構造工学論文集　Vol.37 A（1991年3月）　　土木学会

拡張されたHamiltonの原理と時間有限要素法への応用

AN EXTENDED HAMILTON'S PRINCIPLE AND ITS APPLICATION TO TIME FINITE ELEMENT METHOD

井浦雅司
By Masashi IURA

A new functional, Euler equations of which are Lagrange's equation of motion and the initial condition for momenta, has been proposed. Based on the functional, a time finite element method has been formulated. In this formulation, the momenta at both initial and final stages are treated as independent variables. As a result an accuracy of momenta is improved. It has been shown through a numerical example that the present time FEM gives a better performance compared with the existing method. As an application, a control problem of space structures has been analysed. In spite of using coarse meshes, good numerical results have been obtained.

1．はじめに

Hamiltonの原理は、保存系の運動方程式を導くに当たり、広く利用されている。Argyris [1], Fried[2], Oden [3] らは、Hamiltonの原理を用いて、有限要素法を時間方向にも適用している。Hamiltonの原理は、周知のように、汎関数の停留条件より系の運動方程式を導くものであり、その際に、時間の始点と終点における位置の変分量を零となるように仮定している。更に、得られるEulerの方程式は、Lagrangeの運動方程式のみであり、初期条件に関する情報は何も得られない。

Bailey [4] は、初期値問題の際に、時間の始点と終点における位置の変分量が同時に零となる仮定は妥当でないとして、その停留条件より運動方程式が導かれるような、変分形式で表わされるHamiltonの法則を提案している。この法則は、位置および速度（運動量）に関する初期条件がEulerの方程式として得られない点については、従来のHamiltonの原理を超えていない。一方、Gurtin [5] は、線形弾性問題に関連して、たたみこみ積分を用いて、初期条件をも含んだ変分原理を提案しており、これはGurtinの原理として知られている。

本論文では、Gurtinの原理とは異なり、たたみこみ積分を用いることなく、通常の変分原理と同様の手法により、Eulerの方程式として、Lagrangeの運動方程式および速度（運動量）に関する初期条件が得られる汎関数を誘導している。なお、通常の停留ポテンシャルエネルギーの原理と同様に、幾何学的境界条件は常に満足されているものと仮定しているため、位置に関する初期条件は汎関数に含まれていない。つぎに、本

工博　東京電機大学助教授　理工学部建設工学科　（〒350-03　埼玉県比企郡鳩山町）

汎関数を基にして、位置と時間に無限小変換を施すことにより、拡張されたNoetherの定理について述べ、その特別な場合として、拡張されたHamiltonの原理が得られることを示す。次に、時間方向に有限要素法を適用し、Hamiltonの原理やHamiltonの法則に基づいた有限要素よりも本汎関数に基づいた有限要素の方が優れていることを、簡単な例題を通して明らかにする。最後に、宇宙構造物の制御問題への応用例を示す。

2．拡張されたHamiltonの原理

まず、古典的なHamiltonの原理について述べる。代表的な参考書[6]によれば，汎関数Ｉを

$$I=\int_{t_0}^{t_1} L(x,\dot{x})\,dt\ ,\ L=T-U\ ,\ T:\text{運動エネルギ}\ ,\ U:\text{ポテンシャルエネルギ} \tag{1}$$

とおくと、$\delta x|_{t=t_0}=\delta x|_{t=t_1}=0$ と仮定することにより、汎関数Ｉの停留条件は

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\{\partial L/\partial x-d(\partial L/\partial \dot{x})/dt\}\,\delta x\ dt=0 \tag{2}$$

となり、周知のLagrangeの運動方程式が得られ，これをHamiltonの原理と呼んでいる。

以上のHamiltonの原理について、以下のような問題点がこれまで提起されている。

1)　例えば、$t=t_0$ において位置と速度が規定されている場合に、$t=t_1$ における位置は未知数であり、その変分を $\delta x|_{t=t_1}=0$ の様に仮定することはできない。すなわち、上記の仮定：$\delta x|_{t=t_0}=\delta x|_{t=t_1}=0$ は一般的に成立しない。

2)　Hamiltonの原理は、初期条件について何も言及していないため、変分原理としては不完全である。

Bailey [4] は 上記の疑問1)に対して、$\delta x|_{t=t_0}=\delta x|_{t=t_1}=0$ を仮定せずに、Lagrangeの運動方程式が得られる様な以下の変分形式を提案している。

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L(x,\dot{x})\,dt-[(\partial L/\partial \dot{x})\,\delta x]_{t_0}^{t_1}=0 \tag{3}$$

ここで、$d(\partial L/\partial \dot{x})/dt$ が存在するならば、式（３）と式（２）が等価であることは明らかである。しかし、例えば、有限要素法の適用を考える時、要素内でC^0関数を仮定すると、$d(\partial L/\partial \dot{x})/dt$ は恒等的に零となり、その存在は必ずしも言えないことから、式（３）と式（２）は一般的には等価でない。Bailey [4]も数値計算例を通して、式（２）よりも式（３）の変分形式の優位性を強調している。ここで注目されることは、式（３）に対する汎関数の存在が言えないことである。なお、Bailey [4]により提案された式（３）の変分形式は、上記の問題点1)は解決しているものの、初期条件に関する問題点2)は依然として未解決である。

Gurtin [5] は、たたみこみ積分を利用することにより、問題点1)並びに初期条件に関する問題点2)を同時に解決し、様々な形の変分原理を提案している。ここでは、変位型の変分原理を考えていることから、それに相当する汎関数は以下のように与えられる。

$$\Phi=\int[(i*S*E+\rho u*u)/2-f*u]\,dV-\int i*s*u\ dS \tag{4}$$

ここに、$S(E)$ は応力テンソル、Ｅはひずみテンソル、ｕは変位ベクトル、ρは単位体積当たりの質量、$i=t$、ｓは力学的境界上で規定されている応力テンソルである。更に、物体力ｂ，初期位置u_0，初期速度v_0により、ｆは以下の様に定義される。

$$f=i*b+\rho\,(u_0+t\,v_0) \tag{5}$$

また、演算記号＊は以下のように定義される。

$$\phi*\varphi=\int\phi\,(x,\ t-\tau)\,\varphi\,(x,\ \tau)\,d\tau \tag{6}$$

上記の汎関数Φの停留条件は、平衡方程式と力学的境界条件を与え、初期条件は平衡方程式の中に含まれている。

この様にGurtinの原理は、上記の問題点１）、２）を解決している。しかしながら、たたみこみ積分を用いているために、従来の有限要素法の定式化に慣れている技術者にはあまり馴染めない変分原理のようである。

本論文では、以上の考察を踏まえて、たたみこみ積分の様な手法を用いずに、上記の問題点１）、２）を解決する変分原理を提案する。まず以下のような汎関数を考える。

$$H=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt-[\tilde{p}\,x]_{t_0}^{t_1}+[\tilde{E}\,t]_{t_0}^{t_1} \tag{7}$$

ここで位置に関する境界条件は常に満足されているものと仮定しており、$\tilde{p}$ と $\tilde{E}$ の物理的意味は後に示される。式（７）の右辺第３項は、後に示すように、拡張されたNoetherの定理において意味を持つものであり、時間に関して変分をとらないHamiltonの原理においては消滅するものである。

拡張されたHamiltonの原理を示す前に、それよりも一般的な Noetherの定理について考える。 Noetherの定理は周知のようにLagrangianの不変性から保存則を見つける際に重要な役目を果たすものである[7]。まず以下の無限小点変換を考える。

$$\bar{x}=x+\varepsilon\,\xi\,(x,t) \tag{8}$$

$$\bar{t}=t+\varepsilon\,\tau\,(x,t) \tag{9}$$

ここに、ξ と τ は x、t に関する任意の関数であり、ε は無限小パラメータである。この時、汎関数Ｈは

$$\bar{H}=\int_{t_0}^{t_1}\bar{L}\,d\bar{t}-[\tilde{p}\,\bar{x}]_{t_0}^{t_1}+[\tilde{E}\,\bar{t}]_{t_0}^{t_1} \tag{10}$$

となる。ここで、式(8)、(9)の関係を用いると、ε の一次項まで考慮することにより次式を得る。

$$d\bar{x}=dx+\varepsilon\,[\,(\partial\xi/\partial x)\,dx+(\partial\xi/\partial t)\,dt\,] \tag{11}$$

$$d\bar{t}=dt+\varepsilon\,[\,(\partial\tau/\partial x)\,dx+(\partial\tau/\partial t)\,dt\,] \tag{12}$$

上式を用いて、式（10）の汎関数Ｈを書き直すと以下のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{H}=&\int_{t_0}^{t_1}L\,dt+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}(\xi\ \partial L/\partial x+\dot{\xi}\ \partial L/\partial\dot{x})\,dt\\&+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}(-\dot{x}\ \partial L/\partial\dot{x}+L)\,\dot{\tau}\,dt-[\tilde{p}\,\bar{x}]_{t_0}^{t_1}+[\tilde{E}\,\bar{t}]_{t_0}^{t_1}\end{aligned} \tag{13}$$

ここで以下の関係式を用いた。

$$
\begin{aligned}
[\tilde{p}\,\bar{x}]_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} &= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} d(\tilde{p}\,\bar{x})/d\bar{t}\cdot d\bar{t} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} d(\tilde{p}\,\bar{x})/d\bar{t}\ (1+\varepsilon\dot{\tau})\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} d(\tilde{p}\,\bar{x})/dt\cdot(dt/d\bar{t})\cdot(1+\varepsilon\dot{\tau})\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} d(\tilde{p}\,\bar{x})/dt\cdot dt \\
&= [\tilde{p}\,\bar{x}]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

式（7）と（10）より$\bar{H}-H$を計算すると以下の式を得る。

$$
\begin{aligned}
\bar{H}-H = {} & \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\{\partial L/\partial x - d(\partial L/\partial\dot{x})/dt\}\ \{\xi-\dot{x}\tau\}\,dt \\
& +\varepsilon\left[\{\partial L/\partial\dot{x}-\tilde{p}\}\,\xi-\{(\dot{x}\,\partial L/\partial\dot{x}-L)-\tilde{E}\}\,\tau\right]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

これより、式(8)、(9)で表わされている無限小点変換の下で汎関数Hが不変であるための条件として以下の式を得る。

$$\partial L/\partial x - d(\partial L/\partial\dot{x})/dt = 0 \tag{16}$$

$$\{\partial L/\partial\dot{x}-\tilde{p}\}\,\xi-\{(\dot{x}\,\partial L/\partial\dot{x}-L)-\tilde{E}\}\,\tau = 0 \tag{17}$$

ここで、式（16）はLagrangeの運動方程式を、式（17）は保存量を表わしている。

本論文で提案する拡張されたHamiltonの原理は、式(8)、(9)の無限小点変換において、$\xi=\xi(x)$、$\tau=0$とおけばよく、以下のように表わされる。

$$H = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt - [\tilde{p}\,x]_{t_0}^{t_1} \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
\delta H = {} & \int_{t_0}^{t_1}\{\partial L/\partial x - d(\partial L/\partial\dot{x})/dt\}\,\delta x\,dt \\
& +\left[\{\partial L/\partial\dot{x}-\tilde{p}\}\,\delta x\right]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

停留条件（$\delta H=0$）より以下の式を得る。

$$\partial L/\partial x - d(\partial L/\partial\dot{x})/dt = 0 \qquad (t_0 < t < t_1) \tag{20}$$

$$\partial L/\partial\dot{x} = \tilde{p} \qquad (t=t_0、t=t_1) \tag{21}$$

この様に、汎関数Hの停留条件よりLagrangeの運動方程式と速度（運動量）に関する条件式が得られる。なお、位置に関する条件式は予め満足されているものと仮定している。このことは、静的問題における停留ポテンシャルエネルギの原理において、幾何学的境界条件が予め満足されていると仮定していることと等しく、何ら一般性を失うことではない。例えば、変位型の有限要素法を考える時、変位関数は必ず位置の値を含んでおり、それに関する条件を付加することは容易である。一方、速度（運動量）に関しては同様の議論は成立しない。何故ならば、例えば、時間に関してC^0級の変位関数を仮定すれば、変位関数は節点の位置のみの関数となり、直接的に速度（運動量）に関する条件を規定することができない。これらについては、以下

の章で更に詳しく述べることにする。

次に、運動量を独立変数とする混合型変分原理について考える。ここでは、単純力学系を考えることとし、この時、運動エネルギTと歪エネルギUは

$$T = g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j / 2 \quad , \quad U = (x) \tag{22}$$

と表わされる[7]。ここで、$\partial T / \partial \dot{x}_i = p_i$によって運動量$p_i$を定義すると、Hamilton関数Mは

$$M = g_{ij} p_i p_j / 2 + U(x) \tag{23}$$

と書ける。よって、以下の変分原理を考えると、

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [p_i x_i - M] dt - [\widehat{p}_i x_i]_{t_0}^{t_1} \tag{24}$$

$$\delta J = 0 \tag{25}$$

そのEulerの方程式として、Lagrangeの運動方程式、運動量の定義式、運動量の境界条件式がそれぞれ得られる。混合型の変分原理の特徴は、運動量が独立変数として与えられており、要素毎に独立な値をとることができるため、衝撃問題のような運動量が不連続となるような問題に適している（なお、衝撃問題の計算例については、文献[8]を参照）。

3．時間有限要素法への応用

簡単のために、以下の例題を考える。

$$\partial^2 x / \partial^2 t - f(t) = 0, \qquad x(t_0) = C_1 , \quad \dot{x}(t_0) = C_2 , \tag{26}$$

上記の問題の厳密解は以下のように与えられる。

$$x = C_1 + C_2 t - \int_{t_0}^{t_1} f(\tau)\tau \, d\tau + t\int_{t_0}^{t_1} f(\tau) \, d\tau \tag{27}$$

$$\dot{x} = C_2 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau) \, d\tau \tag{28}$$

ここで、Hamiltonの原理、Hamiltonの法則、およびここで提案している拡張されたHamiltonの原理に基づいて有限要素法により上記の例題を解析する。なお、変位関数としては最も簡単な一次関数を仮定するが、より高次の変位関数を適用することはもちろん可能である。最後に、2階の微分方程式の代表的な数値解法として多用されているNewmarkのβ法との比較を行なう。

(3.1) Hamiltonの原理

上記の例題に対する汎関数Ｉは以下の様に書ける。

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{x})^2/2 + f(t)x] dt \tag{29}$$

変位関数は t の一次関数と仮定していることより、$t=t_0$ と $t=t_1$ における位置をそれぞれ x_0 と x_1 とおくと、以下の様に求まる。

$$x=(1-t/\Delta t)\,x_0+(t/\Delta t)\,x_1 \tag{30}$$

式(30)を式(29)に代入し、その停留条件より以下の式を得る。

$$\left[x_0-x_1+\int_{t_0}^{t_1} f(t)\{\Delta t-t\}\,dt\right]\delta x_0+\left[-x_0+x_1+\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,t\,dt\right]\delta x_1=0 \tag{31}$$

$x(t_0)=C_1$ より、$\delta x_0=0$ とおくと第2式より x_1 が以下の様に求まる。

$$x_1=x_0-\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,t\,dt \tag{32}$$

ここで注目すべきことは、初期速度に関する情報が全く含まれていないことより、何らかの工夫をしない限り、時間刻みをいくら小さくしても厳密解に収束しないことである。初期速度を考慮する最も簡単な方法としては、変位関数の次数を上げることであるが、いかに次数を上げても本手法では厳密解は得られない。

(3.2) Hamiltonの法則

式（3）で表わされる弱形式は、本例題に対しては以下のようになる。

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}[\dot{x}\,\delta\dot{x}+f(t)\,\delta x\,]dt-[\dot{x}\,\delta x]_{t_0}^{t_1}=0 \tag{33}$$

式（30）で表わされている変位関数を式（33）に代入すると、最終的に以下の式を得る。

$$\left[\int_{t_0}^{t_1} f(t)\{\Delta t-t\}\,dt\right]\delta x_0+\left[\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,t\,dt\right]\delta x_1=0 \tag{34}$$

式(34)より、Baileyにより提案されたHamiltonの法則は、妥当な結果を与えないことが分かる。これは、変位関数として一次関数を用いているためであり、高次の変位関数を使用すれば有意な結果が得られる。なお、Hamiltonの法則を用いた計算例は文献[4]の他にも文献[9]において見られる。

(3.3) 拡張されたHamiltonの原理

汎関数Hは、本例題の場合、以下のように求まる。

$$H=\int_{t_0}^{t_1}[(\dot{x})^2/2+f(t)\,x\,]dt-[\tilde{p}\,x]_{t_0}^{t_1} \tag{35}$$

ここで注意することは、$t=t_1$における運動量 $\tilde{p}_1$ は $\dot{x}|_{t=t_1}$ より求まるのではなく、未知数として式(35)より求まるのである。$t=t_0$ における運動量を $\tilde{p}_0$ とおき、式(30)で表わされている変位関数を式(35)に代入すると、その停留条件より以下の式を得る。

$$\left[x_0-x_1+\int_{t_0}^{t_1} f(t)\{\Delta t-t\}\,dt+\tilde{p}_0\Delta t\right]\delta x_0+\left[-x_0+x_1+\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,t\,dt-\tilde{p}_1\right]\delta x_1=0 \tag{36}$$

ここで、初期条件を代入すると $x_0=C_1$，$\tilde{p}_0=C_2$ となることから、上式を x_1 と $\tilde{p}_1$ について解くと

$$x_1=C_1+C_2\,\Delta t-\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,t\,dt+\Delta t\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt \tag{37}$$

$$\tilde{p}_1=C_2+\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt \tag{38}$$

となる。式(27),(28)の厳密解と比較することにより、式(37),(38)の x_1 と $\tilde{p}_1$ は時間刻み Δt の値に無関係に厳密であることが分かる。

ここで、汎関数Hの変分について考察する。多くの参考書では、ある量が規定されている場合は、その変分は零としている。さらに、その値が未知の時は、その変分は零とならない。ところが、ここで提案している拡張されたHamiltonの原理においては、たとえ変位が規定されていてもその変分は零とおかず、さらに境界における運動量は規定量とおいている。その結果、未知数と等しい数の方程式が得られ、さらに速度（運動量）に関する条件式が得られることになる。このような操作は、何も新しいことではなく、有限要素法の古典的な参考書[10]においても行なわれている。そのことを示すために、以下ではトラスの問題を考える。

参考書[10]によれば、トラスの剛性マトリックスは以下の汎関数の停留条件より求まる。

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\{EA\,(u')^2/2+f\,u\}\,dx-[\tilde{R}u]_{x_0}^{x_1} \tag{39}$$

ここに、EAは伸び剛性、uは軸方向変位、fは軸方向分布外力、Rは力学的境界上における規定量である。簡単のために、$f=0$ とおき、一次の変位関数を仮定すれば以下の式を得る。

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tilde{R}_1\\ \tilde{R}_2\end{Bmatrix} \tag{40}$$

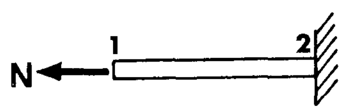

Fig. 1

ここに、Lは部材長である。さて、図－1に示す例を考えると、$u_2=0$、$\tilde{R}_1=N$となり、式(40)の第1式より $u_1=LN/EA$ が得られ、さらに第2式より反力が $\tilde{R}_2=-EAu_1/L\,(=-N)$ と得られる。ここでは、u_2が規定されているにも拘らず $\delta u_2\neq 0$ とおき、未知数（変位u_1と反力R_2）と等しい数の方程式が得られている。さらに、未知数である支点反力 $\tilde{R}_2$ の変分をとるようなことはせずに剛性方程式(40)が得られていることに注意を要する。

(3.4)　Newmarkのβ法

2階の微分方程式を解く代表的な手法としてNewmarkのβ法があり、これまでも広く構造物の応答解析に利用されている。Newmarkのβ法によれば、$t=t_{n+1}$における加速度と速度はそれぞれ以下のように近似される。

$$\ddot{x}_{n+1}=(x_{n+1}-x_n-\Delta t\,x_n)\{\beta(\Delta t)^2\}^{-1}-(1-2\beta)\,x_n(2\beta)^{-1} \tag{41}$$

$$\dot{x}_{n+1}=x_n+\Delta t\,\{(1-\gamma)\,x_n+\gamma\,x_{n+1}\} \tag{42}$$

式(41),(42)を用いて本例題を解くと，位置と速度は以下のように求まる。

$$x_1=C_1+\Delta t\,C_2+\beta\,(\Delta t)^2\,\{f(t_0)+(1-\beta)\,f(t_0)(2\beta)^{-1}\} \tag{43}$$

$$\dot{x}_1=C_2+\Delta t\{(1-\gamma)\,f(t_0)+\gamma\,f(t_1)\} \tag{44}$$

これより、外力f(t)が特殊な関数の時には適当なβとγを用いることにより厳密解が得られることが分かる。しかしながら、任意の関数f(t)に対して、Δtに依存せずに厳密解を得るようなβとγの選択は困難である。

4．宇宙構造物の制御問題への応用

宇宙構造物の制御に関してはこれまで様々な立場から論じられている[11]。ここでは、簡単な問題について拡張されたHamiltonの原理の応用を考える。

図2に示すような2つの剛体からなるシステムを考える。剛体1と剛体2はスプリング（定数：k）により接続されている。剛体2を移動するためにスプリングに設置されているアクチュエイタを用いて力fを作用すれば、剛体1と剛体2は大きさが同じで方向が逆の力を受けることになる。例えば，$f=p_0 t$（p_0：定数）なる力がアクチュエイタより供給されたものとすると、剛体1と剛体2の運動方程式は以下のようになる。

$$m_1\ddot{x}_1-k(x_2-x_1)=-p_0 t \tag{45}$$

$$m_2\ddot{x}_2+k(x_2-x_1)=p_0 t \tag{46}$$

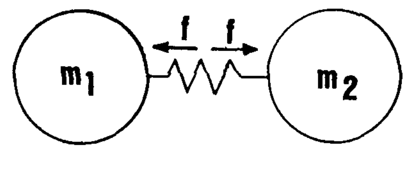

Fig. 2

式(45),(46)を、$x_1=\dot{x}_1=x_2=\dot{x}_2=0$なる初期条件の下で解くと以下のようになる。

$$x_1=p_0 m_2(-t+\omega^{-1}\sin\omega t)/\{k(m_1+m_2)\} \tag{47}$$

$$x_2=p_0 k^{-1}[\{1-m_2(m_1+m_2)^{-1}\}t -m_1\{(m_1+m_2)\omega\}^{-1}\sin\omega t] \tag{48}$$

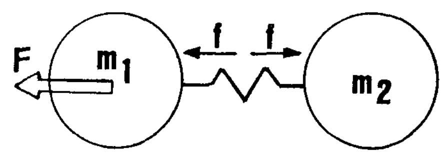

Fig. 3

ここで、$\omega=\sqrt{k(m_1+m_2)m_1^{-1}m_2^{-1}}$である。

ところで、何らかの条件（例えば、剛体1を介して地球との送信を維持する）により、剛体1は常に不動のままにさせたいという状態が生じたとしよう。この時の制御方法としては、図－3に示すように、剛体1に外力を作用させることが一般的であろう。この外力をF(t)とおくと、剛体1と剛体2の運動方程式は以下のようになる。

$$m_1\ddot{x}_1-k(x_2-x_1)=-p_0 t-F(t) \tag{49}$$

$$m_2\ddot{x}_2+k(x_2-x_1)=p_0 t \tag{50}$$

式(49),(50)を拡張されたHamiltonの原理で解くことを考える。まず、汎関数Hは以下のように書ける。

$$H=\int_{t_0}^{t_1}[m_1(\dot{x}_1)^2/2+m_2(\dot{x}_2)^2/2-k(x_2-x_1)^2/2-p_0 t\, x_1-F(t)x_1+p_0 t\, x_2]\,dt -[\tilde{p}_1 x_1]_{t_0}^{t_1}-[\tilde{p}_2 x_2]_{t_0}^{t_1} \tag{51}$$

ここに、$\tilde{p}_1$，$\tilde{p}_2$はそれぞれ質量m_1，m_2の運動量を示す。未知関数x_1とx_2、及び未知外力F(t)を一次関数で近似し、さらに剛体1が常に静止している条件より、初期条件$x_1(0)=\dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$

の他に $x_1=\dot{x}_1=0$ が常に成立することを考慮すれば、式(51)の汎関数Hの停留条件より以下の連立方程式を得る。

$$-f_1^0\Delta t/3-f_1^1\Delta t/6+kx_2^1\Delta t/6=\{(\Delta t)^2/6+t_1\Delta t/2\}p_0-kx_2^0\Delta t/3$$

$$-f_1^0\Delta t/6-f_1^1\Delta t/3+kx_2^1\Delta t/3=\{(\Delta t)^2/3+t_1\Delta t/2\}p_0-kx_2^0\Delta t/6$$

$$(-m_2/\Delta t-k\Delta t/6)x_2^1+\tilde{p}_2^0$$
$$=-\{(\Delta t)^2/6+t_1\Delta t/2\}p_0+(k\Delta t/3-m_2/\Delta t)x_2^0$$

$$(m_2/\Delta t-k\Delta t/3)x_2^1-\tilde{p}_2^1$$
$$=-\{(\Delta t)^2/3+t_1\Delta t/2\}p_0+(k\Delta t/6+m_2/\Delta t)x_2^0 \qquad (52)$$

ここに、($)^0$と($)^1$はそれぞれ $t=t_0$と$t=t_1$における諸量を示しており、これらの式より$f_1^0, f_1^1, \tilde{p}_2^1, x_2^1$が求まる。この制御問題に対する厳密解は簡単に求まり、未知外力F(t)は以下のようになる。

$$F(t)=m_2p_0k^{-1}\sqrt{km_2^{-1}}\ \sin t\sqrt{km_2^{-1}} \qquad (53)$$

本例題の厳密解と数値解の比較を表1に示す。時間刻みが比較的大きい$\Delta t=0.5$の時は、外力に15%程の誤差が生じているが、この誤差は累積することなく、常にほぼ一定であることが分かる。$\Delta t=0.1$の時は、未知外力に関する厳密解と数値解の誤差は1%以下であり良い結果となっている。一方、剛体2の変位について見ると、$\Delta t=0.5$の時でさえも、厳密解と数値解の誤差は0.1%程であり、良好な結果が得られていることが分かる。

Table 1 a (Δt= 0.5)

Time	Exact Results	Numerical Results	Error (%)
T= 10.00	FORCE= 0.65407070E-01	FORCE= 0.55078909E-01	ERROR= 0.15790588E+02
	DISPL= 0.10065407E+02	DISPL= 0.10055079E+02	ERROR= 0.10261046E+00
T= 20.00	FORCE= -0.13078615E+00	FORCE= -0.11014114E+00	ERROR= 0.15785320E+02
	DISPL= 0.19869214E+02	DISPL= 0.19889859E+02	ERROR= 0.10390453E+00
T= 30.00	FORCE= 0.19610928E+00	FORCE= 0.16517003E+00	ERROR= 0.15776537E+02
	DISPL= 0.30196109E+02	DISPL= 0.30165170E+02	ERROR= 0.10246106E+00
T= 40.00	FORCE= -0.26134850E+00	FORCE= -0.22014891E+00	ERROR= 0.15764236E+02
	DISPL= 0.39738651E+02	DISPL= 0.39779851E+02	ERROR= 0.10367638E+00
T= 50.00	FORCE= 0.32647591E+00	FORCE= 0.27506114E+00	ERROR= 0.15748412E+02
	DISPL= 0.50326476E+02	DISPL= 0.50275061E+02	ERROR= 0.10216247E+00
T= 60.00	FORCE= -0.39146362E+00	FORCE= -0.32989009E+00	ERROR= 0.15729057E+02
	DISPL= 0.59608536E+02	DISPL= 0.59670110E+02	ERROR= 0.10329651E+00

Table 1 b (Δt= 0.1)

Time	Exact Results	Numerical Results	Error (%)
T= 10.00	FORCE= 0.65407070E-01	FORCE= 0.64993247E-01	ERROR= 0.63268869E+00
	DISPL= 0.10065407E+02	DISPL= 0.10064993E+02	ERROR= 0.41113402E-02
T= 20.00	FORCE= -0.13078615E+00	FORCE= -0.12995904E+00	ERROR= 0.63241871E+00
	DISPL= 0.19869214E+02	DISPL= 0.19870041E+02	ERROR= 0.41628024E-02
T= 30.00	FORCE= 0.19610928E+00	FORCE= 0.19486993E+00	ERROR= 0.63196866E+00
	DISPL= 0.30196109E+02	DISPL= 0.30194870E+02	ERROR= 0.41043341E-02
T= 40.00	FORCE= -0.26134850E+00	FORCE= -0.25969851E+00	ERROR= 0.63133836E+00
	DISPL= 0.39738651E+02	DISPL= 0.39740301E+02	ERROR= 0.41521121E-02
T= 50.00	FORCE= 0.32647591E+00	FORCE= 0.32441739E+00	ERROR= 0.63052762E+00
	DISPL= 0.50326476E+02	DISPL= 0.50324417E+02	ERROR= 0.40903336E-02
T= 60.00	FORCE= -0.39146362E+00	FORCE= -0.38899922E+00	ERROR= 0.62953612E+00
	DISPL= 0.59608536E+02	DISPL= 0.59611001E+02	ERROR= 0.41343154E-02

5.　おわりに

本論文では、動的解析の出発点とされているHamiltonの原理について考察した。たたみこみ積分を用いることなしに、運動量に関する初期条件を含んだ汎関数を提案した。その汎関数を基に、無限小変換を施すことにより、拡張されたNoetherの定理について述べ、その特別な場合として、拡張されたHamiltonの原理を提案した。その応用として、時間有限要素法について述べ、簡単な例題により本解法の精確さ及び利点を明らかにした。最後に、簡単な宇宙構造物の制御問題について解析を行なったが、より複雑な宇宙構造物の制御問題に本手法を適用することは今後の課題である。

6.　謝辞

本研究の一部は、文部省科学研究費の補助を受けて行なわれたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

1) Argyris,T.E. and Scharpf,D.W. : Finite elements in time and space, AJRAS, Vol.73, 1969, pp.1041-1044.
2) Fried,I. : Finite element Analysis of time dependent phenomena, AIAA J., Vol.7, 1969, pp.1170-1173.
3) Oden,J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1977.
4) Bailey,C.D. : Dynamics and the calculus of variations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., No. 60, 1987, pp.275-287.
5) Gurtin,M. : The linear theory of elasticity, in: Handbuch der Physik, Vol.Via/2, Mechanics of Solids II, Springer, 1972.
6) Washizu,K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1982.
7) 池田峰夫 : 現代ベクトル解析とその応用、コロナ社、1975.
8) 井浦雅司 : 有限要素法による棒の縦衝撃解析における2、3の考察、 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第13巻、1989.
9) Simkins,T.E. : Finite elements for initial Value Problems in Dynamics, AIAA J., Vol.19, 1981, pp.1357-1362.
10) Martin,H.C.(吉識雅夫監訳) : マトリックス法による構造力学の解法、培風館、1967.
11) 名取通弘 : 宇宙構造物工学の概要、土木学会論文集、第410号／I-12、1989.

(1990年10月12日受付)