

立体骨組構造の有限変位解析の精密化

ON THE REFINEMENT OF FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF SPACE FRAMED STRUCTURES

岩崎英治* 林 正**

By Eiji IWASAKI and Masa HAYASHI

A study on the refinement of finite displacement analysis of space framed structures is presented. Matrix methods for the finite displacement analysis are proposed by Total Lagrangian and Updated Lagrangian Formulation, respectively. These formulations are executed by using the new displacement function satisfied the compatible conditions on the second order finite displacement theory and considering the feature of finite rotation. A few numerical examples concerning the flexural-torsional buckling and finite displacement behaviour of post-buckling are analyzed and discussed to demonstrate the accuracy and convergency of the proposed methods.

1. 緒 言

マトリックス法による骨組構造の有限変位解析は、平面問題に始まり立体問題についても、すでに多くの研究がある^{1)~14)}。ところで、立体骨組の有限変位解析は、空間での有限な回転がベクトル則を満足しないことにより、平面骨組の場合に比べて、節点回転の合成や座標変換行列の表現方法に本質的な違いが生じる。

空間での有限回転の表現方法とその性質については、Euler, RodriguesやHamiltonなどにより研究されており、3つの軸回りのEulerの角により表す方法や、回転を4つのパラメータで表したEuler-Rodriguesのパラメータなどがある^{15), 16)}。また、回転と共に移動した座標系と回転前の座標系との関係を表す座標変換行列(回転行列)^{1), 5)}や、回転の中心軸と軸回りの回転角により定義される軸性ベクトルによっても回転を表すことができる。このような回転ベクトルには回転角とその軸の積による表現や回転角の正弦値と回転軸の積による表現などがあり¹⁷⁾、これらの表現方法には、それぞれに一長一短がある。

ところで、有限変位問題の定式化には種々の方法が考案されている。主なものとして、初期の空間に固定された座標系を基準とする全Lagrangeの手法と、増分段階の進行により変位する部材とともに移動した増分段階の座標系を基準とする更新Lagrangeの手法がある。

全Lagrangeの手法では初期状態を基準にするので、回転による座標変換を必要としない。このことに注目して薄木ら⁷⁾、渡辺ら⁹⁾は研究を行っているが、回転に関する節点変位の合成には有限回転の性質を考慮する必要がある。また、この手法では初期状態からの全変位を基礎式の中に正確に含んでいることが必要なの

* 工博 長岡技術科学大学 助手 建設系 (〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

** 工博 長岡技術科学大学 教授 建設系 (〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

で、比較的大きな変位後の状態まで精度のよい解析をするには、高次の非線形項まで考慮する必要がある。

ところが、部材の剛体的な変位は大きくても、骨組部材を分割した部材の変形は小さく、分割数を増すほどこの傾向は顕著になる。このために、剛体変位を除去した全Lagrangeの手法や、前増分段階の部材を基準にした更新Lagrangeの手法を用いて解析することが多い。この場合には剛体回転による座標系の移動や前増分段階の部材端の方向余弦を正確に把握することが必要であるが、変形に寄与する変位は小さいので前述の全Lagrangeの手法に用いた変位場ほどの精度は要求されない。しかし、初期の研究^{2), 3), 4)}では、有限回転に関する考慮がされていないために、正しい有限変位解析は行われていない。また、このような手法では解の精度や収束性は回転行列の精度に左右されるが、Oran¹⁾は各増分段階の回転行列を求めるときに微小回転の式を用いている。前田と林⁵⁾は正確な回転行列を用いているが、剛体変位を除いた部材座標系でのたわみ角を近似的に求めている。また、部材の変位は大きくても変形は小さいことに注目して、部材座標系での平衡方程式には線形解析の式を用い、変形後の座標系を正確な回転行列により求めた吉田ら⁸⁾の研究がある。

BatheとBolourchi⁶⁾は、Eulerの角を用いて変位後の部材座標系を決定しているが、変位後の部材軸回りのねじれ角を近似的に求めている。また、回転ベクトルを用いたElias¹¹⁾やDvorkinら¹³⁾の研究があり、Eliasは剛性行列を示しているがマトリックス法による数値計算は行っていない。

ここに掲げた以外にも、多くの研究者により種々の方法が報告されているが、有限変位解析の場合には線形解析や座屈解析と異なり、解の精度や効率性などが数値計算方法の違いによって左右される。しかし、計算方法について詳述されているものは少なく、多くの場合には正当な評価をすることが難しい。分岐点のある問題またはこの問題で初期不整のある場合について、少ない反復回数で精度よく有限変位解析が行われているかどうかで、提案した手法の正当性が判断できるものと思われることから、計算例として曲げねじれ座屈後の有限変位解析を扱った研究に注目すると、正確な回転行列を用いた前田・林⁵⁾と吉田・増田ら⁸⁾の方法が精度と計算効率の面で優れているものと思われる。しかし、前述のように文献5)の方法には変形に寄与するたわみ角を求めるときに近似が含まれている。また、吉田・増田らの計算例の一部が、主つり合い経路から別のつり合い経路に飛んでいることをChaisomphobら¹⁸⁾が明らかにしている。

空間曲線部材から成る骨組構造の有限変位解析を行う場合に、曲線部材を分割した個々の部材を曲線部材として扱うことは少なく、直線部材を集めた折れ線部材として扱うことが多い。このような近似は一般に妥当なものと考えられる。しかし、著者らは慣用的に使われている直線部材として、回転やねじれ率に関する一般化変位に、部材軸上の変位とねじれ角の微係数を用いた部材を対象に、部材長を無限小にしたときの折れ線部材の収束式と曲線部材の式との比較により、曲線部材の幾何学的非線形解析に直線部材を用いた場合には、正しい解が得られない場合のあることを明らかにした。また、新しい直線部材として、有限回転の特性を考慮した一般化変位を用いた部材を提案している¹⁹⁾。

しかし、前述のように有限変位解析の精度と収束性は、基礎式だけでなく計算方法により左右される。そこで、本論文は立体骨組構造の有限変位解析を行なうための高精度で計算効率のよい解法の開発を行うことを目的として、剛体変位を除去した全Lagrangeの手法と更新Lagrangeの手法により文献19)に示した変位関数をもとにして、有限回転の性質を正確に考慮した定式化を行い、数値計算により精度と効率を調べる。

剛体変位を除去した全Lagrangeの手法では、第 n 増分段階での諸量が既知として、次の増分段階での諸量を求めるための増分形式の平衡方程式を誘導するために、2つの増分段階での諸量の差をとる。このときに、回転量については、その性質により差をとった諸量が回転を表さないもので、付録に示しているような回転の分解により求めた回転を増分量としている。更新Lagrangeの手法では、第 n 増分段階での形状を基準にして、次の増分段階までの平衡方程式を誘導する。このために、前述のような2つの増分段階での諸量の差をとる必要はない。また、第 n 平衡状態では形状は一般に曲線になっているために、曲線部材として扱う必要があるが、この部材の両端を結んだ直線部材により定式化している。このように、各増分段階での諸量を定義している座標系が異なっているために、既知の増分段階までの総量を陽な形で表現できないので、その段階の

部材内に生じている断面力は部材端での値から仮定している。一方、剛体変位を除去した全Lagrangeの手法では、剛体変位を除去するために移動座標系を用いているが、全ての増分段階での諸量は同一の移動座標系で表現されているので、総量の部材内での関数は明らかことから平衡方程式は、一般化変位に関して陽な形で表現されている。

なお、本文での既往の部材とは、軸方向変位を1次式、2軸曲げによるたわみとねじれ角を3次式（そり変形を省略できる充実部材では、ねじれ角を1次式）で表し、一般化変位として並進変位と回転、ねじれ率からなる7自由度（充実部材では6自由度）を用い、回転とねじれ率に関する一般化変位には、それぞれ2軸曲げによるたわみとねじれ角の微係数を用いた多くの研究者により採用されている部材である。

2. 直線部材の基礎式¹⁹⁾

(1) 変位とひずみ

直線部材を構成する母線の一つを部材軸 x とし、 x に直交する平面内に y, z 軸をとった右手系直交直線座標 (x, y, z) を定める。このとき、部材両端の節点を a, b として座標系の原点は節点 a におく。

棒部材の仮定を満足したひずみは、軸ひずみ ε_1 とねじれによるせん断ひずみ ε_2 の2成分だけであり、これらのひずみは x 軸の伸び率 ε_0 、ねじれ率 κ_1 、 x - z 、 x - y 面内の曲率 κ_2, κ_3 から次式で与えられる。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - y \kappa_3 + z \kappa_2 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \kappa_1^2 - \omega \kappa_{1,1}, \quad \varepsilon_2 = -x \kappa_1 \quad (1)$$

ただし、上式はひずみが微小とする次の仮定を用いている。

$$1 + \varepsilon_0 - y \kappa_3 + z \kappa_2 \approx 1 \quad (2)$$

また、 $(\cdot)_{,1}$ は x 軸による微分、 ω と x は慣用の薄肉部材で用いられている断面諸量とする。

x 軸の伸び率、ねじれ率、曲率は、 x 軸上の点の x, y, z 方向変位 u_i ($i=1, 2, 3$)と x 軸のねじれ角 ϕ で表され、変位とねじれ角の3次以上の微小項を省略すると、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= u_{1,1} + \frac{1}{2}\{(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\}, & \kappa_1 &= \phi_{,1} + \frac{1}{2}(u_{2,1} u_{3,1} - u_{2,1} u_{3,1}) \\ \kappa_2 &= -\{u_{3,1} (1 - u_{1,1})\}_{,1} + \phi u_{2,1}, & \kappa_3 &= \{u_{2,1} (1 - u_{1,1})\}_{,1} + \phi u_{3,1} \end{aligned} \right\} \quad (3, a \sim d)$$

棒部材の仮定を満足した x, y, z 方向の変位 u, v, w は、 x 軸上の点の変位 u_i とねじれ角 ϕ の3次以上の微小項を省略すると次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 - y\{u_{2,1} (1 - u_{1,1}) + \phi u_{3,1}\} - z\{u_{3,1} (1 - u_{1,1}) - \phi u_{2,1}\} - \omega \kappa_1 \\ v &= u_2 - \frac{1}{2}y(\phi^2 + u_{2,1}^2) - z(\phi + \frac{1}{2}u_{2,1} u_{3,1}) - \omega \phi u_{2,1} \\ w &= u_3 + y(\phi - \frac{1}{2}u_{2,1} u_{3,1}) - \frac{1}{2}z(\phi^2 + u_{3,1}^2) - \omega \phi u_{3,1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(2) 一般化変位と変位関数

部材内の変位とひずみを両端の節点変位で表現するために、次のような14自由度の一般化変位を用いる。

節点 a ; $u_{1a}, u_{2a}, u_{3a}, \theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}, \kappa_{1a}$ 節点 b ; $u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}, \theta_{1b}, \theta_{2b}, \theta_{3b}, \kappa_{1b}$

ここに、 u_{ia}, u_{ib} ($i=1, 2, 3$)はそれぞれ節点 a, b の変位、 κ_{1a}, κ_{1b} は節点 a, b でのねじれ率、 θ_{ia}, θ_{ib} は回転を表している。 θ_{ia}, θ_{ib} は、回転軸を表す単位ベクトル (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) とそのまわりの回転角 α から $2\phi \tan(\alpha/2)$ で定義されるパラメータの節点 a, b での値である。回転に関するこのようなパラメータと x 軸上の変位、ねじれ角の関係は、3次以上の微小項を省略すると次式のようなになる。

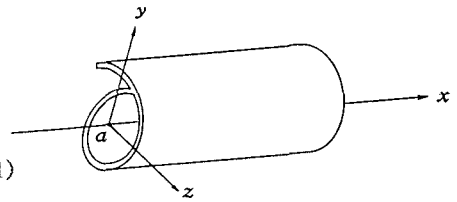


図-1 薄肉直線部材

$$\theta_1 = \phi, \quad \theta_2 = -u_{3,1} \left(1 - \frac{u_{1,1}}{l}\right) + \frac{1}{2}\phi u_{2,1}, \quad \theta_3 = u_{2,1} \left(1 - \frac{u_{1,1}}{l}\right) + \frac{1}{2}\phi u_{3,1} \quad (5)$$

なお、ねじれ率と x 軸上の変位、ねじれ角との関係は式(3.b)で与えられる。

x 軸上の変位関数は、変位 u_1 を両端の値から1次式、他の変位 u_2, u_3 とねじれ角 ϕ は両端の値とその微係数から3次式で表現し、式(5), (3.b)を用いて両端の微係数を一般化変位で表すと次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= N_1 u_{1a} + N_2 u_{1b} \\ u_2 &= N_3 u_{2a} + N_4 l \left\{ \left(1 - \frac{u_{1,1}}{l}\right) \theta_{3a} + \frac{1}{2} \theta_{1a} \theta_{2a} \right\} + N_5 u_{2b} + N_6 l \left\{ \left(1 - \frac{u_{1,1}}{l}\right) \theta_{3b} + \frac{1}{2} \theta_{1b} \theta_{2b} \right\} \\ u_3 &= N_3 u_{3a} - N_4 l \left\{ \left(1 - \frac{u_{1,1}}{l}\right) \theta_{2a} - \frac{1}{2} \theta_{1a} \theta_{3a} \right\} + N_5 u_{3b} - N_6 l \left\{ \left(1 - \frac{u_{1,1}}{l}\right) \theta_{2b} - \frac{1}{2} \theta_{1b} \theta_{3b} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.a \sim c)$$

$$\phi = N_3 \theta_{1a} + N_4 \left\{ l \kappa_{1a} + (3\bar{u}_2 - \theta_{3b}) \theta_{2a} + (3\bar{u}_3 + \theta_{2b}) \theta_{3a} \right\} + N_5 \theta_{1b} + N_6 \left\{ l \kappa_{1b} - (3\bar{u}_2 - \theta_{3a}) \theta_{2b} - (3\bar{u}_3 + \theta_{2a}) \theta_{3b} \right\} \quad (7)$$

ここに、 l は部材長を表し、 $\bar{u}_i (i=1,2,3)$ は $\bar{u}_i = (u_{ib} - u_{ia})/l$ で与えられる。

また、 N_i は形状関数であり、正規座標 ξ (節点 a で $\xi=0$ 、節点 b で $\xi=1$)を用いて次式で与えられる。

$$N_1 = 1 - \xi, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = (1 - \xi)^2 (1 + 2\xi), \quad N_4 = \xi (1 - \xi)^2, \quad N_5 = \xi^2 (3 - 2\xi), \quad N_6 = -\xi^2 (1 - \xi) \quad (8)$$

そり変形を省略できる充実部材では、ねじれ率を除いた部材両端の12自由度で部材内の変位とねじれ角が表される。このときの変位関数は、 $u_i (i=1,2,3)$ は式(6.a~c)と同じであり、ねじれ角は次式で表す。

$$\phi = N_1 \theta_{1a} + N_2 \theta_{1b} \quad (9)$$

これらの変位関数は、回転とねじれ率に関する一般化変位に有限回転の影響を考慮しているが、既往の部材では、回転に関する一般化変位とねじれ率に関する一般化変位に、それぞれ式(5), (3.b)の線形項だけが用いられているので、変位関数は、式(6), (7)で一般化変位の非線形項を省略した式で与えられる。なお、式(3)~(6)の破線の項は式(2)の仮定のもとでは省略できることから、以下ではこの項を省略する。

3. 増分形式の全Lagrangeの手法による定式化

(1) 部材の基礎式

全Lagrangeの手法は、初期形状を基準とする手法であり、 n 回の増分後の形状が既知であっても、初期形状での座標系を参照して未知量が定義される。これより第 n 平衡状態までの変数、 $(n+1)$ 回目の増分段階までの変数とその増分量はすべて同じ座標系で定義されている。

したがって、ひずみの増分量は次式のようにになる。

$$\Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_0 - y \Delta \kappa_3 + z \Delta \kappa_2 + (y^2 + z^2) \left(\kappa_1^n + \frac{\Delta \kappa_1}{2} \right) \Delta \kappa_1 - \omega \Delta \kappa_{1,1}, \quad \Delta \varepsilon_2 = -x \Delta \kappa_1 \quad (10)$$

ここに、伸び率、ねじれ率、曲率の増分量は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_0 &= \Delta u_{1,1} + \left(u_{2,1}^n + \frac{\Delta u_{2,1}}{2} \right) \Delta u_{2,1} + \left(u_{3,1}^n + \frac{\Delta u_{3,1}}{2} \right) \Delta u_{3,1}, \quad \Delta \kappa_2 = -\Delta u_{3,1,1} + \Delta \phi u_{2,1}^n + \phi^n \Delta u_{2,1,1} + \Delta \phi \Delta u_{2,1,1} \\ \Delta \kappa_1 &= \Delta \phi_{,1} + \left(u_{3,1}^n + \frac{\Delta u_{3,1}}{2} \right) \Delta u_{2,1,1} - \left(u_{2,1}^n + \frac{\Delta u_{2,1}}{2} \right) \Delta u_{3,1,1}, \quad \Delta \kappa_3 = \Delta u_{2,1,1} + \Delta \phi u_{3,1}^n + \phi^n \Delta u_{3,1,1} + \Delta \phi \Delta u_{3,1,1} \end{aligned} \quad (11)$$

なお、これらの増分量は $(n+1)$ 回目と n 回目の増分段階の諸量の差として得られるが、ねじれ角増分は有限回転の非可換性より、 $\phi^{n+1} - \phi^n$ がねじれ角としての意味をもたないので、式(A.5)と(5)の関係を用いた次式より与える。

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta \phi + \frac{1}{2} (u_{3,1}^n \Delta u_{2,1} - u_{2,1}^n \Delta u_{3,1}) \quad (12)$$

また、諸量の右肩添字は増分段階を表し、この添字の付いた諸量は初期状態からこの段階までの総量を表しているが、特に誤解の恐れのないときにはこの添字を省略する。

式(6),(7)の変位関数の増分量は、次式ようになる。

$$\begin{aligned}
 \Delta u_1 &= N_1 \Delta u_{1a} + N_2 \Delta u_{1b} \\
 \Delta u_2 &= N_3 \Delta u_{2a} + N_4 I \left\{ \Delta \theta_{3a} + \left(\theta_{2a} + \frac{\Delta \theta_{2a}}{2} \right) \Delta \theta_{1a} \right\} + N_5 \Delta u_{2b} + N_6 I \left\{ \Delta \theta_{3b} + \left(\theta_{2b} + \frac{\Delta \theta_{2b}}{2} \right) \Delta \theta_{1b} \right\} \\
 \Delta u_3 &= N_3 \Delta u_{3a} + N_4 I \left\{ -\Delta \theta_{2a} + \left(\theta_{3a} + \frac{\Delta \theta_{3a}}{2} \right) \Delta \theta_{1a} \right\} + N_5 \Delta u_{3b} + N_6 I \left\{ -\Delta \theta_{2b} + \left(\theta_{3b} + \frac{\Delta \theta_{3b}}{2} \right) \Delta \theta_{1b} \right\} \\
 \Delta \phi &= N_3 \left(\Delta \theta_{1a} - \frac{1}{2} \theta_{2a} \Delta \theta_{3a} + \frac{1}{2} \theta_{3a} \Delta \theta_{2a} \right) + \frac{1}{2} (N_5 \bar{u}_2 + N_4 \theta_{3a} + N_6 \theta_{3b}) (N_5 \Delta \bar{u}_3 - N_4 \Delta \theta_{2a} - N_6 \Delta \theta_{2b}) \\
 &\quad + N_5 \left(\Delta \theta_{1b} - \frac{1}{2} \theta_{2b} \Delta \theta_{3b} + \frac{1}{2} \theta_{3b} \Delta \theta_{2b} \right) - \frac{1}{2} (N_5 \bar{u}_3 - N_4 \theta_{2a} - N_6 \theta_{2b}) (N_5 \Delta \bar{u}_2 + N_4 \Delta \theta_{3a} + N_6 \Delta \theta_{3b}) \\
 &\quad + N_4 \{ I \Delta \kappa_{1a} + 3(\bar{u}_2 \Delta \theta_{2a} + \Delta \bar{u}_2 \theta_{2a} + \Delta \bar{u}_2 \Delta \theta_{2a}) + 3(\bar{u}_3 \Delta \theta_{3a} + \Delta \bar{u}_3 \theta_{3a} + \Delta \bar{u}_3 \Delta \theta_{3a}) \} \\
 &\quad + N_6 \{ I \Delta \kappa_{1b} - 3(\bar{u}_2 \Delta \theta_{2b} + \Delta \bar{u}_2 \theta_{2b} + \Delta \bar{u}_2 \Delta \theta_{2b}) - 3(\bar{u}_3 \Delta \theta_{3b} + \Delta \bar{u}_3 \theta_{3b} + \Delta \bar{u}_3 \Delta \theta_{3b}) \} \\
 &\quad + (N_4 + N_6) \{ (\theta_{2b} \Delta \theta_{3a} + \Delta \theta_{2b} \theta_{3a} + \Delta \theta_{2b} \Delta \theta_{3a}) - (\theta_{2a} \Delta \theta_{3b} + \Delta \theta_{2a} \theta_{3b} + \Delta \theta_{2a} \Delta \theta_{3b}) \}
 \end{aligned} \tag{13}$$

式(9)の増分量は次式ようになる。

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi &= N_1 \left(\Delta \theta_{1a} - \frac{1}{2} \theta_{2a} \Delta \theta_{3a} + \frac{1}{2} \theta_{3a} \Delta \theta_{2a} \right) + \frac{1}{2} (N_5 \bar{u}_2 + N_4 \theta_{3a} + N_6 \theta_{3b}) (N_5 \Delta \bar{u}_3 - N_4 \Delta \theta_{2a} - N_6 \Delta \theta_{2b}) \\
 &\quad + N_2 \left(\Delta \theta_{1b} - \frac{1}{2} \theta_{2b} \Delta \theta_{3b} + \frac{1}{2} \theta_{3b} \Delta \theta_{2b} \right) - \frac{1}{2} (N_5 \bar{u}_3 - N_4 \theta_{2a} - N_6 \theta_{2b}) (N_5 \Delta \bar{u}_2 + N_4 \Delta \theta_{3a} + N_6 \Delta \theta_{3b})
 \end{aligned} \tag{14}$$

なお、諸量の右肩添字()'は、 ξ による微分を表している。

部材内部の点の変位増分 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ も式(4)から同様に求められる。

(2) 平衡方程式

ひずみと変位の増分量に式(13),(6),(7)を代入して一般化変位とその増分量に関する3次以上の項を省略し、一般化変位をベクトル $\mathbf{d}$ 、その増分量を $\Delta \mathbf{d}$ とおくと、次式のように表すことができる。

$$\Delta \varepsilon_i = (\mathbf{b}_i + \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_i \Delta \mathbf{d})^\top \Delta \mathbf{d} \quad (i=1,2) \tag{15}$$

$$\Delta u = (\mathbf{f}_u + \hat{\mathbf{F}}_u \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{d})^\top \Delta \mathbf{d}, \quad \Delta v = (\mathbf{f}_v + \hat{\mathbf{F}}_v \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_v \Delta \mathbf{d})^\top \Delta \mathbf{d}, \quad \Delta w = (\mathbf{f}_w + \hat{\mathbf{F}}_w \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_w \Delta \mathbf{d})^\top \Delta \mathbf{d} \tag{16}$$

$\mathbf{d}$ と $\Delta \mathbf{d}$ 以外のベクトルと行列は座標の関数であり、行列 $\mathbf{C}_i, \mathbf{F}_u, \mathbf{F}_v, \mathbf{F}_w$ は対称になるように表現できる。

仮想変位による仮想ひずみエネルギー δU は、 n 回目の平衡状態の部材に生じている応力を σ_1, σ_2 で表し、 $\Delta \mathbf{d}$ に関して線形化すると、次式で与えられる。

$$\delta U = \int_V \{ (\sigma_1 + \Delta \sigma_1) \delta (\Delta \varepsilon_1) + (\sigma_2 + \Delta \sigma_2) \delta (\Delta \varepsilon_2) \} dV = \delta (\Delta \mathbf{d})^\top [\mathbf{k}_\tau \Delta \mathbf{d} + \mathbf{f}] \tag{17}$$

ここに、接線剛性行列 $\mathbf{k}_\tau$ と断面力ベクトル $\mathbf{f}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_\tau &= \int_V \{ E(\mathbf{b}_1 + \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{d})(\mathbf{b}_1 + \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{d})^\top + G(\mathbf{b}_2 + \hat{\mathbf{C}}_2 \mathbf{d})(\mathbf{b}_2 + \hat{\mathbf{C}}_2 \mathbf{d})^\top + \sigma_1 \mathbf{C}_1 + \sigma_2 \mathbf{C}_2 \} dV \\ \mathbf{f} &= \int_V \{ \sigma_1 (\mathbf{b}_1 + \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{d}) + \sigma_2 (\mathbf{b}_2 + \hat{\mathbf{C}}_2 \mathbf{d}) \} dV \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

n 回目の平衡状態での部材のひずみ ε_i は、一般化変位 $\mathbf{d}$ で表すと

$$\varepsilon_i = (\mathbf{b}_i + \frac{1}{2} \mathbf{C}_i \mathbf{d})^\top \mathbf{d} \quad (i=1,2) \tag{19}$$

応力 σ_i は、弾性定数 E, G と上式のひずみで表されるので、 $\mathbf{k}_\tau$ と $\mathbf{f}$ は $\mathbf{d}$ により陽な形で表現できる。

ところで、式(A.5)のような回転の非可換性を無視した場合には、式(15),(16)の $\hat{\mathbf{C}}_i, \hat{\mathbf{F}}_u, \hat{\mathbf{F}}_v, \hat{\mathbf{F}}_w$ は、 $\mathbf{C}_i, \mathbf{F}_u, \mathbf{F}_v, \mathbf{F}_w$ に一致する。また、割線剛性行列の $\mathbf{d}$ に関する定数項を $\mathbf{k}_0$ 、1次項を $\mathbf{k}_1$ 、2次項を $\mathbf{k}_2$ とすると、 $\mathbf{k}_\tau$ と $\mathbf{f}$ はよく知られた次式で与えられる。

$$\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2, \quad \mathbf{f} = (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{d} \tag{20}$$

部材内部の単位体積当りの荷重 $(p_x + \Delta p_x), (p_y + \Delta p_y), (p_z + \Delta p_z)$ と、部材端の単位面積当りの荷重 $(\bar{P}_x + \Delta \bar{P}_x), (\bar{P}_y + \Delta \bar{P}_y), (\bar{P}_z + \Delta \bar{P}_z)$ による仮想仕事 δW は、

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V \{ (p_x + \Delta p_x) \delta(\Delta u) + (p_y + \Delta p_y) \delta(\Delta v) + (p_z + \Delta p_z) \delta(\Delta w) \} dV \\ &\quad + \left[\bar{n}_x \int_A \{ (\bar{P}_x + \Delta \bar{P}_x) \delta(\Delta u) + (\bar{P}_y + \Delta \bar{P}_y) \delta(\Delta v) + (\bar{P}_z + \Delta \bar{P}_z) \delta(\Delta w) \} dA \right]_0^l \\ &= \delta(\Delta \mathbf{d})^T [(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) + \mathbf{q} \Delta \mathbf{d}] \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $\bar{n}_x$ は部材端の断面の外向き法線と部材軸との方向余弦であり、 $x=0$ で -1 、 $x=l$ で $+1$ の値をとる。また、ベクトル $\mathbf{p}, \Delta \mathbf{p}$ と行列 $\mathbf{q}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_V \{ p_x (\mathbf{f}_u + \hat{\mathbf{F}}_u \mathbf{d}) + p_y (\mathbf{f}_v + \hat{\mathbf{F}}_v \mathbf{d}) + p_z (\mathbf{f}_w + \hat{\mathbf{F}}_w \mathbf{d}) \} dV \\ &\quad + \left[\bar{n}_x \int_A \{ \bar{P}_x (\mathbf{f}_u + \hat{\mathbf{F}}_u \mathbf{d}) + \bar{P}_y (\mathbf{f}_v + \hat{\mathbf{F}}_v \mathbf{d}) + \bar{P}_z (\mathbf{f}_w + \hat{\mathbf{F}}_w \mathbf{d}) \} dA \right]_0^l \\ \Delta \mathbf{p} &= \int_V \{ \Delta p_x (\mathbf{f}_u + \hat{\mathbf{F}}_u \mathbf{d}) + \Delta p_y (\mathbf{f}_v + \hat{\mathbf{F}}_v \mathbf{d}) + \Delta p_z (\mathbf{f}_w + \hat{\mathbf{F}}_w \mathbf{d}) \} dV \\ &\quad + \left[\bar{n}_x \int_A \{ \Delta \bar{P}_x (\mathbf{f}_u + \hat{\mathbf{F}}_u \mathbf{d}) + \Delta \bar{P}_y (\mathbf{f}_v + \hat{\mathbf{F}}_v \mathbf{d}) + \Delta \bar{P}_z (\mathbf{f}_w + \hat{\mathbf{F}}_w \mathbf{d}) \} dA \right]_0^l \\ \mathbf{q} &= \int_V \{ p_x \mathbf{F}_u + p_y \mathbf{F}_v + p_z \mathbf{F}_w \} dV + \left[\bar{n}_x \int_A \{ \bar{P}_x \mathbf{F}_u + \bar{P}_y \mathbf{F}_v + \bar{P}_z \mathbf{F}_w \} dA \right]_0^l \end{aligned} \quad (22)$$

断面内の点に作用した力は部材軸上に作用した力とモーメントに置換できるが、断面内の点に作用している力の作用線までの部材軸上の点からの距離が断面の回転により変化するために、モーメントは変位に関する定数項と 1 次項から表されることが分かる。式(21)の $\mathbf{q}$ に関する項は、そのような変位による荷重の変化を表している。この項を考慮することにより、変形した後の状態を考慮しない線形解析では生じないような断面内の荷重作用位置の違いによる影響が、有限変位解析では現れることが分かる²⁵⁾。

仮想仕事の原理に、式(17), (21)を用いると一般化変位 $\Delta \mathbf{d}$ に関する次のような平衡方程式が得られる。

$$\mathbf{k}_T \Delta \mathbf{d} + \mathbf{f} = (\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) + \mathbf{q} \Delta \mathbf{d} \quad (23)$$

4. 更新Lagrangeの手法による定式化

(1) 部材の基礎式

更新Lagrangeの手法では、増分後の第 n 平衡状態の形状を基準にするが、このときの部材の形状は初期段階のものと異なり、曲線状になっている。しかし、定式化の簡便さから、この状態での部材の節点を結んだ直線部材により定式化を行うことが多い。したがって、第 n 平衡状態からの伸び率 $\Delta \varepsilon_0$ 、ねじれ率 $\Delta \kappa_1$ 、曲率 $\Delta \kappa_2, \Delta \kappa_3$ は、式(3)の u_i, ϕ を両節点を結んだ軸上の変位 Δu_i とねじれ角 $\Delta \phi$ で置換した式により得られ、部材内の変位 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ は、式(4)の u_i, ϕ を $\Delta u_i, \Delta \phi$ で置換した式で表される。また、ひずみ $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2$ については、式(10)を用いる。

変位関数についても同様に、 $\Delta u_i, \Delta \phi$ は式(6), (7), (9)の変位を増分量で置換することにより得られる。

(2) 平衡方程式

上述のひずみと変位に変位関数を代入し、一般化変位の 3 次以上の微小項を省略して、一般化変位をベクトル $\Delta \mathbf{d}$ とおくと、ひずみと変位は一般に次式のように表される。

$$\Delta \varepsilon_i = \left(\mathbf{b}_i + \frac{1}{2} \mathbf{C}_i \Delta \mathbf{d} \right) \Delta \mathbf{d}, \quad \Delta u = \left(\mathbf{f}_u + \frac{1}{2} \mathbf{F}_u \Delta \mathbf{d} \right) \Delta \mathbf{d}, \quad \Delta v = \left(\mathbf{f}_v + \frac{1}{2} \mathbf{F}_v \Delta \mathbf{d} \right) \Delta \mathbf{d}, \quad \Delta w = \left(\mathbf{f}_w + \frac{1}{2} \mathbf{F}_w \Delta \mathbf{d} \right) \Delta \mathbf{d} \quad (24)$$

上式は、全Lagrangeの手法の式(15), (16)で一般化変位 $\mathbf{d}$ に関する項を省略した式に一致する。したがって、平衡方程式は式(23)と同様の式になり、接線剛性行列 $\mathbf{k}_T$ 、断面力ベクトル $\mathbf{f}$ 、荷重 $\mathbf{p}, \Delta \mathbf{p}, \mathbf{q}$ は式(18), (22)で $\mathbf{d}$ に関する項を省略した式として得られる。ただし、第 n 平衡状態の部材に生じているひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は、各増分段階ごとの変位関数を定義している座標系が異なるために、式(19)のように表現できないので $\mathbf{k}_T, \mathbf{f}$ を $\mathbf{d}$ により陽な形で表すことができない。そこで、応力 σ_1, σ_2 は、5.(3)のように仮定する。

5. 数値解法

(1) 部材座標系

増分形式の全Lagrangeの手法による直線部材から剛体変位を除去した直線部材の部材座標系は、文献5)と同様に部材両端を結んだ弦上に設定する。更新Lagrangeの手法でも、増分段階の進行により曲線状になっている部材を、その両端を結んだ直線部材で表現しているので、剛体変位を除去した全Lagrangeの手法の場合と同様の部材座標系を用いる。

(2) 一般化変位の合成と拘束条件の処理

直前の平衡状態までの一般化変位と、次の増分段階までの一般化変位増分の合成は、並進変位については、ベクトル量であるのでそのまま合成でき、ねじれ率についても同様に扱える。しかし、回転はベクトル量でないために、並進変位と同じようには扱えない。有限回転の合成は、第 n 平衡状態までの回転 θ^n 、この状態からの回転 $\Delta\theta$ 、初期状態から次の状態までの回転 θ^{n+1} について、式(A.3)から次式で与えられる。

$$\theta^{n+1} = \frac{1}{1 - \theta^n \tau \Delta\theta / 4} \left(\theta^n + \Delta\theta - \frac{1}{2} \theta^n \times \Delta\theta \right) \quad (25)$$

ここに、 $\theta^n, \theta^{n+1}, \Delta\theta$ はそれぞれ回転に関する3つの一般化変位で構成されたベクトルである^{*)}。

上式より、回転を表す3つの一般化変位は互いに連成していることが分かる。このために、回転がある一方向に関して拘束されている場合の拘束条件の処理に、並進変位の場合に比べて違いが生じる。

いま、部材軸上のある点で正規直交基底($\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$)を考え、回転が $\mathbf{g}_a$ 軸に関して拘束されているものとする。この場合には、すでに拘束条件を満足した平衡状態が得られている増分段階までの回転 θ^n の回転軸は $\mathbf{g}_a$ に直交している。また、次の増分段階までの回転 θ^{n+1} の軸は $\mathbf{g}_a$ 軸に直交していなければならないことから、回転 $\Delta\theta$ に課されなければならない拘束条件を考える。

回転 $\theta^n, \theta^{n+1}, \Delta\theta$ の $\mathbf{g}_i (i=1, 2, 3)$ の成分をそれぞれ $\theta_i^n, \theta_i^{n+1}, \Delta\theta_i$ とする。なお、 θ_a^n は零である。また、式(25)の $\mathbf{g}_a$ 成分の式で θ_a^{n+1} が零でなければならないことから次式を得る。

$$\Delta\theta_a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ajk} \theta_j^n \Delta\theta_k \quad (26)$$

ここに、 ε_{ajk} はEddingtonの ε である。

回転をベクトル量として扱うことができるような微小回転の場合には、増分量についても $\Delta\theta_a=0$ になる。しかし、有限回転では一般化変位が連成するために、増分量の3成分に式(26)のような拘束条件が得られる。なお、回転が2つの方向に関して拘束されている場合には、これらの2方向に直交した軸のまわりに回転するだけであり、成分の連成は起こらないので並進変位などと同様の処理ができる。

(3) 断面力と変形量

全Lagrangeの手法では、すでに求められた平衡状態までの応力 $\sigma_i (i=1, 2)$ は、各増分段階で参照する座標系が同一なので、部材内部での関数形が明らかになっている。しかし、更新Lagrangeの手法では、各増分段階での座標系が異なっているので、応力を陽な形で表現できない。このために、平衡方程式を数値積分に依らずに解析的に求める場合には、部材内部の応力を仮定しなければならない。

応力 $\sigma_i (i=1, 2)$ は、断面力から次式で表される。

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} - y \frac{M_z}{I_z} + z \frac{M_y}{I_y} - \omega \frac{M_w}{I_w} + \frac{E}{2} \left(y^2 + z^2 - \frac{I_r}{A} \right) \left(\frac{T_s}{G J_s} \right)^2, \quad \sigma_2^n = -x \frac{T_s}{J_s} \quad (27)$$

*) θ の定義より回転角 α が $\pm\pi$ のときには、 θ の値が無限大になるので数値計算上は回転の総量を $2\phi \tan(\alpha/2)$ の代わりに $\alpha\phi$ として扱っている。このときの α と ϕ は式(25)の代わりに次式を用いて求める。

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} \sin \frac{\alpha^{n+1}}{2} &= \phi^n \sin \frac{\alpha^n}{2} \cos \frac{\Delta\alpha}{2} + \Delta\phi \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \cos \frac{\alpha^n}{2} - (\phi^n \times \Delta\phi) \sin \frac{\alpha^n}{2} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha^{n+1}}{2} &= \cos \frac{\alpha^n}{2} \cos \frac{\Delta\alpha}{2} - (\phi^n \tau \Delta\phi) \sin \frac{\alpha^n}{2} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \end{aligned}$$

ここに、断面力 N, M_y, M_z, M_w, T_s は部材の伸び率, ねじれ率, 曲率から次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_1 dA = EA \varepsilon_0 + \frac{1}{2} E I_r \kappa_1^2, & M_y &= \int_A \sigma_1 z dA = E I_y \kappa_2 \\ M_z &= -\int_A \sigma_1 y dA = E I_z \kappa_3, & M_w &= -\int_A \sigma_1 \omega dA = E I_w \kappa_{1,1}, & T_s &= -\int_A \sigma_2 \chi dA = G J_s \kappa_1 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また、断面定数 $A, I_y, I_z, I_w, J_s, I_r$ は次式で与えられる。

$$A = \int_A dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_w = \int_A \omega^2 dA, \quad J_s = \int_A \chi^2 dA, \quad I_r = I_y + I_z \quad (29)$$

第 n 平衡状態での部材を直線部材で表しているの、断面力は N を一定, M_y と M_z を 1 次式で次のように仮定する。

$$N = \frac{1}{2}(N_a + N_b), \quad M_y = N_1 M_{ya} + N_2 M_{yb}, \quad M_z = N_1 M_{za} + N_2 M_{zb} \quad (30)$$

ここに、添字 a, b が付いた断面力は、それぞれ節点 a, b での値を表し、これらは式(28)より節点 a, b の伸び率, ねじれ率, 曲率から求められる。

また、 T_s と M_w は、両節点でのねじれ率とその微係数から次のように仮定する。

$$T_s = \frac{N}{3} T_{sa} + \frac{N}{3} T_{sb} + \alpha (N_4 M_{wa} + N_6 M_{wb}), \quad M_w = \frac{1}{\alpha d \xi} \frac{dT_s}{d\xi} \quad (31, a)$$

ここに、 $\alpha = G J_s I / E I_w$ である。

そり変形が省略できる充実部材では、 T_s を一定として次のように仮定する。

$$T_s = \frac{1}{2}(T_{sa} + T_{sb}) \quad (31, b)$$

6. 数値計算例

(1) 線形座屈解析

式(6), (7)の変位関数を用いて、円弧アーチの曲げ

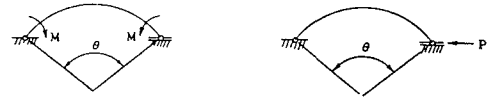


図-2 線形座屈解析の計算例

ねじれ座屈解析を行ない、既往の方法による結果と

比較する。また、円弧部材の基礎式を用いてRayleigh-Ritz法により解析的に求めた座屈荷重と比較し、式(6), (7)の変位関数による結果がRayleigh-Ritz法による結果と一致することを示す。

計算例として、図-2に示しているような両端にモーメントが作用する円弧アーチと端部に水平力が作用する円弧アーチの曲げねじれ座屈解析を行なう。これらの座屈荷重は比較的容易に求められることから、前者については、Vlasov²⁰⁾やTimoshenko²¹⁾などにより解かれ、後者についてはOjalvoら²²⁾により解かれている。なお、これらの例に既往の直線部材を用いたマトリックス法²³⁾による値は、前述の研究者による解析的な解に一致しないことが知られている。

図-3は純曲げが生じるように両端にモーメントが作用する場合、図-4は端部に水平力が作用する場合の座屈荷重をアーチの開角 $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ (アーチの弧長 L は一定) に関して示している。ただし、変位の境界条件は、アーチ面内に関しては一端ヒンジ、他端は水平方向に移動可能なローラ支持であり、アーチ面外に関しては両端の変位とねじれ角が拘束されている。また、アーチの諸元は次の通りである。

$A = 92.88 \text{ cm}^2, J_s = 58.9 \text{ cm}^4, I_y = 11363 \text{ cm}^4, I_z = 3871 \text{ cm}^4, I_w = 555869 \text{ cm}^6, L = 10.244 \text{ m}, E = 200 \text{ GPa}, G = 77.2 \text{ GPa}$

座屈荷重 M_{cr}, P_{cr} を表すこれらの図での係数 γ はそれぞれ次式のように与えられる。

$$\gamma = \begin{cases} M_{cr}/M_{st} & ; \quad M_{st} = \left(\frac{\pi}{L}\right) \sqrt{E I_z \beta}, \quad \beta = G J_s + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E I_w & \dots\dots \text{図-3} \\ P_{cr}/P_{st} & ; \quad P_{st} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E I_z & \dots\dots \text{図-4} \end{cases}$$

なお、図-3, 4のRayleigh-Ritz法による曲線は、それぞれVlasov²⁰⁾, Ojalvo²²⁾による結果に一致している。

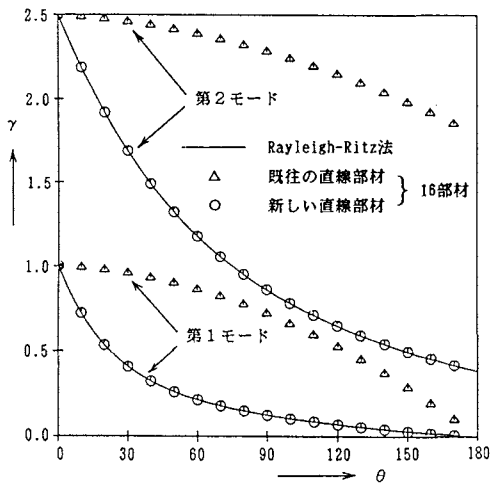


図-3 曲げを受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈

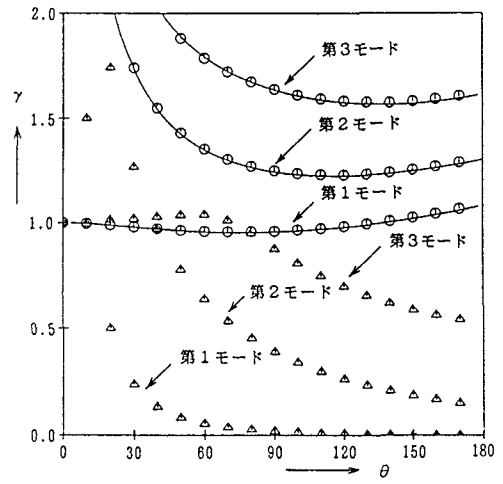


図-4 水平方向力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈

(2) 有限変位解析

剛体変位を除去した全Lagrangeと更新Lagrangeの方法について、既往の直線部材と本文で示した新しい直線部材を用いた有限変位解析を行い、精度と収束性を調べる。

計算例として、図-5に示しているような集中荷重が(a)集中荷重を受ける円弧アーチ (b)曲げを受ける円弧アーチ作用する円弧アーチと両端にモーメントが作用する円弧

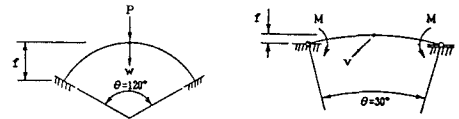


図-5 有限変位解析の計算例

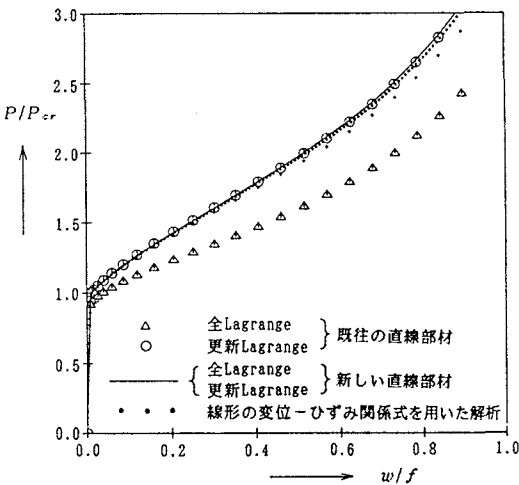


図-6 集中荷重を受ける円弧アーチの有限変位解析

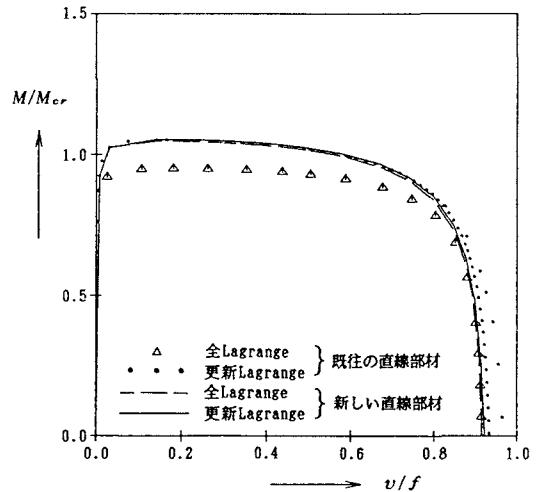


図-7 曲げを受ける円弧アーチの有限変位解析

アーチの曲げねじれ座屈後の有限変位解析を行なう。図-5.(b)の円弧アーチの諸元は、6.(1)に示したものと同じであり、図-5.(a)の円弧アーチの諸元は次の通りである。

$$A=74, J_s=2408, I_y=7666, I_z=800, I_{yz}=26600, E=20600, G=7950$$

計算には、曲げねじれ座屈荷重の1/1000の荷重を面外方向に作用させて、荷重作用点のたわみを制御パラメータとした変位増分法を用い、図-5.(a)のアーチは構造の対称性を考慮して片側を16部材に分割し、図-5.(b)のアーチは全体を16部材に分割している。また、各増分段階では、全節点の一般化変位の相対誤差が 10^{-3} 以下に収まるまで反復を繰り返している。

図-6は、弧長 $L=500$ のアーチの荷重と荷重作用点のたわみの関係を、剛体変位を除去した全Lagrangeと更新Lagrangeの手法について既往の直線部材と本文で誘導した部材について示している。また、更新Lagrangeの手法で、ひずみと変位の関係式に、線形項だけを用いて誘導した平衡方程式による結果も示している。

これより、全Lagrangeの手法による既往の部材では、他の方法による結果に一致していないことが分かる。既往の部材による結果が正しい解を与えないことは、すでに文献(19)に示しているが、より具体的には断面力ベクトル $\mathbf{f}$ の部材軸まわりのねじれ角に対応する一般化力の節点 a, b での値の絶対値が一致していないことを確認できることから分かる。

また、更新Lagrangeの手法では、既往の部材による結果と本文で誘導した部材による結果が一致していることが分かる。これは、線形項だけを用いた平衡方程式による結果が増分区間を狭めることにより、本文で誘導した結果に接近していることから明らかのように、更新Lagrangeの手法では正確な平衡方程式を用いていなくても、ある程度妥当な結果が得られることによる。

図-7は、曲げを受けた円弧アーチの荷重と面外方向変位の関係を示している。更新Lagrangeの手法による既往の部材の結果は、この図から増分区間を狭めなければ新しい部材による結果に一致しないことが分かる。また、図-8.(a)~(c)は、図-5.(a)のアーチを有限変位解析した際のNewton-Raphson法の反復回数を弧長 $L=500, 1500, 4500$ の場合について示している。これより、更新Lagrangeの手法では細長比の影響をあまり受けないが、全Lagrangeの手法では細長比の大きなたわみ易い部材では、多くの反復回数を要することが分かる。また、全Lagrangeと更新Lagrangeのそれぞれの手法について既往の部材に比べて新しい部材では反復回数が少ないことが分かる。

7. 考 察

(1) 線形座屈解析

新しい部材は、回転とねじれ率の一般化変位として有限回転の性質を考慮した式(5), (3.b)を用いたことにより幾何学的非線形解析として整合のとれたものになっている。この部材により、曲げねじれ座屈の計算例に示したように、既往の部材では正しい解析が行えなかった問題について、正しい解析が行えることが分かり、本部材は座屈解析に関して妥当なことが分かる。

この部材の曲げねじれ座屈に関する幾何剛性行列 $\mathbf{k}_G$ を示すと、次のようになる。

$$\mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} N\mathbf{k}_{G1}/l & (M_{ya}\mathbf{k}_{G2} + M_{yb}\mathbf{k}_{G3})/l^2 \\ \text{sym.} & (I_r/A)N\mathbf{k}_{G1}/l^3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

ここに、

$$\mathbf{k}_{G1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ & 4 & -3 & -1 \\ & & 36 & -3 \\ \text{sym.} & & & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{G2} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -33 & -3 & 3 & 0 \\ -12 & -3 & -3 & 1 \\ 33 & 3 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{G3} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 33 & -3 \\ -6 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -33 & 3 \\ 3 & 1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

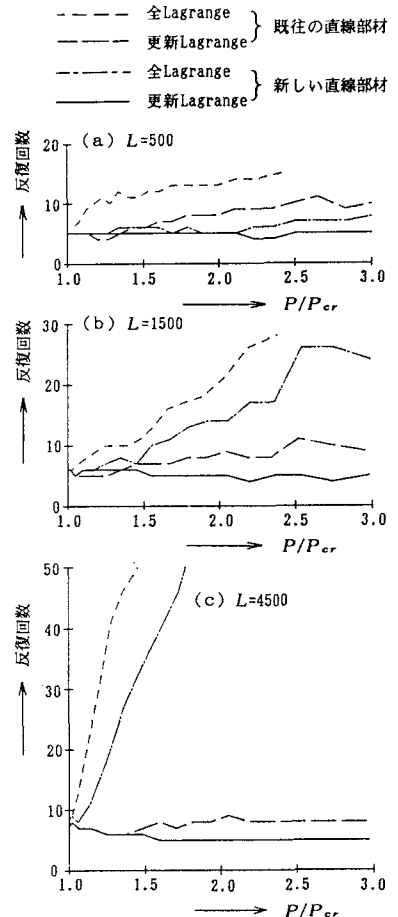


図-8 収束性の比較(集中荷重を受ける円弧アーチ)

なお、この行列を誘導するときの一般化変位ベクトル Δd の成分は、次のようになる。

$$\Delta d = \{\Delta u_{2a}, l \Delta \theta_{3a}, \Delta u_{2b}, l \Delta \theta_{3b}, l \Delta \theta_{1a}, l^2 \Delta \kappa_{1a}, l \Delta \theta_{1b}, l^2 \Delta \kappa_{1b}\}^T$$

この幾何剛性行列 k_a は、既往の部材の幾何剛性行列の(2,5),(5,2)要素に $M_{ya}/2l^2$ 、(4,7),(7,4)要素に $-M_{yb}/2l^2$ を加えたものに相当している。ところで、本文で用いているモーメントは、一対の偶力として表現できる準接線(quasitangential)モーメントとして扱っているが、得られた幾何剛性行列は、Maallaら²⁴⁾が互いに直交した2組の偶力として表現される半接線(semi-tangential)モーメントにより求めた幾何剛性行列に一致している。Maallaらは、既往の変位関数から得られる k_a から、やはり既往の変位関数により得られる q において、モーメントを上述の半接線モーメントとして扱い、 q を1/2倍した行列を差し引くことにより得ている。しかし、 q に含まれる荷重を断面力と考えていることと、モーメントを半接線モーメントとする解釈を行列 q にだけ適用して幾何剛性行列 k_a に含まれるモーメントについては適用していないように思われることから、一貫した定式化とは考え難い。これに対して、本文で誘導した幾何剛性行列 k_a は新しい変位関数から一般的なマトリックス法の定式化により誘導している。また、モーメントに関しても力学において一般的に用いられている定義になっている。

(2) 有限変位解析

文献19)では既往の直線部材を用いた場合に、部材長を無限小にしたときの部材軸の変形量が正しい式に一致しないことを示したが、増分法による定式化ではこの誤差がどのように影響するのか考察していない。そこで、増分形式の全Lagrangeと更新Lagrangeの手法について、誤差を含んだ増分変位(部材軸上の変位で表された断面内の変位)から求めた変位と正しい変位の比較を行う。ただし、そり変位による項は省略する。

n 回の増分後の断面内の変位 u^n は、部材軸上の変位 u_0^n と断面の回転 R^n から、次式で与えられる。

$$u^n = u_0^n + (R^n - I)r_p^0 \quad (34)$$

ここに、 r_p^0 は初期状態での断面内の点の部材軸上の点に対する位置ベクトルである。

($n-1$)回目から n 回目の増分段階までの変位増分 Δu^n は、更新Lagrangeの手法では、次式で与えられる。

$$\Delta u^n = \Delta u_0^n + (\Delta R^n - I)r_p^{n-1} \quad (35)$$

ここに、 $\Delta u_0^n, \Delta R^n$ は、それぞれ($n-1$)回目から n 回目の増分段階までの部材軸上の変位と断面の回転であり、 r_p^{n-1} は($n-1$)回目の断面内の点の部材軸上の点に対する位置ベクトルである。これは、各増分段階の回転より次式で与えられる。

$$r_p^{n-1} = \Delta R^{n-1} \Delta R^{n-2} \cdots \Delta R^1 r_p^0 \quad (36)$$

これより、初期状態からの変位 u_0^n は次式のようにになる。

$$u_0^n = u_0^0 + (\Delta R^n \Delta R^{n-1} \cdots \Delta R^1 - I)r_p^0 \quad (37)$$

上式が式(34)に等しくなるためには、各増分段階で正しい回転 ΔR を用いるか、または近似式を用いても増分区間を狭めて増分区間数を多くすることが必要である。

増分形式の全Lagrangeの手法では、変位増分は次式で与えられる。

$$\Delta u^n = \Delta u_0^n + (\Delta R^n - I)R^{n-1}r_p^0 \quad (38)$$

これより、初期状態からの変位 u_0^n は次式のようにになる。

$$u_0^n = u_0^0 + \left\{ \Delta R^n R^{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} (\Delta R^k R^{k-1} - R^k) - I \right\} r_p^0 \quad (39)$$

上式が式(34)に等しくなるためには、 $R^k = \Delta R^k R^{k-1}$ ($k=2, 3, \dots, n$)が成立しなければならないが、これは正しい式 ΔR を用いない限り成立しない。

このような考察は、ひずみに関しても行うことができ、上述と同様のことが言える。

したがって、図-6,7からも明らかなように、無限分割時の基礎式に誤差を含んでいる既往の直線部材による全Lagrangeの手法では、正しい有限変位解析は行えないが、更新Lagrangeの手法では、誤差を含んだ式や非線形項を省略した式を用いても、増分区間を狭めることにより精度を向上できることが分かる。

次に、剛体変位を除去した全Lagrangeと更新Lagrangeの手法の収束性の違いについて考察する。有限要素法やマトリックス法で精度と収束性の良い解析をするためには、変位関数は隣接した部材の節点で、一般化変位が適合し、部材内部では剛体変位モードとひずみの低次モードを含んでいなければならない。本文での一般化変位の適合条件については、式(6),(7),(9)を用いることにより、2次非線形項まで満足している。しかし、剛体変位モードとひずみの低次モードについては、一般化変位が微小な場合には含まれているが、有限な量の場合には含まれていない。ただし、部材長を短くすることにより近似的に含められる。

ところで、更新Lagrangeの手法では直前の増分段階からの変位と変形量の増分量だけを変位関数により表現しているので、増分区間を狭くすることにより、変位関数で表現される変位は小さくなる。しかし、全Lagrangeの手法では、剛体変位を除いた初期状態から直前の増分段階までの変位と変形量も、変位関数で表現しているために、増分段階の進行とともに、変位関数で表現する変位と変形量が有限な量になる。このような量を小さくするためには、部材長を短くしなければならないが、更新Lagrangeの手法と同一の部材数を用いている場合には、剛体変位モードにより生じた応力による不平衡力を小さくするために、多くの反復を要しているものと思われる。

そこで、剛体変位モードを除いた変位関数を式(6),(7),(9)と同様の方法で誘導して、その変位関数に剛体変位モードを加える。この変位関数は u_2, u_3, ϕ については、式(6),(7)に一致し、 u_1 は次のようになる。

$$u_1 = N_1 u_a + N_2 u_b + N_4 l \{ \bar{u}_2 (\bar{u}_2 - \theta_{3a}) + \bar{u}_3 (\bar{u}_3 + \theta_{2a}) \} + N_6 l \{ \bar{u}_2 (\bar{u}_2 - \theta_{3b}) + \bar{u}_3 (\bar{u}_3 + \theta_{2b}) \} \quad (40)$$

充実部材のねじれ角 ϕ は、次式のようになる。

$$\phi = N_1 \theta_a + N_2 \theta_b + \frac{N_5}{4} \{ \bar{u}_2 (\theta_{2a} + \theta_{2b}) + \bar{u}_3 (\theta_{3a} + \theta_{3b}) \} \quad (41)$$

式(6,a),(9)の代わりに、これらの式を用いて、3., 4.に述べた手順で平衡方程式を誘導すると、更新Lagrangeの手法では、式(40),(41)を用いたことによる違いは現れない。全Lagrangeの手法では、接線剛性行列 k_T と断面力ベクトル f のそれぞれ一般化変位 d に関する2次項、3次項に違いが現れる。この修正した変位関数を用いて、図-5.(a)のアーチの有限変位解析を、全Lagrangeの手法により行った際の各増分段階での反復回数を弧長 $L=500, 1500, 4500$ について、図-9に示している。この図と図-8を比べると、式(40)を用いたことによる反復回数の減少がよく分かる。なお、この変位関数による解は、式(6),(7)を用いた図-6と変わらないことを付記する。

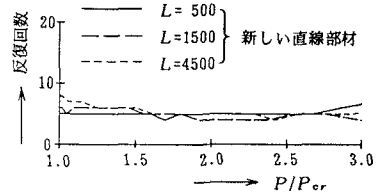


図-9 修正した変位関数を用いた全Lagrangeの手法による有限変位解析の反復回数

8. 結 論

本論文は、先に発表した幾何学的非線形解析において整合のとれた諸量を一般化変位に採用した変位関数を基にして、精度とNewton法の収束性の良い直線部材を開発した。

線形座屈解析に関しては、

(1)アーチ等の曲線部材の曲げねじれ座屈を、既往の直線部材を用いて行う場合には、解析解や曲線部材による正しい解に一致しないことが知られているが、新しい直線部材では正確な解析が行えることを示した。

(2)新しい直線部材による幾何剛性行列は、Maallaらが既往の直線部材から、モーメントの解釈の変更とモーメントのつり合いを考慮して修正した幾何剛性行列に一致している。しかし、本文での幾何剛性行列は、エネルギー原理により組織的に誘導していることから、定式化にあいまいな点を含んでいない。

有限変位解析に関しては、

(1)増分形式の全Lagrangeの手法と更新Lagrangeの手法のそれぞれについて、新しい直線部材を誘導して、同一の解を得ることを示した。

(2)全Lagrangeの手法では、既往の直線部材では正しい解を得ていないことを明らかにし、先に発表した

変位関数に剛体変位モードを含めた新しい直線部材は、精度と収束性が良いことを示した。

(3)更新Lagrangeの手法では、増分区間を狭めることにより既往の直線部材でも精度の良い解が得られるがNewton法の反復回数が多いのに対して、新しい直線部材では精度と収束性が良いことを示した。

なお、このように異なる2つの手法について部材を開発したのは、計算例に示しているように、既往の直線部材では、それぞれの手法による解が一致していないことと、有限変位解析では厳密解が一般には見いだせないが、本文で用いた変位やひずみは正確な式を用いていることから、これら2つの手法による計算結果が一致しているならば、その値は正しい解を表しているものと考えられることによる。

【付録】有限回転の合成と分解

空間での回転は、回転の中心を表す単位ベクトル ϕ と、その右まわりの角 α により表される。この回転を回転行列 $R(\phi, \alpha)$ で表すと、次式ようになる。

$$R(\phi, \alpha) = I \cos \alpha + \phi \phi^T (1 - \cos \alpha) + \phi \sin \alpha \quad (A.1)$$

ここに、 ϕ はベクトル ϕ と単位行列 I から $\phi \times I$ で与えられる行列である。

この回転が、軸 ϕ_1 まわりの角 α_1 による回転 $R(\phi_1, \alpha_1)$ と、続く回転の軸 ϕ_2 まわりの角 α_2 による回転 $R(\phi_2, \alpha_2)$ を合成したものとすると、次のような行列の積で表される。

$$R(\phi, \alpha) = R(\phi_2, \alpha_2) R(\phi_1, \alpha_1) \quad (A.2)$$

回転を、 $2\phi \tan(\alpha/2)$ で表されるベクトル θ により表現する場合には、上式は次のようになる。

$$\theta = \frac{1}{1 - \theta_1^T \theta_2 / 4} \left(\theta_1 + \theta_2 - \frac{1}{2} \theta_1 \times \theta_2 \right) \quad (A.3)$$

式(A.2)より、回転 $R(\phi_1, \alpha_1)$ または、 $R(\phi_2, \alpha_2)$ は、次のように分解される。

$$R(\phi_1, \alpha_1) = R(\phi_2, -\alpha_2) R(\phi, \alpha), \quad R(\phi_2, \alpha_2) = R(\phi, \alpha) R(\phi_1, -\alpha_1) \quad (A.4)$$

また、ベクトル θ_1, θ_2 は次のように分解される。

$$\theta_1 = \frac{1}{1 + \theta^T \theta_2 / 4} \left(\theta - \theta_2 + \frac{1}{2} \theta \times \theta_2 \right) \quad \theta_2 = \frac{1}{1 + \theta_1^T \theta / 4} \left(-\theta + \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_1 \times \theta \right) \quad (A.5)$$

参 考 文 献

- 1)Oran,C.: Tangent Stiffness in Space Frames, Proc.of ASCE,Vol.99,No.ST6,1973.
- 2)Bazant,Z.P. and Nimeiri,M.: Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames J.Engng.Mech.,ASCE,Vol.99,No.EM6,1973.
- 3)結城皓曠・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析,土木学会論文報告集,No.224,1974.
- 4)Komatsu,S. and Sakimoto,T. : Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross-Sections, Proc.of JSCE,No.252,1976.
- 5)前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析,土木学会論文報告集,No.253,1976.
- 6)Bathe,K.J. and Bolourchi,S.:Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, Int.J.Num.Meth.Engng.,Vol.14,No.7,1979.
- 7)薄木征三・稼農知徳・渡辺 昇：有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析,土木学会論文報告集 No.290,1979.
- 8)吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行：立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法,土木学会論文報告集,No.300,1980.
- 9)渡辺 昇・稼農知徳・薄木征三：薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析,土木学会論文報告集 No.317,1982.
- 10)後藤茂夫：立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化,土木学会論文報告集,No.335,1983.

- 11) Elias, Z.M.: Theory and Methods of Structural Analysis, Wiley-Interscience, pp.557-660, 1986.
- 12) Hasegawa, A., Liyanage, K.K. and Nishino, F.: A Non-Iterative Nonlinear Analysis Scheme of Frames with Thin-Walled Elastic Members, JSCE, No.380/I-7, 1987.
- 13) Dvorkin, E.N., Onate, E. and Oliver, J.: On a Non-linear Formulation for Curved Timoshenko Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments, Int.J.Num.Meth.Engng., Vol.26, 1988.
- 14) Goto, Y., Morikawa, Y. and Matsuura, S.: Direct Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Space Rods using Transfer Matrix Technique, JSCE, No.392/I-9, 1988.
- 15) 野沢豊吉: 応用数学講座 第14巻 ベクトル・テンソルおよびその応用(2) 線形代数の方法, コロナ社, pp.63-85, 1977.
- 16) Goldstein, H.: Classical Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley Pub., 1980(瀬川富士・矢野 忠・江沢 康生: 新版 古典力学(上)、吉岡書店、pp.188-227, 1983.)
- 17) Pietraszkiewicz, W. and Badur, J.: Finite Rotations in the Description of Continuum Deformation, Int.J.Engng.Sci., Vol.21, No.9, 1983.
- 18) Chaisomphob, T., Nishino, F., Hasegawa, A. and Aly, A.G.: An Elastic Finite Displacement Analysis of Plane Beams with and without Shear Deformation, JSCE, No.368, 1986.
- 19) 林 正・岩崎英治: 幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性、土木学会論文集 No.392/I-9, 1988.
- 20) Vlasov, V.Z.: Thin Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, 1961 (奥村敏恵ほか共訳: 薄肉弾性ばりの理論、技報堂出版、pp.311-329, 1967)。
- 21) Timoshenko, S. and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, 2nd ed. McGraw-Hill, pp.278-318, 1961.
- 22) Ojalvo, M., Demuts, E. and Tokarz, F.: Out-of-Plane Buckling of Curved Members, J.Struct.Div., ASCE, Vol.95, No.ST10, 1969.
- 23) Hasegawa, A., Liyanage, K., Ikeda, T. and Nishino, F.: A Concise and Explicit Formulation of Out-of-Plane Instability of Thin-Walled Members, JSCE, No.356/I-3, 1985.
- 24) Maalla, K., Kuranishi, S. and Iwakuma, T.: Geometric Stiffness Matrix to Analyze the Lateral-Torsional Buckling of Curved Members, JSCE, No.416/I-13, 1990.
- 25) Hasegawa, A., Naveed A. and Dellelegne T.: Effects of Load Point Location on the Instability and Nonlinear Behaviour of I, Channel, and Zee shaped beams, JSCE, No.404/I-11, 1989.
- 26) 土木学会構造工学委員会: 構造力学公式集 第2版, 技報堂出版, pp.93-98, 1986.

(1990年10月12日受付)