

## 修正された変分原理による空間曲線材の有限変位解析

MODIFIED VARIATIONAL PRINCIPLE FOR THE FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF SPACE CURVED MEMBERS

岩崎英治\* 林 正\*\*

By Eiji IWASAKI and Masa HAYASHI

A new formulation based on a modified variational principle is presented for the finite displacement analysis of spatial frames with curved beams and cables. The functional of the variational principle is given by introducing Lagrange multipliers for satisfying the compatibility equations among elongation, finite rotations and displacements. The independent quantities subject to variation in the functional are displacements of both ends, sectional forces of one end and rotations in the inside of a member. Moreover, a functional of cable members is derived by neglecting the terms about bending and torsion. A few numerical examples are calculated to demonstrate the accuracy of the proposed procedure.

## 1. 緒 言

マトリックス法や有限要素法による構造解析は、ほとんどが変位法によって行われている。これは、応力法に比べて解析手順が単純で汎用性があり、多くの解析手法が確立されていることと、静的な線形問題から非線形や動的な問題への拡張が容易であるためと思われる。特に、幾何学的非線形問題では、ひずみと変位の非線形性を応力だけで表現することが、困難なことからも窺い知れる。

しかし、変位法にも多少の問題がある。例えば、要素境界での幾何学的境界条件を満足した平衡方程式の解を変位関数として用いない限り誤差が発生し、要素内の応力の精度は変位に比べて悪化する。さらに、曲線要素やせん断変形を考慮した要素では、要素の剛性が過大に評価され精度が著しく悪化する場合のあることが知られており、この対策として、次数低減積分による手法が提案されている<sup>1)~3)</sup>。

一方、Hellinger-Reissnerの汎関数を基本とした、要素内部の変位と応力を仮定する混合法、要素内で応力の平衡条件または、変位の適合条件を満足させ、隣接する要素間の平衡性や適合性を接合部で定義した接合変数により満足させるハイブリッド法が提案されている<sup>4)</sup>。これらの方法について、線形解析では多くの研究があり、有限変位解析についても研究が行われている<sup>5)~9)</sup>。

NoorとPeters<sup>5)</sup>、ReddyとSingh<sup>6)</sup>は、Hellinger-Reissnerの原理により、平面曲線部材の有限変位解析を行い、中西と波田<sup>7)</sup>は同じ原理を用いて、ケーブル構造の有限変位解析を行い、精度の良い解を得ている。Fujii<sup>8)</sup>は軸線の不伸長性と、要素内の変位を1次式で仮定したことにより単純化された混合原理を用いて、

\* 工博 長岡技術科学大学助手 工学部建設系 (〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

\*\* 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系 (〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

平面部材の有限変位解析を行っている。この汎関数は要素内のエネルギーの評価が簡潔になっている反面、荷重による仕事の評価が複雑になっている。

有限変位問題での平衡方程式と力学的境界条件式は、通常使用されるKirchhoffの応力では、変位との間に連成が起こるが、Piolaの応力を用いると、この連成が無くなることに注目して、近藤<sup>9)</sup>は、Piolaの応力を用いて平衡方程式を付帯条件としたハイブリッド型Hu-Washizuの原理により、平面部材の有限変位解析を行い、変形の大きな部材でも数要素で精度の良い解を得ている。しかし、非線形項の扱いが統一されていないためと思われるが、Kirchhoffの応力とPiolaの応力で表した断面力の数が一致していない。

なお、混合法と低減積分による変位法が等価なことが、文献5,7,10)に示されており、注目すべきことと思われるが、応力に関しては要素内での関数形を仮定する混合法が変位法に比べて精度のよい値を得ている。

変位法による立体骨組構造の有限変位解析については多くの研究が行われているが<sup>11)~15)</sup>、混合法やハイブリッド法による研究は少ないように思われる。しかし、平面と立体骨組の有限変位解析上の本質的な違いは、有限回転の扱いにあるので、文献11)~15)の有限回転の扱いを、混合法やハイブリッド法による定式化に適用すれば、変位・応力共に精度のよい解が得られることが予想される。ところで、混合法は拘束条件を緩和した手法であるので、平衡条件と適合条件が近似的に満足されているに過ぎない。また、骨組部材を対象にした場合のハイブリッド法では、要素内部での平衡条件を満たした応力を仮定したもの以外は、変位法や混合法に比べて、利点は少ないように思われるが、有限変位問題では、一般に平衡条件を満たした応力を仮定するのは、困難なことから、適用に問題がある。

ところで、ケーブル部材をマトリックス法で解析する場合に、多数のピン結合された直線部材として取り扱えるが、未知量が非常に多くなる欠点がある。このために、ケーブルの解析解を利用して剛性方程式を誘導した研究<sup>21), 22)</sup>や、応力法に基づいたケーブルの結合点での適合力を未知量とする研究<sup>23)</sup>などがある。しかし、前2者の方法は3次元問題への拡張が困難であり、後者の方法は応力法に固有の欠点を有している。

これらのことより、本論文では、変位法の基礎をなす全ポテンシャルエネルギーの汎関数を変形し、変位法と応力仮定のハイブリッド法を合わせた汎関数を誘導して、有限変位解析を行う。この汎関数が停留したときのモーメントは、平衡条件を近似的に満足しているに過ぎないが、モーメントを除いた断面力と変位は、それぞれ、平衡条件と適合条件を満たしている。なお、本文では、部材断面は部材軸に直交した平面を保持し、断面形状は変化しない充実部材を対象にする。この場合には、部材軸上の変位と回転には、2つの拘束がある。これらの拘束条件と部材軸の伸び率と変位の関係をLagrange乗数により汎関数に含めることにより、変位と回転、伸び率を独立な変関数として扱えるが、この汎関数をさらに変形することにより、部材内部の回転と部材端の接合変数を表す変位、部材内部の平衡条件を満足した断面力を独立な変関数とした変位法とハイブリッド法を融合した汎関数を誘導する。また、この汎関数では部材内部の関数形が必要なのは回転だけであり、断面力は平衡条件を満たしていることから少ない自由度で変位、断面力共に精度のよい解が得られることを計算例により示す。さらに、この汎関数において、曲げ剛性とねじれ剛性を零にすることにより、ケーブル部材を誘導している。この部材は、部材内部での変位関数が必要な回転を未知量として含まないので正確である。なお、有限変位問題の定式化は、更新Lagrangeの方法で行う。すなわち、すべての諸量は $n$ 回の増分後のつり合い形状を参照して定義されている。

## 2. 空間曲線部材の基礎式

### (1) 座標系

空間に固定されたデカルト座標系 $(X, Y, Z)$ を考え、この座標系の単位基底ベクトルを $E_i (i=1, 2, 3)$ とする。また、部材を構成する母線の一つを部材軸とし、これに沿った座標軸を $x$ 、部材軸の法平面内の2つの直交する方向の座標軸を $y, z$ とした部材に固定された座標系 $(x, y, z)$ を導入する。この座標系の単位基底ベクトルは $e_i$ とする。

## (2) 部材軸の幾何学

荷重の作用により部材は変形しているものとし、このときの部材軸の伸び率を $\varepsilon_i$ ,ねじれ率, $x-z$ , $x-y$ 面内の曲率を $\kappa_i^*$ ( $i=1,2,3$ )とする。また、座標系 $(x, y, z)$ の単位基底ベクトルを $e_i^*$ とする。

基底ベクトルの導関数には、次の関係がある。

$$e_{i,1}^* = \kappa^* \times e_i^* \quad (1)$$

ここに、 $(\cdot)_{,1}$ は部材軸 $x$ による微分を表し、 $\kappa^*$ はねじれ率と曲率から成るベクトルである。

$$\kappa^* = \kappa_1^* e_1^* + \kappa_2^* e_2^* + \kappa_3^* e_3^*$$

荷重の増加により、さらに変形した部材を考える。このとき、部材軸上の点はベクトル $u$ だけ変位し、基底ベクトルは、回転軸を表す単位ベクトル $\phi$ の回りの角 $\Delta\alpha$ で表される回転をする。

ところで、3次元空間での回転は可換則が成立しないので、通常のパクトルではない次のような回転ベクトル(軸性ベクトル)を導入する<sup>16)</sup>。

$$\Delta\theta = 2\phi \tan \frac{\Delta\alpha}{2}$$

また、回転後の基底ベクトル $e_i^{*+1}$ は次のように表現できる。

$$e_i^{*+1} = \Delta R e_i^*$$

ただし、 $\Delta R$ ,  $I$ はそれぞれ回転行列, 3次の単位行列を表し、行列 $\Delta R$ は次式で与えられる。

$$\Delta R = I + \frac{1}{1 + \Delta\theta^T \Delta\theta / 4} \left( I + \frac{1}{2} \Delta\theta \right) \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \Delta\theta \times I \quad (4.a, b)$$

なお、以下ではベクトルに $\sim$ の付いたものは式(4.b)の定義に従う行列を表すものとする。

基底ベクトル $e_i^{*+1}$ の導関数は、式(1)と同様に次のように表せる。

$$e_{i,1}^{*+1} = \kappa^{*+1} \times e_i^{*+1} \quad (5)$$

ここに、 $\kappa^{*+1}$ は次式で与えられる。

$$\kappa^{*+1} = \Delta R \kappa^* + \Delta\kappa, \quad \Delta\kappa = \frac{1}{1 + \Delta\theta^T \Delta\theta / 4} \left( I + \frac{1}{2} \Delta\theta \right) \Delta\theta \quad (6)$$

上式の $\Delta\kappa$ は成分表示すると、次のようになる。

$$\Delta\kappa_i = \frac{1}{1 + \Delta\theta^T \Delta\theta / 4} \left( \Delta\psi_i - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Delta\theta_j \Delta\theta_k \right) \quad (7)$$

ここに、 $\varepsilon_{ijk}$ はエディントンの $\varepsilon$ である。また、 $\Delta\kappa_1$ は部材軸のねじれ率の増分、 $\Delta\kappa_2, \Delta\kappa_3$ は $x-z, x-y$ 面内の曲率の増分を表し、 $\Delta\kappa_i$ と $\Delta\theta_i$ は、それぞれベクトル $\Delta\kappa$ と $\Delta\theta$ の $e_i^{*+1}, e_i^*$ 成分である。また、 $\Delta\psi_i$ はベクトル $\Delta\theta_{,1}$ の $e_i^{*+1}$ 成分を表し、 $\Delta\theta_i$ から次式で与えられる。

$$\Delta\psi_i = \Delta\theta_{i,1} + \varepsilon_{ijk} \kappa_j^* \Delta\theta_k^* \quad (8)$$

ところで、部材軸上の点の位置ベクトル $r^{*+1}$ は、図-1のように $r^* + \Delta u$ で表され、これを部材軸 $x$ で微分すると次式が得られる。

$$(1 + \varepsilon_0^* + \Delta\varepsilon_0^*) e_1^{*+1} = (1 + \varepsilon_0^*) e_1^* + \Delta u_{,1} \quad (9)$$

上式に、式(3)を代入して、 $e_i^{*+1}$ に関する成分を表すと次式のようなになる。

$$1 + \varepsilon_0^* + \Delta\varepsilon_0^* = (1 + \varepsilon_0^* + \Delta\varepsilon_0^*) \left\{ 1 - \frac{(\Delta\theta_2^2 + \Delta\theta_3^2)/2}{1 + \Delta\theta^T \Delta\theta / 4} \right\}, \quad \Delta t_2 = (1 + \varepsilon_0^* + \Delta\varepsilon_0^*) \frac{\Delta\theta_3 + \Delta\theta_1 \Delta\theta_2 / 2}{1 + \Delta\theta^T \Delta\theta / 4}$$

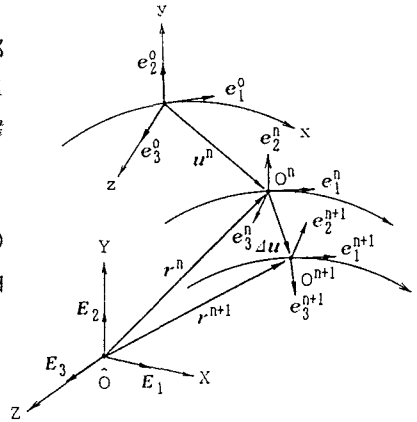
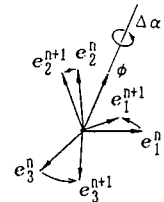


図-1. 座標系・基底ベクトルと変位



(3) 図-2. 基底ベクトルの回転

$$\Delta t_3 = (1 + \varepsilon_0^n + \Delta \varepsilon_0) \frac{-\Delta \theta_2 + \Delta \theta_1 \Delta \theta_3 / 2}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} \quad \left. \vphantom{\Delta t_3} \right\} \quad (10)$$

ここに、 $\Delta t_i$ はベクトル $\Delta \mathbf{u}_{i,1}$ の $\mathbf{e}_i$ 成分を表し、 $\Delta \mathbf{u}$ の $\mathbf{e}_i$ 成分 $\Delta u_i$ から次式のようになる。

$$\Delta t_i = \Delta u_{i,1} + \varepsilon_{i,jk} \kappa_j^n \Delta u_k \quad (11)$$

式(10)は変位と伸び率、回転との間の関係を表しているが、これを $\Delta \varepsilon_0$ 、 $\Delta \theta_2$ 、 $\Delta \theta_3$ に関して解き、 $\Delta \theta_2$ 、 $\Delta \theta_3$ を式(7)に代入して、 $\Delta \theta_1$ を $2 \tan(\Delta \phi / 2)$ で置換すると、伸び率、ねじれ率、曲率は文献(17)の厳密な式に一致することが確かめられる。なお、文献(17)では、ねじれ角を $\Delta \phi$ で表している。

### (3) 変位とひずみ

図-3より、断面内の点Pの変位 $\Delta \mathbf{u}_p$ は、部材軸上の変位 $\Delta \mathbf{u}$ と回転行列 $\Delta \mathbf{R}$ から次のように表される。

$$\Delta \mathbf{u}_p = \Delta \mathbf{u} + (\Delta \mathbf{R} - \mathbf{I}) \bar{\mathbf{r}}_p^n \quad (12)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{r}}_p^n$ は断面内の点の座標 $(y, z)$ より、次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{r}}_p^n = y \mathbf{e}_2^n + z \mathbf{e}_3^n \quad (13)$$

ひずみは、グリーンンのひずみを採用すると、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11} &= \Delta \varepsilon_0 - \Delta \kappa_3 y + \Delta \kappa_2 z + \left( \hat{\kappa}_1^n + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1 \right) \Delta \kappa_1 (y^2 + z^2) \\ 2\Delta \varepsilon_{12} &= -\Delta \kappa_1 z, \quad 2\Delta \varepsilon_{13} = \Delta \kappa_1 y, \quad \Delta \varepsilon_{22} = \Delta \varepsilon_{33} = \Delta \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

なお、上式の誘導に際して、母線ごとの曲率の違いと伸び率による影響は、小さいものとしている。また、 $\hat{\kappa}_1^n$ は $\kappa_1^n$ と $\kappa_1^0$ (初期ねじれ率)の差である。

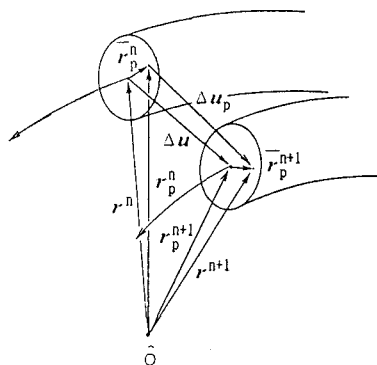


図-3 位置ベクトル

## 3. 変分原理の変換

### (1) 全ポテンシャルエネルギー

本文では、部材長を $l$ で表し、部材軸上の $x=0$ の点を節点 $a$ 、 $x=l$ の点を節点 $b$ とする。

部材のひずみエネルギー $U$ は、式(14)より次式のようになる。

$$U = \int_0^l \left\{ \left( N^n + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta \varepsilon_0 + \left[ \left( T_s^n + \frac{\Delta T_s}{2} \right) + \left( M_r^n + \frac{\Delta M_r}{2} \right) \left( \hat{\kappa}_1^n + \frac{\Delta \kappa_1}{2} \right) \right] \Delta \kappa_1 + \left( M_y^n + \frac{\Delta M_y}{2} \right) \Delta \kappa_2 + \left( M_z^n + \frac{\Delta M_z}{2} \right) \Delta \kappa_3 \right\} dx \quad (15)$$

ここに、2軸対称断面を仮定すると断面力は、変形量から次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta N &= EA \Delta \varepsilon_0 + E I_r \left( \hat{\kappa}_1^n + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1 \right) \Delta \kappa_1, \quad \Delta T_s = G J_s \Delta \kappa_1, \\ \Delta M_y &= E I_y \Delta \kappa_2, \quad \Delta M_z = E I_z \Delta \kappa_3, \quad \Delta M_r = E I_r \Delta \varepsilon_0 + E I_{rr} \left( \hat{\kappa}_1^n + \frac{1}{2} \Delta \kappa_1 \right) \Delta \kappa_1 \end{aligned} \right\} \quad (16.a \sim e)$$

断面定数は

$$A = \int dA, \quad I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA, \quad I_r = J_s = I_y + I_z, \quad I_{rr} = \int (y^2 + z^2)^2 dA \quad (17)$$

荷重による仕事 $W$ は定義より、次式のようになる。

$$W = \int_V (\mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p})^T \Delta \mathbf{u}_p dV + \left[ \bar{\mathbf{n}}_x \int_A (\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}})^T \Delta \mathbf{u}_p dA \right]_0^l \quad (18)$$

ここに、 $(\mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p})$ は部材内の単位体積当りの荷重、 $(\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}})$ は部材端の単位面積当りの荷重を表し、 $\bar{\mathbf{n}}_x$ は部材端の断面の外向き法線と部材軸との方向余弦で、 $x=0$ で $-1$ 、 $x=l$ で $+1$ の値をとる。なお、部材内部の荷重は断面内では一様に作用しているものとし、分布モーメントは作用していないものとする。

上式に、式(12)を代入して変形すると次式が得られる。

$$W = \int_0^l (\mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q})^T \Delta \mathbf{u} dx + \left[ \bar{\mathbf{n}}_x \left\{ (\bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta \bar{\mathbf{Q}})^T \Delta \mathbf{u} + \frac{(\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}})^T \Delta \theta}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \theta^T (\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}}) \Delta \theta}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} \right\} \right]_0^l \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q}) &= \int_A (\mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p}) dA, \quad (\bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta \bar{\mathbf{Q}}) = \int_A (\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}}) dA, \\ (\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}}) &= \int_A \bar{\mathbf{r}}_p^n \times (\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}}) dA, \quad (\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}}) = \int_A [\bar{\mathbf{r}}_p^n (\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}}) + (\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}}) \bar{\mathbf{r}}_p^n] dA \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上式の荷重 $(\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}})$ ,  $(\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}})$ 等は、断面内の点に作用した荷重 $(\mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p})$ ,  $(\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}})$ を部材軸上の点に作用した荷重に置換したものである。荷重 $(\mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p})$ ,  $(\bar{\mathbf{P}}^n + \Delta \bar{\mathbf{P}})$ の作用線までの部材軸上の点からの距離は、断面が回転することにより変化し、モーメントは回転の関数になるために、 $(\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}})$ の項が現れている。

式(15), (19)より、全ポテンシャルエネルギー $\Pi$ は、次式で与えられる。

$$\Pi = U - W \quad (21)$$

なお、変分をうける独立な変関数は $\Delta \mathbf{u}$ と $\Delta \theta$ であり、上式が停留したときの状態が平衡状態を表している。

## (2) 汎関数の変換

変位と伸び率、回転との間の関係を表す式(9)とLagrangeの未定乗数ベクトル $(\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})$ で表される汎関数に、式(21)を加えた次のような汎関数を考える。

$$\Pi_I = \Pi + \int_0^l (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})^T \{ (1 + \varepsilon_0^n) \mathbf{e}_1^n + \Delta \mathbf{u}_{,1} - (1 + \varepsilon_0^n + \Delta \varepsilon_0) \mathbf{e}_1^{n+1} \} dx \quad (22)$$

ここに、変分をうける独立な変関数は $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \varepsilon_0$ ,  $\Delta \mathbf{F}$ であり、上式が停留したときに、式(21)が停留し、さらに式(9)の条件が満足される。

式(22)の停留条件は、部材内で次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta(\Delta \mathbf{u}): \quad (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})_{,1} &= -(\mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q}) \\ \delta(\Delta \theta): \quad (\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}})_{,1} &= -(1 + \varepsilon_0^n + \Delta \varepsilon_0) \mathbf{e}_1^{n+1} \times (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) \\ \delta(\Delta \varepsilon_0): \quad (N^n + \Delta N) &= \mathbf{e}_1^{n+1 T} (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) \\ \delta(\Delta \mathbf{F}): \quad (1 + \varepsilon_0^n) \mathbf{e}_1^n + \Delta \mathbf{u}_{,1} &= (1 + \varepsilon_0^n + \Delta \varepsilon_0) \mathbf{e}_1^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (23.a \sim d)$$

変位が拘束されていない部材端では、次の境界条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \delta(\Delta \mathbf{u}): \quad (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) &= \bar{\mathbf{n}}_x (\bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta \bar{\mathbf{Q}}) \\ \delta(\Delta \theta): \quad (\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}}) &= \frac{\bar{\mathbf{n}}_x}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} \left\{ \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta \theta - \frac{1}{4} \Delta \theta \Delta \theta^T \right) (\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}}) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} \Delta \theta \right) (\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}}) \Delta \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここに、 $(\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}})$ は、ねじれモーメントと曲げモーメントからなるベクトルで、次式で与えられる。

$$(\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}}) = [(T_s^n + \Delta T_s) + (M_r^n + \Delta M_r) (\hat{\kappa}_1^n + \Delta \kappa_1)] \mathbf{e}_1^{n+1} + (M_y^n + \Delta M_y) \mathbf{e}_2^{n+1} + (M_z^n + \Delta M_z) \mathbf{e}_3^{n+1} \quad (25)$$

また、未定乗数ベクトル $(\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})$ は、式(10)のそれぞれの式に対する未定乗数を $(F_x^n + \Delta F_x)$ ,  $(F_y^n + \Delta F_y)$ ,  $(F_z^n + \Delta F_z)$ とすると、次のようになる。

$$(\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) = (F_x^n + \Delta F_x) \mathbf{e}_1^n + (F_y^n + \Delta F_y) \mathbf{e}_2^n + (F_z^n + \Delta F_z) \mathbf{e}_3^n \quad (26)$$

式(23), (24)より、Lagrange乗数 $(\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})$ は断面力ベクトルを表していることが分かる。

いま、汎関数の付帯条件として $(\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})$ ,  $(N^n + \Delta N)$ が、式(23.a, c)の関係を満足しているものとする。

また、伸び率 $\Delta \varepsilon_0$ は式(16.a)より、軸力とねじれ率で表現できるので、式(22)から消去し、 $\Delta \mathbf{u}_{,1}$ に関する積分項を部分積分すると、次のような汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi_{II} = & \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + (1 + \varepsilon_0^n) \{ (F_x^n + \Delta F_x) - (N^n + \Delta N) \} \right\} dx + \left[ \{ (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) - \bar{\mathbf{n}}_x (\bar{\mathbf{Q}}^n + \Delta \bar{\mathbf{Q}}) \}^T \Delta \mathbf{u} \right]_0^l \\ & + \int_0^l \left\{ \left[ (T_s^n + \frac{\Delta T_s}{2}) + (M_r^n + \frac{\Delta M_r}{2} + \frac{1}{A} \frac{\Delta N}{2}) (\hat{\kappa}_1^n + \frac{\Delta \kappa_1}{2}) \right] \Delta \kappa_1 + (M_y^n + \frac{\Delta M_y}{2}) \Delta \kappa_2 + (M_z^n + \frac{\Delta M_z}{2}) \Delta \kappa_3 \right\} dx \\ & - \left[ \bar{\mathbf{n}}_x \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}})^T \Delta \theta}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} + \frac{1}{4} \frac{\Delta \theta^T (\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}}) \Delta \theta}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} \right\} \right]_0^l \end{aligned} \quad (27)$$

なお、上式に含まれる $\Delta M_r$ は、式(16.e)で伸び率 $\Delta \epsilon_o$ を消去した次式を用いる。

$$\Delta M_r = \frac{I_r}{A} \Delta N + E \left( \frac{I_r}{r} - \frac{I_r^2}{A} \right) \left( \hat{\kappa}_1^n + \frac{\Delta \kappa_1}{2} \right) \Delta \kappa_1 \quad (28)$$

式(27)に含まれる $(F^n + \Delta F)$ 、 $(N^n + \Delta N)$ は、式(23.a,c)を満足していなければならないので、 $(F^n + \Delta F)$ には式(23.a)の解である次式を用い、 $(N^n + \Delta N)$ には式(23.a)の解と式(23.c)を用いる。

式(23.a)を解くと、 $(F^n + \Delta F)$ の一般解は、次のように表現できる。

$$(F^n + \Delta F) = (c^n + \Delta c) - \int_0^l (q^n + \Delta q) dx \quad (29)$$

上式で、 $(c^n + \Delta c)$ は積分定数ベクトル(a端での断面力ベクトル)である。

上式と式(23.c)より、式(27)において変分をうける独立な変分量は、両端の変位ベクトル $\Delta u_a, \Delta u_b$ 、回転を表すベクトル $\Delta \theta$ と積分定数 $\Delta c$ であり、式(27)が停留したときに式(21)が停留し、式(9)の関係式が満足される。

これらの変分量に関する停留条件は次のようになる。

$\Delta c$ に関する停留条件：

$$\int_0^l \left\{ \left[ 1 + \frac{N^n + \Delta N}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n + \Delta \kappa_1)^2 \right] e_1^{n+1} - \left[ 1 + \frac{N^n}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n)^2 \right] e_1^n \right\} dx = [\Delta u]^t \quad (30.a)$$

$\Delta u$ が拘束されていない端部での停留条件：

$$(F^n + \Delta F) = \bar{n}_x (\bar{Q}^n + \Delta Q) \quad (30.b)$$

部材内部での $\Delta \theta$ の停留条件：

$$(M^n + \Delta M)_{,1} = - \left[ 1 + \frac{N^n + \Delta N}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n + \Delta \kappa_1)^2 \right] e_1^{n+1} \times (F^n + \Delta F) \quad (30.c)$$

$\Delta \theta$ が拘束されていない端部での停留条件：

$$(M^n + \Delta M) = \frac{\bar{n}_x}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} \left\{ \left( I + \frac{1}{2} \Delta \theta - \frac{1}{4} \Delta \theta \Delta \theta^T \right) (\bar{M}^n + \Delta M) + \frac{1}{2} \left( I + \frac{1}{2} \Delta \theta \right) (\bar{G}^n + \Delta G) \Delta \theta \right\} \quad (30.d)$$

式(27)の汎関数 $\Pi_M$ を求める場合に、 $\Delta u$ は部材端の値だけが必要であり、 $\Delta c$ は定数であるから部材内での関数形が必要なのは回転 $\Delta \theta$ だけであるので、関数を仮定することによる誤差は回転に含まれることになる。したがって、 $\Pi_M$ が停留したときには、モーメントの平衡条件や部材間の連続性は平均的に満足されるだけであるが、部材両端の変位と伸び率、回転との適合条件を表す式(30.a)、断面力と荷重の関係を表す式(30.b)と、隣接する部材間の断面力の連続性は成立している。

#### 4. 数値解法

##### (1) 離散化された停留条件

部材内部の回転 $\Delta \theta$ は、節点での回転から次のように表現できるものとする。

$$\Delta \theta = N^T \Delta d + \tilde{N}^T \tilde{\Delta d} \quad (31)$$

ここに、 $N, \tilde{N}$ は補間関数を要素とする行列、 $\Delta d$ は両端の回転を成分とするベクトル、 $\tilde{\Delta d}$ は部材内部の節点の回転を成分とするベクトルを表している。

式(31)と(29)を、式(27)に代入して、第一変分を求めると、停留条件は次のようになる。

$$\frac{\partial \Pi_M}{\partial (\Delta c)} = \int_0^l \left\{ \left[ 1 + \frac{N^n}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n)^2 \right] e_1^n - \left[ 1 + \frac{N^n + \Delta N}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n + \Delta \kappa_1)^2 \right] e_1^{n+1} \right\} dx + [\Delta u]^t = 0 \equiv f_c$$

$$\frac{\partial \Pi_M}{\partial (\tilde{\Delta d})} = \int_0^l \left\{ \frac{\tilde{N} (I - \Delta \theta / 2)}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta / 4} \right\}_{,1} (M^n + \Delta M) dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l \left[ 1 + \frac{N^n + \Delta N}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n + \Delta \kappa_1)^2 \right] \frac{\tilde{N}(I - \Delta \theta/2)}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta/4} \tilde{\mathbf{e}}_1^{n+1} (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) dx = \mathbf{0} \equiv \tilde{\mathbf{f}}_\theta \\
\frac{\partial \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{d})} &= \int_0^l \left\{ \frac{N(I - \Delta \theta/2)}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta/4} \right\}_{,1} (\mathbf{M}^n + \Delta \mathbf{M}) dx \\
& - \int_0^l \left[ 1 + \frac{N^n + \Delta N}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n + \Delta \kappa_1)^2 \right] \frac{N(I - \Delta \theta/2)}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta/4} \tilde{\mathbf{e}}_1^{n+1} (\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}) dx \\
& - \left[ \bar{n}_x \frac{N}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta/4} \left\{ \left( I - \frac{\Delta \theta \Delta \theta^T/2}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta/4} \right) (\bar{\mathbf{M}}^n + \Delta \bar{\mathbf{M}}) + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta \theta \Delta \theta^T/2}{1 + \Delta \theta^T \Delta \theta/4} \right) (\bar{\mathbf{G}}^n + \Delta \bar{\mathbf{G}}) \Delta \theta \right\} \right]_0^l = \mathbf{0} \equiv \mathbf{f}_\theta \\
\frac{\partial \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{u}_a)} &= -(\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}) - (\bar{\mathbf{P}}_a^n + \Delta \bar{\mathbf{P}}_a) = \mathbf{0} \equiv \mathbf{f}_a \\
\frac{\partial \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{u}_b)} &= (\mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}) - \int_0^l (\mathbf{q}^n + \Delta \mathbf{q}) dx - (\bar{\mathbf{P}}_b^n + \Delta \bar{\mathbf{P}}_b) = \mathbf{0} \equiv \mathbf{f}_b \quad (32.a \sim e)
\end{aligned}$$

これらの停留条件は、 $\Delta \mathbf{c}$ ,  $\Delta \mathbf{d}$ ,  $\Delta \mathbf{d}$  に関して非線形になっているので、上式の解はNewton法により求める。このときの反復式 ( $k \geq 1$ ) は、式(32)とその導関数より、一般に次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_c^{(k)} & \tilde{\mathbf{G}}_\theta^{(k)} & \mathbf{G}_\theta^{(k)} & \mathbf{G}_a^{(k)} & \mathbf{G}_b^{(k)} \\ & \tilde{\mathbf{K}}^{(k)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(k)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{K}^{(k)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{sym.} & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}^{(k+1)} - \Delta \mathbf{c}^{(k)} \\ \Delta \mathbf{d}^{(k+1)} - \Delta \mathbf{d}^{(k)} \\ \Delta \mathbf{d}^{(k+1)} - \Delta \mathbf{d}^{(k)} \\ \Delta \mathbf{u}_a^{(k+1)} - \Delta \mathbf{u}_a^{(k)} \\ \Delta \mathbf{u}_b^{(k+1)} - \Delta \mathbf{u}_b^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_c^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_\theta^{(k)} \\ \mathbf{f}_\theta^{(k)} \\ \mathbf{f}_a^{(k)} \\ \mathbf{f}_b^{(k)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

ここに、 $\mathbf{H}_c$ ,  $\mathbf{G}_\theta$ ,  $\mathbf{G}_a$ ,  $\mathbf{K}$ 等は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_c &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{c}) \partial (\Delta \mathbf{c})^T}, & \mathbf{G}_\theta &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{c}) \partial (\Delta \mathbf{d})^T}, & \tilde{\mathbf{G}}_\theta &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{c}) \partial (\Delta \tilde{\mathbf{d}})^T}, & \mathbf{G}_a &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{c}) \partial (\Delta \mathbf{u}_a)^T} \\ \mathbf{K} &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{d}) \partial (\Delta \mathbf{d})^T}, & \tilde{\mathbf{K}} &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \tilde{\mathbf{d}}) \partial (\Delta \mathbf{d})^T}, & \tilde{\tilde{\mathbf{K}}} &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \tilde{\mathbf{d}}) \partial (\Delta \tilde{\mathbf{d}})^T}, & \mathbf{G}_b &= \frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial (\Delta \mathbf{c}) \partial (\Delta \mathbf{u}_b)^T} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

また、Newton法の初期値  $\Delta \mathbf{c}^{(1)}$ ,  $\Delta \tilde{\mathbf{d}}^{(1)}$ ,  $\Delta \mathbf{d}^{(1)}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_a^{(1)}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_b^{(1)}$  は、式(32)を増分量について線形化した式により求める。ところで、 $\Delta \mathbf{c}$ ,  $\Delta \tilde{\mathbf{d}}$  は部材ごとに独立な量なので、構造全体の剛性方程式を求める以前に、消去することができる。消去された残りの式は、節点での変位と回転に関する式であり、これは変位法によるマトリックス法の剛性方程式を表している。

式(32), (34)の積分は解析的には行えないので、Gauss-Legendreの数値積分法により求める。このときの積分点数は式(33)の係数行列が特異になることを避けるために、本文での部材は回転を表す節点数以上の積分点数を用いることが必要である。また、部材が直線の場合には  $\mathbf{H}_c$  が特異になるので、部材内部の節点は少なくとも1つ必要である。

## (2) 一般化変位の合成と拘束条件の処理<sup>20)</sup>

直前の増分段階までの一般化変位と、次の増分段階までの一般化変位増分の合成は、並進変位についてはベクトル量であるのでそのまま合成できる。しかし、回転はベクトル量でないために、回転の合成は並進変位と同じようには扱えないことに注意しなければならない。また、境界条件の処理についても並進変位と同様の処理は行えない。これは、回転とその増分回転を表す一般化変位が互いに連成するためである。

## (3) 部材軸上の変位と断面力

部材軸上の回転角は、節点の回転  $\Delta \mathbf{d}$ ,  $\Delta \tilde{\mathbf{d}}$  を式(31)に代入すると得られるが、変位は部材端の値  $\Delta \mathbf{u}_a$ ,  $\Delta \mathbf{u}_b$

が得られているだけである。そこで、部材軸上の変位は、変位と伸び率、回転との関係を表す式(9)より求める。これを積分すると、変位増分 $\Delta u$ が得られ、初期状態からの全変位は次式のようになる。

$$u^n = u_a^n + \int_0^x \left[ \left( 1 + \frac{N^n}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n)^2 \right) e_1^n - e_1^0 \right] dx \quad (35)$$

断面力 $(F^n + \Delta F)$ は、式(29)より得られ、軸力 $(N^n + \Delta N)$ は式(23.c), 2軸曲げによるせん断力 $(Q_3^n + \Delta Q_2)$ ,  $(Q_3^n + \Delta Q_3)$ は、次式から求められる。

$$(Q_2^n + \Delta Q_2) = e_2^{n+1T} (F^n + \Delta F), \quad (Q_3^n + \Delta Q_3) = e_3^{n+1T} (F^n + \Delta F) \quad (36)$$

モーメント $(M^n + \Delta M)$ は、式(25), (16)より回転の導関数と $(c^n + \Delta c)$ から求められる。しかし、モーメントの平衡条件と部材間の連続性は平均的に満足されているだけなので、局所的なモーメントは変位と断面力 $(F^n + \Delta F)$ に比べて多くの誤差を含んでいる。そこで、式(27)の汎関数 $\Pi_w$ の停留解 $\Delta c, \Delta d, \Delta \tilde{d}, \Delta u_a, \Delta u_b$ を用いて、式(23.b)の一般解である次式から求める。

$$M^n = M_a^n - \int_0^x \left[ \left( 1 + \frac{N^n}{EA} - \frac{I_r}{2A} (\hat{\kappa}_1^n)^2 \right) e_1^n \times F^n \right] dx \quad (37)$$

ここに、 $M_a^n$ は、 $a$ 端の曲げモーメントである。

なお、式(32)に含まれる $(M^n + \Delta M)$ には式(25), (16)を用いなければならない。

## 5. 数値計算例

### (1) 平面構造の有限変位解析

$X-Z$ 平面内にある平面骨組構造について有限変位解析を行う。この場合には、回転は $Y$ 軸回りの回転 $\Delta \theta_2$ の1成分だけであり、部材内部の回転は両端と内部節点の回転角からLagrange補間により表す。また、

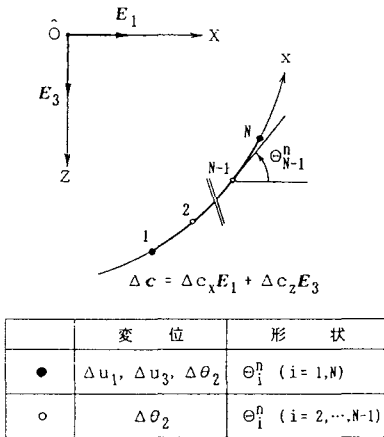
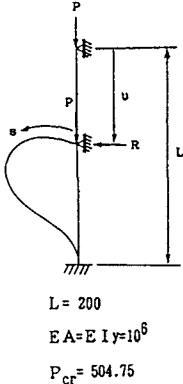
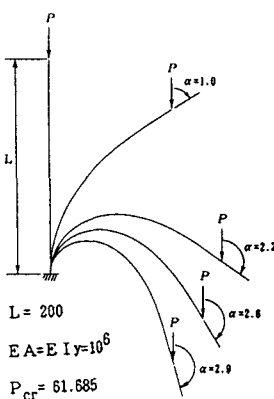


図-4. 平面曲線部材



(a) 下端支持された柱 (b) 下端固定、上端ローラ支持された柱

図-5 平面構造の有限変位解析

変位は $\Delta u_1, \Delta u_3$ の2成分、積分定数 $\Delta c$

も2成分からなる。したがって、 $N$ 節点からなる部材は図-4のように両端で各3自由度、 $(N-2)$ 個の内部節点で $(N-2)$ 自由度と積分定数の2自由度からなり、合計で $(N+6)$ 自由度である。また、曲線部材の形状を表すために、各節点での部材軸の接線と $X$ 軸の角 $\Theta_i^n \quad (i=1 \sim N)$ を回転 $\Delta \theta_2$ と同じ関数で補間する。Gauss点数は、部材を構成する節点数と同じ数 $N$ だけ用いる。

表-1 上端の回転角と荷重倍率 $(P/P_{cr})$ の関係

| 回転角<br>$\alpha$ | 1 部材  |       | 2 部材  |       | 解析解 <sup>(18)</sup> |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|---------------------|
|                 | 3 節点  | 4 節点  | 3 節点  | 4 節点  |                     |
| 1.0             | 1.140 | 1.136 | 1.136 | 1.136 | 1.1371              |
| 2.2             | 2.032 | 2.044 | 2.042 | 2.042 | 2.0414              |
| 2.6             | 3.072 | 3.043 | 3.038 | 3.036 | 3.0352              |
| 2.9             | 5.799 | 5.030 | 5.021 | 5.001 | 4.9975              |
| 自由度             | 6     | 7     | 12    | 14    |                     |



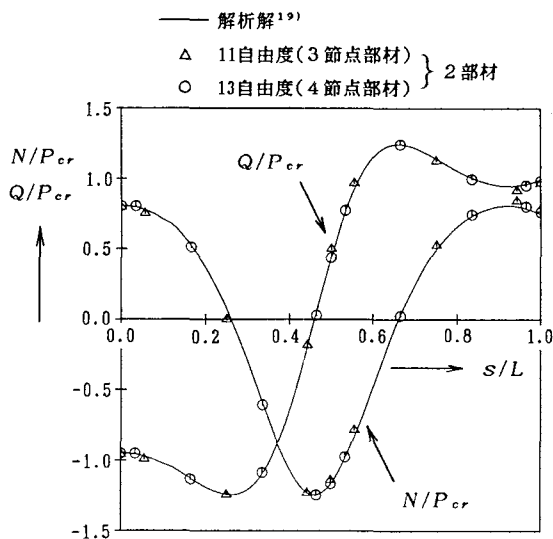
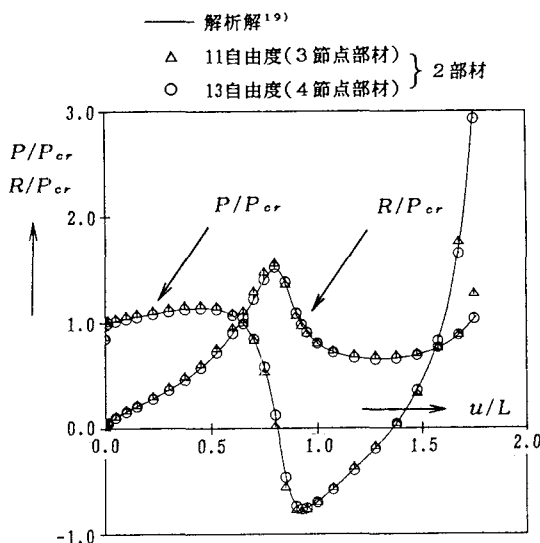


図-6 下端固定, 上端ローラ支持された柱の荷重・反力と変位 図-7 下端固定, 上端ローラ支持された柱の断面力( $u/L=0.925$ )

まず、図-5.(a)のような一端で支持され、他端に軸方向圧縮荷重 $P$ が作用する柱を対象にして、部材当りの節点数と部材数を変えた場合の変位の収束性について調べる。表-1は、荷重作用点の回転角 $\alpha$ と荷重倍率( $P/P_{cr}$ )の関係を示している。3節点1部材は $\alpha=2.9$ では、16%の誤差を生じているが、 $\alpha=2.6$ 以下では解析解<sup>19)</sup>と約1%の誤差を生じているだけである。4節点1部材や3節点2部材以上では、全ての $\alpha$ で1.0%以下になっていることから、少ない自由度で十分な精度の解が得られることが分かる。また、少ない自由度で高精度の解を得ようとするならば、内部節点を増やす方が良いことを確かめることができる。

次に、一端で固定支持され、もう一方のローラ支持された端部に軸方向圧縮荷重 $P$ が作用する柱を対象に、変位と断面力の精度について検討する。なお、断面力の部材間の連続性を示すために、部材数は2に固定し、部材当りの節点数を変える。また、マトリックス変位法では部材内の断面力の精度は節点での値に比べて悪化するが、本文での方法では部材内の断面力は積分定数 $c$ と回転角 $\theta$ から求められ、変位関数の微分演算が不要なので精度が良いことを示す。図-6は、軸方向変位 $u$ を変位増分法の制御パラメータとしたときの荷重と反力、図-7は $u/L=0.925$ のときの部材軸に沿った断面力の分布を示している。これらより、3節点部材の場合には解析解<sup>19)</sup>との多少の差はあるが、4節点部材では十分な精度の解が得られている。

## (2) 立体構造の有限変位解析

部材内部の回転ベクトル $\mathbf{1}\theta$ を、両端と内部節点での回転ベクトルから平面部材の場合と同様にLagrange補間により表す。また、変位 $\mathbf{1}u$ と積分定数 $\mathbf{1}c$ はそれぞれ3成分からなるので、 $N$ 節点からなる部材の自由度は $(3N+9)$ である。曲線部材の形状は、各節点での部材座標系までの全体座標系からの座標変換行列から求められる回転ベクトルを、同じようにLagrange補間により表す。数値積分についても $N$ 個の積分点を用いる。

図-8のように両端固定支持された半径 $r$ の円形断面からなる弧長 $L$ の放物線アーチに、 $Z$ 軸方向の等分布荷重 $p$ が作用した場合の対称と逆対称モードに対応した曲げねじれ座屈後の有限変位解析を行い、通常の変分原理により定式化した直線部材による解析結果と比較する。部材当りの節点数は対称と逆対称モードでそれぞれ4と5に固定して、部材数を変える。直線部材では、それぞれ16と22部材を用いた、文献20)の変位関数と一般化変位を用いる。なお、対称性、逆対称性を考慮して片側だけを解析する。図-9は、アーチクラウンのたわみ $w$ を変位増分法の制御パラメータとして計算した荷重と変位の関係を示している。これより、対称モードでは1部材で直線部材による値に近く、逆対称モードでは $w/f=1.6$ 付近で差が見られるが、2部材、3部材ではこの差は小さい。

また、図-10は、 $w/f=1.72$ (対称モード)のときの部材軸に沿ったモーメントを式(37)より求めている。これより、要素内のモーメントは、式(37)を用いて計算することにすれば、変位や回転と同程度の精度で収束解が得られることが分かる。なお、1部材でも、7～8節点部材を用いると、この計算例と同様の収束解が得られる。

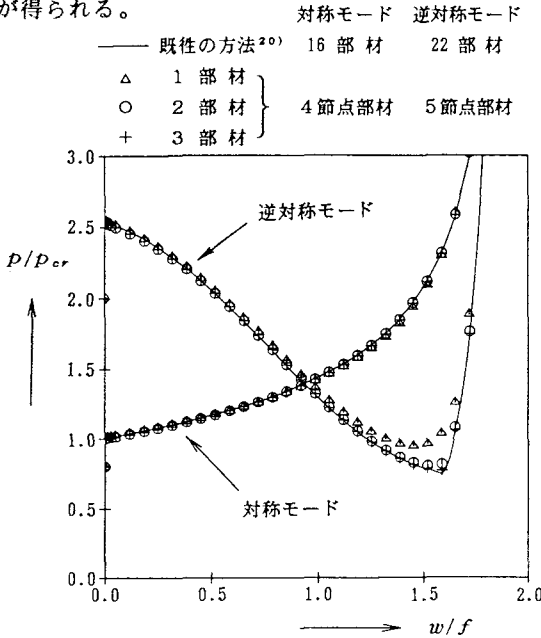


図-9 放物線アーチの荷重とアーチクラウンのたわみ

## 6. ケーブル部材

### (1) ケーブルの停留条件

ケーブルは、はりなどの部材に比べて、曲げ剛性やねじれ剛性が小さいので、式(27)の汎関数で曲げやねじりに関する項を省略すると、次のような汎関数が得られる。

$$\Pi_c = \int_0^l \left\{ -\frac{4N^2}{2EA} + \left(1 + \frac{N^n}{EA}\right) [(F_x^n + \Delta F_x) - (N^n + \Delta N)] \right\} dx + \left[ \{ (F_x^n + \Delta F_x) - \bar{n}_x (\bar{Q}^n + \Delta \bar{Q}) \}^T \Delta u \right]_0^l \quad (38)$$

ここに、 $(F_x^n + \Delta F_x)$ 、 $(N^n + \Delta N)$ は式(26)、(23.c)により表される。しかし、曲げによる剛性を零としていることから、ケーブルの単位接線ベクトル $\mathbf{e}_1^n$ 、 $\mathbf{e}_1^{n+1}$ の方向と断面力ベクトル $\mathbf{F}^n$ 、 $(\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F})$ の方向は一致している。このことより、次式が得られる。

$$\mathbf{e}_1^n = \frac{\mathbf{F}^n}{\|\mathbf{F}^n\|}, \quad \mathbf{e}_1^{n+1} = \frac{\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}}{\|\mathbf{F}^n + \Delta \mathbf{F}\|} \quad (39)$$

上式と式(23.c)、(26)より、式(38)の独立変分量は、積分定数 $\Delta c$ と両端の変位 $\Delta \mathbf{u}_a$ 、 $\Delta \mathbf{u}_b$ であり、回転 $\Delta \theta$ は含まれていない。したがって、変位関数を仮定することにより生じる誤差は含まれないので、式(38)の停留条件を正確に積分することができれば、正確な解析を行うことができる。

式(38)の停留条件は、次のようになる。

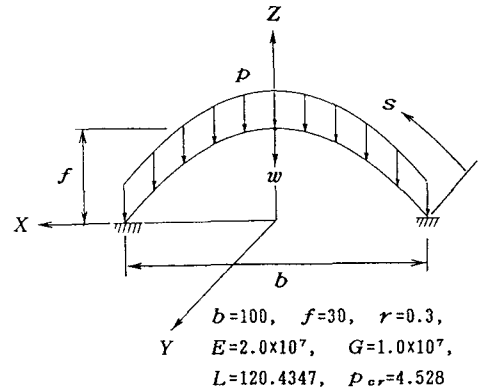


図-8 等分布荷重を受ける放物線アーチ

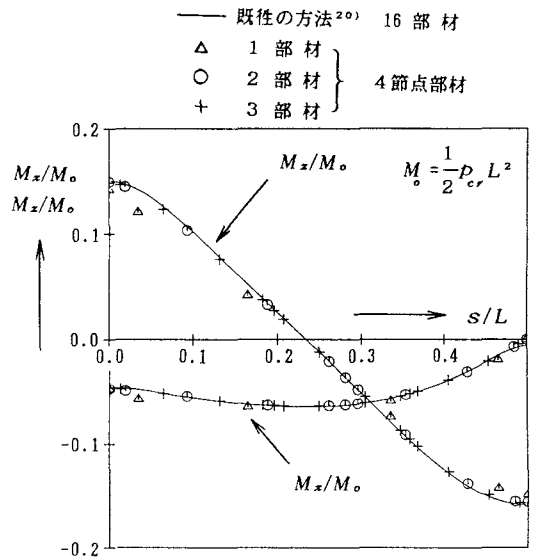


図-10 平衡方程式の解によるモーメントの分布( $w/f=1.72$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_c}{\partial (\Delta c)} &= \int_0^l \left\{ \left(1 + \frac{N^n}{EA}\right) e_1^n - \left(1 + \frac{N^{n+\Delta N}}{EA}\right) e_1^{n+1} \right\} dx + [\Delta u]_0^l = 0 \equiv f_c \\ \frac{\partial \Pi_c}{\partial (\Delta u_a)} &= -(c^{n+\Delta c}) - (\bar{P}_a^{n+\Delta P_a}) = 0 \equiv f_a \\ \frac{\partial \Pi_c}{\partial (\Delta u_b)} &= (c^{n+\Delta c}) - \int_0^l (q^{n+\Delta q}) dx - (\bar{P}_b^{n+\Delta P_b}) = 0 \equiv f_b \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

## (2) 数値解法

上式の解 $\Delta c$ ,  $\Delta u_a$ ,  $\Delta u_b$ は、式(32)の場合と同様にNewton法により求める。このときの反復式( $k \geq 1$ )は次式ようになる。

$$\begin{bmatrix} -H^{(k)} & -I & I \\ & O & O \\ \text{sym.} & & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c^{(k+1)} - \Delta c^{(k)} \\ \Delta u_a^{(k+1)} - \Delta u_a^{(k)} \\ \Delta u_b^{(k+1)} - \Delta u_b^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_c^{(k)} \\ f_a^{(k)} \\ f_b^{(k)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

ここに、 $H$ は次式で与えられる。

$$H = \int_0^l \left\{ \left( \frac{1}{N^{n+\Delta N}} + \frac{1}{EA} \right) I - \frac{e_1^{n+1} e_1^{n+1T}}{N^{n+\Delta N}} \right\} dx \quad (42)$$

なお、Newton法の初期値 $\Delta c^{(1)}$ ,  $\Delta u_a^{(1)}$ ,  $\Delta u_b^{(1)}$ は、式(40)を増分量について線形化した次式によって求める。

$$\begin{bmatrix} -H_c & -I & I \\ & O & O \\ \text{sym.} & & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c^{(1)} \\ \Delta u_a^{(1)} \\ \Delta u_b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta P_c \\ \bar{P}_a^{n+\Delta P_a} c^n \\ \bar{P}_b^{n+\Delta P_b} - c^n + \int_0^l (q^{n+\Delta q}) dx \end{bmatrix} \quad (43)$$

ここに、

$$H_c = \int_0^l \left\{ \left( \frac{1}{N^n} + \frac{1}{EA} \right) I - \frac{e_1^n e_1^{nT}}{N^n} \right\} dx, \quad \Delta P_c = \int_0^l \left\{ \left( \frac{1}{N^n} + \frac{1}{EA} \right) I - \frac{e_1^n e_1^{nT}}{N^n} \right\} \int_0^x \Delta q dx dx \quad (44)$$

ところで、式(39)や(42), (44)から明らかなようにケーブルに軸力が生じていない場合には、これらの式は不定になるので初期張力を仮定しなければならない。そこで、仮の軸力 $N^0$ として適当な値を用いると、 $e_1^n$ が求められ、式(43)より最初の増分段階でのNewton法の初期値 $\Delta c^{(1)}$ ,  $\Delta u_a^{(1)}$ ,  $\Delta u_b^{(1)}$ が求められる。そして、 $e_1^{n(1)}$ が求められるので、式(41)の反復計算により停留条件を満足する解 $\Delta c$ ,  $\Delta u_a$ ,  $\Delta u_b$ が得られる。しかし、この解は $N^0$ の影響を受けている。ところで、式(41)の右辺は式(40)より、軸力が零であっても、 $e_1^n$ が明らかであれば求められることが分かる。これより、初期のケーブルの形状が明確ならば、式(42), (43)の軸力 $N^0$ に適当な値を用いても、式(40)の $N^0$ を零とすることにより、 $N^0$ の影響を受けない解が得られる。また、解析対象となるケーブルは、部材長が与えられて、変位後の状態を求めることを要求される場合が多いが、与えられた部材長を満たすような仮の形状を与えることにより得られた変位後の状態は、荷重が保存力であれば形状の与え方に依らない。

式(41), (43)の $\Delta c$ は、各要素について独立な量なのでこれを消去すると、変位法によるマトリックス法の部材剛性方程式が得られる。

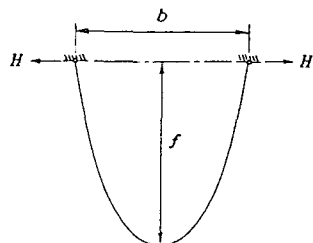
ケーブル部材内の点の変位は、式(35)で $\kappa_1^n$ に関する項を省略すると得られる。また、要素内の点の位置ベクトル $x^n$ は、 $a$ 端の位置ベクトルを $x_a^n$ とすると、次式で与えられる。

$$x^n = x_a^n + \int_0^x \left(1 + \frac{N^n}{EA}\right) e_1^n dx \quad (45)$$

### (3) 数値計算例

若干の計算例により、本手法の特徴を示す。

まず、水平方向に  $b$  だけ離れた支点で支持されている図-11のような自重  $q=1$ 、伸び剛性  $EA=2 \times 10^6$  の無応力時の長さ  $l=100$  の単一ケーブルを対象に、平衡状態でのサグ  $f$  と水平反力  $H$  を求め、文献(21)の手法で求めた結果との差が 1% 未満になるときの積分点数を示す。



$$EA = 2.0 \times 10^6, \quad q = 1, \quad l = 100$$

図-11 単一ケーブル

表-2は、単一ケーブルを2部材に分けて計算した結果であり、これよりケーブルとスパンの長さが同程度の場合には2~3 Gauss点で精度のよい解が得られるが、スパンが小さくなるほど、多くの積分点を必要としていることが分かる。これは、式(40),(42),(44)の積分項の

表-2 単一ケーブルのサグと水平反力

| スパン $b$ | サグ $f$ | 水平反力 $H$ | 積分点数* |
|---------|--------|----------|-------|
| 100     | 1.329  | 940.6    | 2     |
| 80      | 26.53  | 33.85    | 3     |
| 60      | 36.23  | 16.24    | 3     |
| 40      | 42.76  | 7.769    | 4     |
| 20      | 47.48  | 2.738    | 5     |
| 10      | 49.18  | 1.119    | 6     |
| 5       | 49.64  | 0.4655   | 10    |

$1/N^n$ によるものと考えられる。 $N^n$ は  $\|c^n - q^n x\|$  で表されることより、 $1/N^n$ を  $x$  に関するべき級数で表した場合に、 $q^n$ にくらべて積分定数  $c^n$  ( $a$  端での断面力ベクトル) が大きければ、べき級数の高次の項までを用いなくてもよいが、 $c^n$  が  $q^n$  と同程度な場合には高次の項までを用いなければ  $1/N^n$  の正確な近似にならない。これより、 $c^n$  \* 文献(21)の手法による結果との差を 1% 未満にする積分点数が  $q^n$  に比べて十分に大きくない場合(スパンがケーブル長に比べて小さい場合)には、多くの積分点を必要とすることが分かる。

| 節点 | 座 標 値      |
|----|------------|
| 1  | -10, 0, 0  |
| 2  | 5, -5, 0   |
| 3  | 5, 5, 0    |
| 4  | 0, 0, -50* |

\* 無応力状態

$$EA = 2.0 \times 10^6, \quad q = 1$$

図-12は、支点1~3から吊られて節点4で結合しているケーブル

に、水平方向の集中荷重が作用した場合の変形状態を示している。

このケーブルは自重  $q=1$ 、伸び剛性  $EA=2 \times 10^6$  であり、それぞれのケーブルを1部材で表現し、積分には5 Gauss点を用いている。

また、それぞれのケーブルを4部材で表し、10 Gauss点を用いた場合の結果との差は 1% 以下なので、この結果は十分な精度が得られているものと思われる。

これらの計算例より、本手法では、部材内での変位と断面力の関

数形を仮定していないことから積

分演算を正確に行なえば、部材を分割することなく精度のよい解が得られることが分かる。なお、単一ケーブルは、 $1/c$  に関する停留条件を構造全体の式から消去せずに残しておくならば、1要素での解析も可能である。

7. 結 論

変位と伸び率、回転の関係を付帯条件とし、Lagrangeの未定乗数を用いて、全ポテンシャルエネルギーに

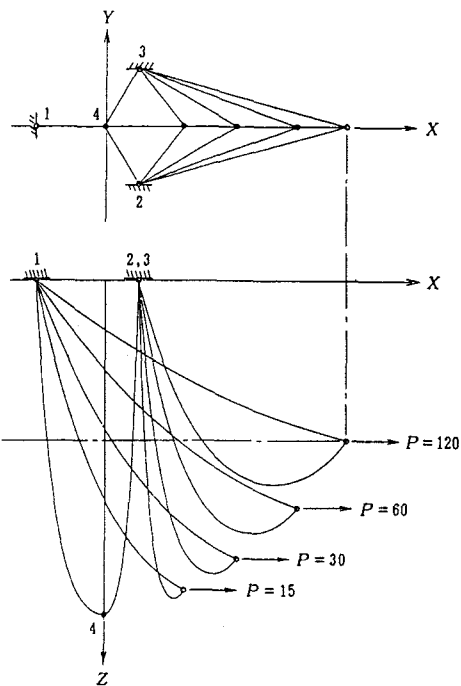


図-12 集中荷重を受けるケーブルの変形状態

分演算を正確に行なえば、部材を分割することなく精度のよい解が得られることが分かる。なお、単一ケーブルは、 $1/c$  に関する停留条件を構造全体の式から消去せずに残しておくならば、1要素での解析も可能である。

### 7. 結 論

変位と伸び率、回転の関係を付帯条件とし、Lagrangeの未定乗数を用いて、全ポテンシャルエネルギーに

加えることにより、Hu-Washizuの変分原理の汎関数に類似の汎関数を考えた。この汎関数の部材内部の変位に関する停留条件は、未定乗数(断面力)に関する平衡方程式を表していることが分かるが、この式の一般解に含まれる積分定数を、未定乗数に代わる独立変分量として、新しい汎関数を誘導し、この汎関数を離散化した部材により、有限変位解析を行った。

この汎関数の独立変分量は、部材端での変位、平衡方程式の一般解に含まれる積分定数と回転からなり、ハイブリッド法と変位法を融合した方法と言えるが、この汎関数による部材には、次のような特徴がある。

(1)変位関数として回転量だけを仮定するので、仮定による誤差は直接には回転に含まれるだけである。

(2)モーメントの平衡条件は、近似的に満たされるだけであるが、断面力の平衡条件や、変位と伸び率、回転との適合条件は、正確に満足される。ただし、平衡方程式の解を用いることにより、モーメントの平衡条件も満足される。

(3)積分定数と内部節点の自由度を消去することにより、変位法による剛性方程式と同等の式が得られる。

(4)少ない自由度で変位と断面力共に高精度の解が得られる。

(5)上述の汎関数で曲げやねじりに関する項を省略したケーブル部材の汎関数は、部材両端の変位と積分定数( $\alpha$ 端の断面力)を独立変分量としているので、積分を正確に行えば少ない自由度でサグの影響を考慮した解析が行える。

#### 参 考 文 献

- 1)Stolarski,H. and Belytschko,T.: Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements, Trans. ASME, Vol.49,1982.
- 2)Prathap,G. and Bhashyam,G.R.: Reduced Integration and the Shear-Flexible Beam Element, Int.J. Num.Meth.Engng., Vol.18, 1982.
- 3)Tessler,A. and Spiridigliozzi,L.: Curved Beam Elements with Penalty Relaxation, Int.J.Num. Meth. Engng., Vol.23, 1986.
- 4)Washizu,K.: Variational Methods in Elasticity & Plasticity, 3rd ed., Pergamon, pp.411-455, 475-509, 1982.
- 5)Noor,A.K. and Peters,J.M.: Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams, Int.J.Num.Meth.Engng.,Vol.17,1981.
- 6)Reddy,J.N. and Singh,I.R.: Large Deflections and Large-Amplitude Free Vibrations of Straight and Curved Beams, Int.J.Num.Meth.Engng., Vol.17, 1981.
- 7)中西 宏・波田凱夫:曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析,土木学会論文報告集,No.318,1982.
- 8)Fujii,F.: A Simple Mixed Formulation for Elastica Problems, Comp. Struct.,Vol.17,No.1,1983.
- 9)近藤一夫:平面梁柱の座屈および大変形問題の解析,骨組構造解析における一離散化手法(その3), 日本建築学会論文報告集,No.326,1983.
- 10)Shimodaira,H.: Equivalence between Mixed Models and Displacement Models using Reduced Integration, Int.J.Num.Meth.Engng.,Vol.21, 1985.
- 11)前田幸雄・林 正:立体骨組構造物の有限変位解析,土木学会論文報告集,No.253,1976.
- 12)Argyris, J. H., Dunne, P. C. and Scharpf,D.W.: On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom, Comp.Meth.Appl.Mech.Engng.,Vol.14,1978,Vol.15, 1978.
- 13)吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行:立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法,土木学会論文報告集,No.300, 1980.

- 14) Dvorkin, E.N., Onate, E. and Oliver, J.: On a Non-linear Formulation for Curved Timoshenko Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments, Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 26, 1988.
- 15) Surana, K.S. and Sorel, R.M.: Geometrically Non-linear Formulation for Three Dimensional Curved Beam Elements with Large Rotations, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 28, 1989.
- 16) Pietraszkiewicz, W. and Badur, J.: Finite Rotations in the Description of Continuum Deformation, Int. J. Engng. Sci., Vol. 21, No. 9, 1983.
- 17) 前田幸雄・林 正: 充実曲線材の有限変位理論, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986.
- 18) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, pp. 76-82, 1961.
- 19) Hasegawa, A., Chaisomphob, T. and Iwakuma, T.: An Elastic Post-Buckling Behaviour of Propped-Cantilever Column, Proc. of JSCE, No. 380/I-7, 1987.
- 20) 岩崎英治・林 正: 立体骨組構造の有限変位解析の精密化、構造工学論文集、Vol. 37A, 1991.
- 21) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, No. 270, 1978.
- 22) 前田幸雄・林 正・前田研一: サグを考慮したケーブル部材の計算式, 土木学会論文報告集, No. 257, 1977.
- 23) 阿井正博・西岡 隆・奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, No. 260, 1977.

(1990年10月12日受付)