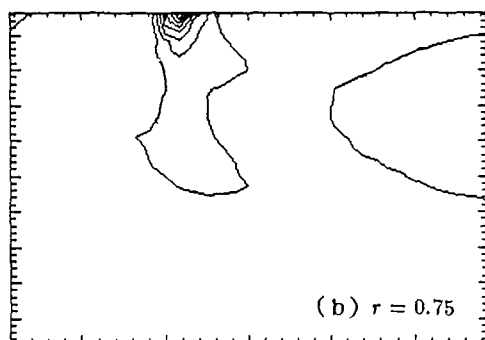
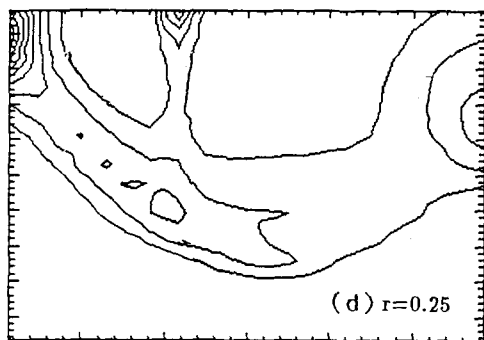
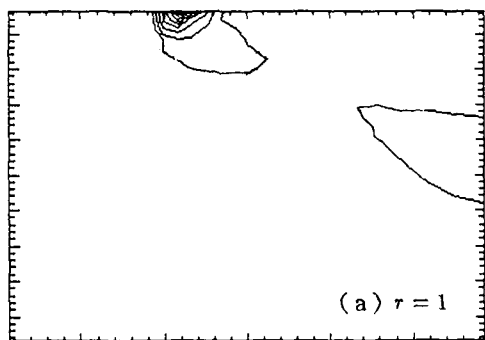


图-6

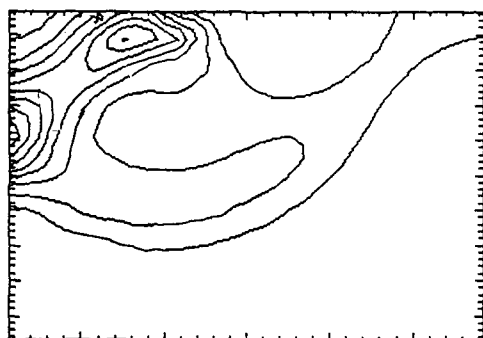


图-7