構造工学論文集　Vol.37 A（1991年3月）　土木学会

構造系の対称・非対称分岐経路の探査方法について

Branch-switching in symmetric/asymmetric bifurcation problems of elastic structures

藤井文夫[1]　鍾　国強[2]
By Fumio Fujii & Kok Keong Choong

A branch-switching technique for symmetric or asymmetric bifurcation is described. Line search algorithm is used to predict the branching direction of bifurcation path. The loading level is fixed in the vicinity of the bifurcation point. A curve is introduced and its tangent vector is employed as line search direction, in which a stationary point of the potential is to be detected. The vector directed from the bifurcation point to the detected stationary point will provide the best predictor to switch to the postcritical path by iterations. Numerical examples show that the proposed branch-switching works well in bifurcation problems.

1．まえがき

非線形構造系（n自由度）のつり合い曲線上には，荷重の極大（小）点，変位の折り返し点，それに分岐点などの特異点が出現する。このうち荷重極大点は荷重変数の折り返し点であり，分岐点は解曲線の枝分かれ現象である。数学的には線形化増分方程式の係数行列（後述の式（2）の長方行列［ f ］）のランクが，変数の折り返し点ではnであるのに対して，分岐点（単枝分岐点）では（n－1）にまで落ち込んでしまう。このことは力学的には，適当な変数（荷重，または変位）を制御すれば折り返し点は越えられるが，分岐点ではどのような変数を制御しても特異状態に陥ってしまうことを意味している。したがって分岐点は折り返し点と比較すると特異性が強く，より複雑な数値計算上の取り扱いを必要とする問題である。分岐問題での主要なテーマのひとつは，つり合い曲線上の分岐点の位置をどう特定するか，もうひとつは分岐点を検出後，分岐経路をどう探査するかの2点である。

前半のテーマについては，すでに1988年に Wriggers ら〔19，20〕が，いわゆるextended system を用いて的確に分岐点（または荷重極大点）を捕らえる手法を発表している。ここでは未知量として変位ベクトルと接線剛性行列のゼロ固有値に対する固有ベクトル，さらに荷重変数を採用し，全部で（2n＋1）個の変数となる。本来のn本の全体方程式の他に付加的条件としては，接線剛性行列と固有ベクトルの積がゼロ，それに固有ベクトルの長さを規定する条件式を採用している。この特異点を検出する反復方法は2次の収束で，安定で精度的にも良好である。その反面接線剛性行列の導関数を必要とし，多少計算労力がかかるが，筆者らの意見ではいまのところこれが特異点をヒットする一番優れた方法である。

1）Dr．－Ing．岐阜大学助教授　工学部　（〒501-11　岐阜市柳戸1－1）
2）岐阜大学大学院工学研究科

後半部分では分岐点より分岐経路上の一点に到るために，分岐点よりどの方向に増分ベクトルを伸ばして経路の切り換えを行うかが問題となる。全く見当違いの方向に増分ベクトルを射ると解が発散するか，これまで追跡してきた経路に再び戻るかのいずれかであり，スムースに分岐経路への切り換えを行うためには分岐経路が存在する可能性の高い方向を狙う必要がある。現在の実用分岐解析では，『これまで追跡してきた経路の接線ベクトル』と，『分岐点での接線剛性行列のゼロ固有値に対応する固有ベクトル』との線形結合で分岐経路方向を予測するのが定石である〔１２，１４，１８〕。しかし問題はこれらの２つのベクトルの長さをどう評価するかであり，これには基本的には２つの姿勢がある。ひとつは，ベクトルの長さを適当に決め反復計算を繰り返し，これまでとは異なる経路に収束するまで試行錯誤を繰り返す。これにはせいぜい全体・増分方程式だけで充分で，単純である代わりにギャンブル性を伴う。反復計算は高くつくため，成功するまでに投資した計算労力（多元連立方程式の解法の繰り返しなど）は不経済となる。わが国におけるパイオニア的存在である細野の論文〔１２〕，他にも〔１５，１８，２５〕などはこの部類に属する。もうひとつの姿勢は，高次項を用いて分岐方向を評価する発想である。ポテンシャルの３階微分，すなわち接線剛性行列の一階微分まで評価できればかなりの情報が得られることがわかっている〔２４〕。これは計算労力がかかる代償として，分岐経路にヒットする確率も高いが，定式化によっては増分高次項を得るのが困難となる場合もある。また多枝分岐の場合にも困る。〔１６，１９，２４〕がこれに従う。分岐問題に関する有益なレビューが，〔１４，２３，２４〕にある。

本研究で提案する分岐経路の探査方法〔１〕は，高次項を使わないと言う意味では前者の部類に属する。予め分岐経路が確実に存在する可能性の高い方向を見定め，この方向に沿って最も有望な増分ベクトルを直線探査する。探査を完了するまで反復計算は一切必要とせず，試行錯誤による失敗を回避でき，信頼性の高い『経路切り換えの手法』として特徴づけられる。

２．分岐経路の直線探査

原則的には分岐点より全く任意の方向に増分ベクトルを伸ばすことができる。要はいかにして分岐経路に移行する見込みの高い予測ベクトルを得るかである。オイラー座屈のような対称分岐問題の場合，分岐経路の接線ベクトルは，分岐点での接線剛性行列（特異行列）のゼロ固有値の固有ベクトルに等しく，したがって前述の線形結合では，これまで追跡してきた経路の接線ベクトルは不要となり，固有ベクトルの方向に予測ベクトルを伸ばすだけでよい〔１３，１４〕。ただしその長さは不定で，一般に微小長さで良いとされているがあまり極端に短過ぎると，分岐点付近での特異状態から脱し切れず，固有ベクトルのスケーリングにもある程度の試行錯誤を伴うこともある。

非対称分岐問題では，これまで追跡してきた経路の接線ベクトルも加味する必要がある。以下ではこのより一般的な非対称分岐問題を想定し，直線探査により分岐経路をヒットする計算戦略を考える（図１）。

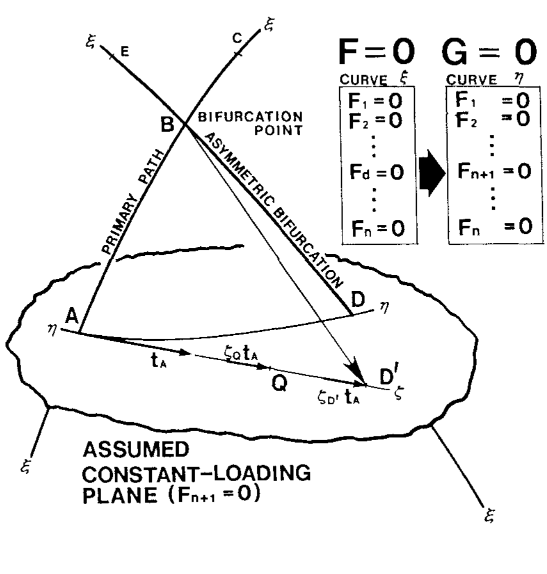


図１　直線探査

いま構造系のつり合い曲線ξの支配方程式として，ポテンシャルπ（$\mathbf{X}$）の停留条件より導けるn本の全体方程式をつぎのように定義する。

$$\mathbf{F}=\mathbf{0} \qquad \text{式（1）}$$

ここに列ベクトル$\mathbf{F}=(F_1, F_2, \ldots, F_n)^T$の各成分は変数$\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})^T$の関数である。荷重パラメータ$\lambda$は，最後の（n＋1）番目の変数$X_{n+1}$とする（$\lambda=X_{n+1}$）。線形化増分方程式は，式（1）を各変数で偏微分することにより，

$$[\,\mathbf{f}\,]\,\mathbf{dX}=\mathbf{0} \qquad \text{式（2）}$$

となる。ここに［ $\mathbf{f}$ ］はn行（n＋1）列の長方行列で，その（j，k）要素は，

$$f_{jk} = \partial F_j / \partial X_k \qquad \text{式（3）}$$

である。また$\mathbf{dX}$は，（n＋1）次元空間における解曲線ξの接線ベクトルである。式（1，2）を用いた解曲線追跡法については，それが変位制御法にもとずく増分反復法の一種であること，そして制御変数として接線ベクトルのなかで，絶対値最大のベクトル成分に対応する変数（最大増分変化を示す変数）を選択していること以外の詳細は割愛する（文献〔3～6，8，9，11〕を参照）。分岐点Bの位置はすでに特定済であるとして，それ以降の分岐経路への移行手続きについて各ステップ毎に解説する。

●step（1）荷重平面の導入：付加的な条件式

$$F_{n+1}=0 \qquad \text{式（4）}$$

によって分岐点Bの近傍で荷重一定の平面を規定する。この荷重平面は意図的に分岐点Bより外れて，これまでの経路上の一点Aと，分岐経路上の一点Dを含むように選ぶのがコツである。具体的には，

$$\lambda-\lambda_A=0 \qquad \text{式（5）}$$

で規定する。規定量λ_Aの選び方は，もし対称安定（不安定）分岐であるとわかっている場合には，分岐点Bの荷重より高い（低い）荷重レベルとする。非対称分岐のときはどちらのレベルでも良い。分岐点近傍において，この荷重平面と解曲線ξとの交点は点A，および点Dとなり，便宜上定義したこの荷重平面内でいかにして点Aより点Dに到るかについては，以下のステップで述べる。

●step（2）解曲線ηの定義：解曲線ξを支配する式（1）のなかで，ある一本の全体方程式

$$F_d=0 \qquad \text{式（6）}$$

と，式（4）とを交換すると，

$$\mathbf{G}=\mathbf{0} \qquad \text{式（7）}$$

によって全く新しい解曲線ηが定義される。ここに，$\mathbf{G}=(F_1, \ldots, F_{d-1}, F_{n+1}, F_{d+1}, \ldots, F_n)^T$である。式（7）の線形化増分方程式は全く式（2）に類似して求められ，

$$[\,\mathbf{g}\,]\,\mathbf{dX}=\mathbf{0} \qquad \text{式（8）}$$

となる。この新しい解曲線ηについて言えることは，既知の点Aと目標とする点Dとがこの同一の解曲線上にあることである。解曲線ηの同じ経路上に点Aと点Dがのっておれば，原則的に点Aを出発点として，式（6）をモニターしながら，全く通常の曲線追跡法で解曲線ηをたどれば，点Dに到ることが可能であり，問題は解けたことになる。しかしこれは，せいぜいひとつの増分幅程度の弧長ADを進むのに，増分反復過程を繰り返す必要があり明らかに不経済である。

●step（3）探査方向：本研究では式（8）を用いて，点Aにおける解曲線ηの接線ベクトル$\mathbf{t}_A$を評価する。この際，式（4）の微分表現が入る［ $\mathbf{g}$ ］の第d行に対応して，第d列にかかかるベクトル成分dX_dを規定し，行と列を適当に交換する操作を行えば〔9〕，接線剛性行列の対称性が確保でき，数値計算上有利である。そしてこの接線ベクトル$\mathbf{t}_A$の指す方向に分岐経路を直線探査する。$\mathbf{t}_A$の方向に真っ直ぐに進んで，分岐経路と荷重平面との交点Dに直接ヒットすることはできなくとも，外れるとも遠からずその近くを通過することはできる（図2）。

●$_{step}$（4）　判定基準：直線探査の間，荷重平面上で系の変位モードは $\mathbf{t}_A$ に限られ，系全体の自由度は単一自由度（弧長ζ）に帰着されることになる。分岐経路（点D）に最接近したことを知らせる判定基準は，$\mathbf{t}_A$ 方向にポテンシャルが停留となる点D’を検出することである。直線探査の弧長ζに関してポテンシャルの停留条件を課すると，

$$d\pi/d\zeta=0 \qquad \text{式（9）}$$

この式の左辺を変形すると，

$$d\pi/d\zeta=(d\pi/d\mathbf{X})(d\mathbf{X}/d\zeta) \qquad \text{式（10）}$$

であり，ここに，

$$(d\pi/d\mathbf{X})=\mathbf{F}^T \qquad \text{式（11）}$$

$$(d\mathbf{X}/d\zeta)=\mathbf{t}_A \qquad \text{式（12）}$$

であるから，式（9）は結局つぎのようになる。

$$\mathbf{F}^T\ \mathbf{t}_A=0 \qquad \text{式（13）}$$

すなわち直線探査方向に変形モードを限定した際のポテンシャルの停留条件は，全体方程式の残差ベクトル $\mathbf{F}$ と，探査方向ベクトル $\mathbf{t}_A$ との直交条件に等しい。出発点Aでは $\mathbf{F}=\mathbf{O}$ であるため，恒等的に式（13）が成り立つが，点A以外に式（13）を満足する点D’を直線探査によって見つける。式（13）の左辺のうち $\mathbf{t}_A$ は一定ベクトルであるから，点Aより出発して逐次残差ベクトル $\mathbf{F}$ を更新しながら，式（13）の左辺を計算し，その符号変化に注意しながら進み停留点D’を検出する。その結果得られるベクトルBD’（図1）が，分岐経路方向を与える最も良い予測ベクトルとなる。ポテンシャルの等高線を用いて，直線探査方向と各点の荷重平面内の位置関係を図2に示した。

●$_{step}$（5）　反復計算：分岐経路近くに位置する点D’からは，反復計算によって分岐経路上の点Dに収束させる。この反復過程では，

$$d\lambda=0 \qquad \text{式（14）}$$

によって荷重変数の補正量をゼロに拘束する。必ずしも荷重平面と分岐経路との交点に収束させる必要がないときは，別の拘束条件（例えば変位制御）のもとで反復計算を実行してもよい。

以上の分岐経路の直線探査では，点Aにおける解曲線ηの接線ベクトル $\mathbf{t}_A$ を評価する時のみに，多元連立方程式の解法を必要とし，直線探査そのものは単なる関数計算に過ぎないため，計算労力が少なくて済む。従来の試行錯誤的なやり方では予測ベクトルの与え方がまずいと，せっかく反復計算（連立方程式の解法の連続）を繰り返しても，もとの経路に逆戻りするか，発散するかのいずれかであった。本法では分岐経路にスムースに移行できる見込みのある予測ベクトルを得るまで反復計算は行わず，その分効率的に分岐経路を探査できる。必要な基礎式は全体・増分方程式のみであり，接線剛性行列の微分項を必要としない。また式（1）～式（14）では分岐点に関する正確な数値情報を必ずしも直接必要としないため（点Aは分岐点の近傍のどこかにあるだけでよい），分岐点の位置を特定する手続きとは切り離して独立に分岐経路を捜すことができる。

$_{step}$（4）で直線探査方向にポテンシャルの停留点D’が検出できないときは，解曲線ηが点A付近で弧長ADに対して相対的に大きな曲率をもっている可能性があるので，このような時は解曲線ηについてオイラー法ないしは，ルンゲ・クッタ法で数値積分により探査方向を改良するのもひとつの対策である（図6a）。

主経路と分岐経路とが分岐点付近で平行に近い状態にあるとき，せっかく点D’を検出しても予測ベクトルBD’はどちらの経路の接線ベクトルをも近似することになる。このようなとき，$_{step}$（5）で点D’より点Dに到るのに，巧みに反復計算を実行しないと分岐経路に移行できない。シェル分岐問題では，この反復計算の際に変位制御により，希望するつり合い経路の方に収束させることができる。このとき制御変数として，$\mathbf{t}_A$ のなかの絶対値最大の成分に対応する変数（変位）をコントロールするのがよい。

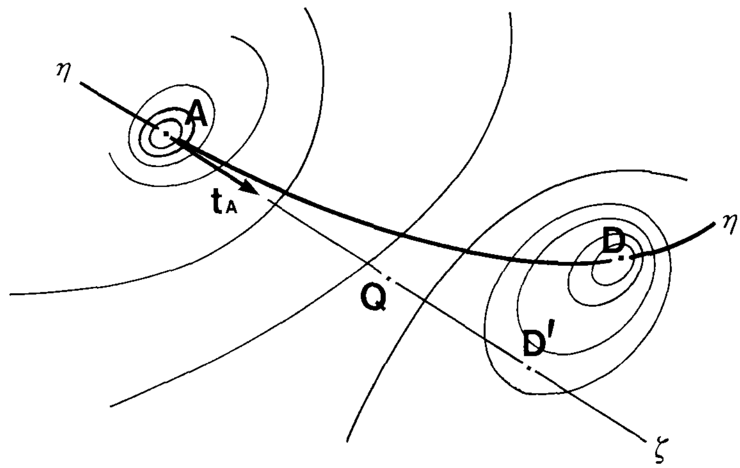


図2　ポテンシャル等高線

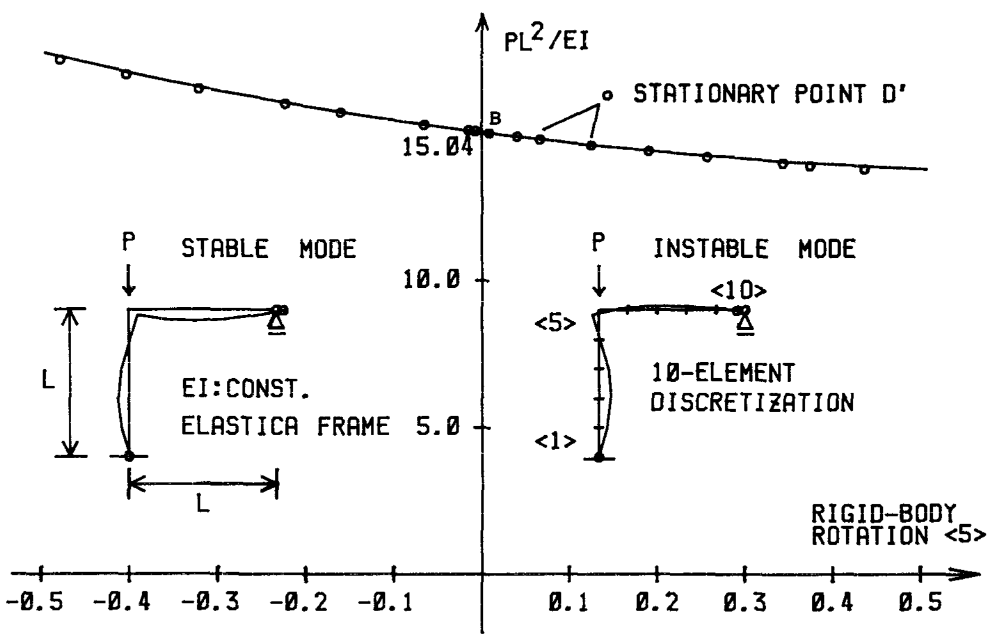
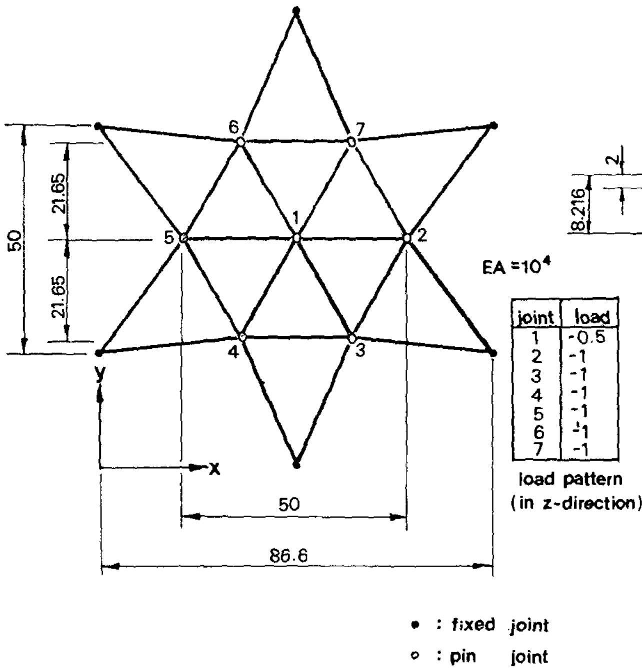


図3　エラスチカ　フレーム
（ピン－水平可動支持）



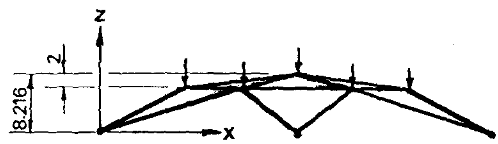


図4　立体トラス

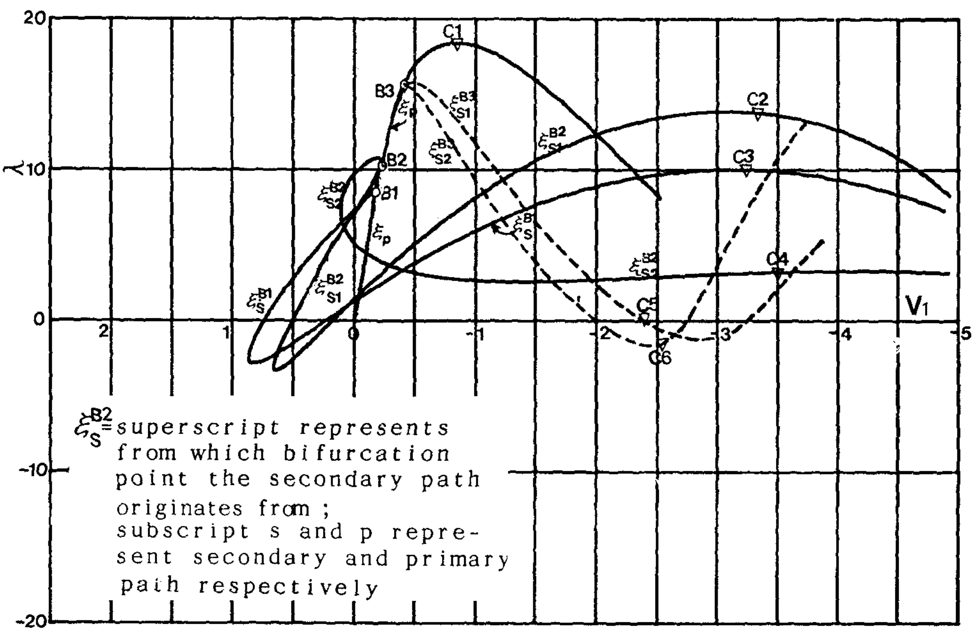


図5　主経路と分岐経路

３． 例題計算

平面骨組（図３）と立体トラス（図４）の分岐問題について，以上の探査方法を試してみた。図３のＬ－型骨組はエラスチカフレームで，その支配方程式の誘導についてはすでに文献〔２，４，５，７〕に紹介してあるので詳細は省略する。立体トラス（図４）については，有限回転角・微小ひずみの仮定のもとで非線形の離散化方程式を導いた。

まずＬ型骨組〔２２〕については十本の直線要素でモデル化し，分岐座屈まで変形がないので主経路は荷重変数軸と一致する。分岐座屈荷重は，$PL^2/EI=15.04$と計算された。このとき柱頂部が，反時計方向に回転するような座屈モードのとき不安定分岐経路，逆に時計方向に回転するとき安定分岐経路となる。図３の横軸に柱頂部の要素＜５＞の部材回転角（剛体回転角）を，縦軸に荷重変数をプロットした。分岐点の手前側に，そして分岐点を越えた側にも種々の荷重レベルについて，式（５）の荷重一定平面を設定し分岐経路の探査を試みた。いずれの場合にも直線探査方向に停留点Ｄ'を検出でき，反復計算の結果，分岐経路に移行できた。図３には停留点Ｄ'の位置と分岐経路との相対関係を２次元平面で示したが，停留点Ｄ'は常に分岐経路の極めて近くに検出でき，結果としてベクトルＢＤ'は分岐方向を与える高精度な予測ベクトルとなっていることがわかる。点Ｄ'を検出後，式（１４）のもとで反復計算を行い，出発点Ａと同じ荷重レベルにある分岐経路上の点Ｄに収束した。この例題では，分岐経路の探査は必ずしも分岐点近傍で行わなくとも，分岐点よりかなり離れた点Ａより探査を開始しても分岐経路をヒットできることが図３からもわかる（もちろんこれは解曲線ηの形状に依り，したがって問題にも依る）。

図４は２１自由度（２２変数）の立体トラスで，節点１に０．５，その他の節点には１．０の鉛直下方荷重を設定した〔１７〕。系が何本もの幾何学的な対称軸を有するため，多枝分岐（multi-branching ）が発生する可能性が高いことがわかる。まず主経路を追跡し，主経路上での分岐点（Ｂ１，Ｂ２，Ｂ３）の位置を特定した〔１０〕。つぎにすでに求めておいた分岐点から分岐経路への移行を試みた。Ｂ１は対称分岐点で，Ｂ２は３本の異なる経路が伸びている非対称分岐点である。対称分岐点であるＢ３からは６本の経路が伸びている。検出した分岐経路を荷重と中央節点１の鉛直変位（上向き正）の平面に投影すると，いくつかの分岐経路が重なってプロットされて図５のようになる。Ｂ１（$\lambda_{B1}=8.6887$）については，Ｂ１よりも低い荷重レベルで探査を行い不安定分岐経路に移行できた。Ｂ２（$\lambda_{B2}=10.2665$）については分岐荷重の上下レベルいずれからも分岐経路を探査できた。ここでの数値実験で注目すべきことは，意外にも単独の探査方向に２つもの停留点が発生することである。これは複数の分岐経路が派生している場合，直線探査で各分岐経路の近くを通過する度に，ポテンシャルがこれに反応して停留値をとるためであり，それぞれの点Ｄ'より別個の分岐経路に移行できることを示すものである。Ｂ３（$\lambda_{B3}=15.6056$）についても同様の結果が得られ，本研究で提案する分岐経路の探査方法が，多枝分岐の場合にも有効に機能することが期待できる。

４． 今後の課題

例題計算での経験をもとに，提案する分岐経路の探査方法をより一般化し，タフな計算戦略とするために，今後の課題をまとめてみるとつぎのようになる。

①± $\mathbf{t}_A$の符号

点Ａで接線ベクトル $\mathbf{t}_A$ を評価したあと，分岐経路のある方向に向かって進まねばならない。しかしＡ→Ｑの向きに進むのか，これと正反対の向きに進むのか，判断できる術がいまのところない。多くの場合工学的視察（分岐モードを予測し，特定の変位成分の変化を検討する）によってもわかるが，一般的には $\mathbf{t}_A$ の前につけるべき符号（±）を合理的に判断する必要がある。単枝非対称分岐の場合は符号の片側方向のみにポテンシャルの停留点Ｄ'を検出する場合が多いが，多枝分岐の場合（±）の両側に同時に直線探査することがポイントである。

②弧長ξの増分方法

停留点D’が直線上のおよそどの辺に位置するのか，その範囲が事前に予測できないため，停留点D’までの弧長ξの大きさの検討がつけにくい。点Aよりなるべく少数のサンプリングポイントを経て，効率的に点D’の位置を計算できないか。ニュートン法などによる場合，点Aに収束させるのではなく，確実に点D’をヒットする工夫が必要である。

③到達した経路の識別

探査の結果到達したつりあい経路が，これまでたどってきたもとの経路であるのか，目標とする分岐経路なのかを判別する最も簡単な方法は，接線ベクトルを比較することであるが，異なる２本の経路が平行に近い場合には判定が困難である。接線剛性行列の分解過程における負対角要素の数をカウントする方法もあるが主経路と分岐経路の間で，また多枝分岐経路の間でも同じ負対角要素の数を記録することもあるので，これだけでは一般性に乏しい。多枝分岐経路の探査（後述）では是非とも合理的な『経路識別子（path-identifier）』が必要である。

④削除すべき全体方程式の選択

分岐経路がうまく探査できるか否かは多分に解曲線ηの形状に依存し，さらに解曲線ηの形状は削除する式（６）の選び方に依存する。簡単な分岐問題の場合には，削除すべき方程式としてどの式をもってきても大差はない。しかし問題により停留点D’が出現しないような探査方向を与える解曲線ηも出てくる可能性がある（図６ｂ）。一般には式（６）の選び方はどうすればよいのか。

⑤他の探査方向との比較

点Aより伸ばすベクトルとして $\mathbf{t}_A$（解曲線ηの点Aでの接線ベクトル）以外にも，$\mathbf{e}_B$（点Bでの接線剛性行列のゼロ固有値に対応する固有ベクトル），$\mathbf{e}_A$（点Aでの接線剛性行列の最小固有値に対応する固有ベクトル，固有値解析が必要）などが考えられる。この三者は分岐点Bの近くでは大差はないが，点Bより離れて撃つ場合には異なってくる。この三方向の比較検討が必要となる。

⑥多枝分岐経路の探査

多枝分岐では［ $\mathbf{f}$ ］のランクがさらに落ちる。多枝分岐経路の接線ベクトルは一般に，これまで追跡してきた主経路の接線ベクトルと，分岐点における接線剛性行列のゼロ固有値に対応する固有ベクトル（複数個ある）との線形結合となり，これら固有ベクトルの長さは全て不定である。例題のなかでは，多枝分岐に対しても本報の分岐経路の探査方法は機能したが，全ての分岐経路をひとつ残らずよりシステマチックに捜し出すアルゴリズムの開発が今後の大きな課題である。

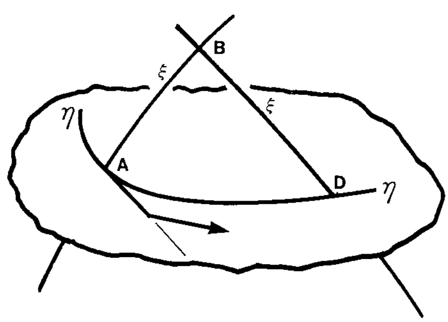


図６ａ　点A付近で曲線ηの曲率が大きく，探査方向を進むにつれ分岐経路から遠く外れてしまう場合
⇒オイラー法，ルンゲ−クッタ法で探査方向を修正する。

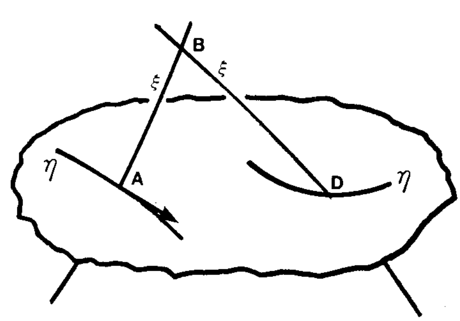


図６ｂ　点Aと点Dは確かに同じ曲線η上にあるが，別々の分枝にある場合

図６　解曲線ηの形状

５. まとめ

骨組構造系を中心に，対称分岐・非対称分岐のいずれにも応用できる分岐経路の探査方法を提案した。本法は，せいぜいポテンシャルの２階微分（線形化増分方程式）までを必要とし，３階微分などの高次項を必要としないことが特徴である。この点については例えば細野〔１２〕の姿勢と共通している。細野の研究と異なる最大の点は，点Ｂより離れた点Ａから分岐経路を狙い撃ちする際に，分岐点での接線剛性行列のゼロ固有値に対応する固有ベクトル方向に射るのではなく，解曲線ηの概念を導入して，その接線ベクトルを採用していること，それに直線探査における判定基準として式（１３）を採用していることである。より一般的でタフな計算戦略とするためには今後の課題も多いが，これまで計算した分岐問題では，何ら本質的な問題もなく分岐経路を探査できた。これからは多枝分岐問題が大きな課題である。特にシェルの分岐問題は興味あるテーマであるが，これについては別の機会に発表予定である。

謝辞

本研究には，第一著者が１９９０年８月～９月の２ヶ月間，ＤＡＡＤ（ドイツ学術交換会）の招聘でハノーバー大学・構造力学計算力学研究所において短期滞在した際の成果が含まれている。この間，P. Wriggers教授(Darmstadt)，E. Ramm教授(Stuttgart)，それにE. Stein教授(Hannover)には研究でお世話になった。特にDr.-Ing. W. Wagnerとは，実際のシェル分岐問題の計算について有意義な共同研究ができたことに感謝する。また本研究は，日本政府（文部省）奨学生である第２著者の修士論文の内容も多く取り入れたものである。

参考文献

〔１〕Choong, K.K./Fujii, F.,"Line search for asymmetric bifurcation path of elastic structures" Proc. of Symp. on Comp. Meth. in Struc. Eng. and Related Fields, vol. 14, 1990, 73-78

〔２〕Fujii, F./Gong, S.X., "Field transfer matrix for nonlinear curved beams", ST, ASCE, Vol. 114, No. 3, 675-692, 1988

〔３〕Fujii, F./Usuda, Y., "Stiffnes formulation of planar kinematics", EM, ASCE, Vol. 117, No. 3, 1991 (to be published)

〔４〕Fujii, F. "Scheme for elasticas with snap-back and looping", EM, ASCE, Vol. 115, No. 10, 2166-2181, 1989

〔５〕Fujii, F./Naito, M./Gong, S.X.,"Finite displacement theory of straight beam under configuration-dependent uniform loads", Computers & Structures, Vol.36, No.1, 1990, 157-167

〔６〕Fujii, F. "Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic structures", 2nd World Congress on Computational Mechanics, 1990, Stuttgart, 303-306

〔７〕Fujii, F. "A simple mixed formulation for elastica problems", Computers & Structures, Vol. 17, 79-88, 1983

〔８〕藤井文夫，" 非線形増分方程式の解法のための篠原法について"，構造工学論文集, Vol. 35A, (1989年３月)，195-202

〔９〕藤井文夫，鍾国強，" 非線形弾性構造系を変位増分法で追跡する際の制御変数の選択について"，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第14巻，1990年，79-84

〔10〕藤井文夫，" 骨組構造系のつり合い経路上の分岐点の探査方法"，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第13巻，1989年，395-400

〔11〕藤井文夫, ” アーチのルーピングつり合い曲線の追跡に見る篠原法について”, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第12巻, 1988年, 449-454
〔12〕細野 透,”弧長法による弾性座屈問題の解析（その１；座屈点における増分解の性質, その２；数値解析方法としての弧長法）”, 日本建築学会論文報告集, 第２４２号, 昭和51年４月, 41-49, 日本建築学会論文報告集, 第２４３号, 昭和51年５月, 21-30
〔13〕西野文雄, ”6 連続体の力学（Ⅱ）”, pp.323-335, 彰国社版, 1976 年
〔14〕Waszczyszyn, Z. "Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures" Computers & Structures, Vol. 17, No.1, 13-24, 1983
〔15〕Kouhia, R./Mikkola, M.,"Tracing the equilibrium path beyond simple critical points", Int. J. for Numerical Meth. in Engineering, Vol. 28, 2923-2941, 1989
〔16〕Riks, E.,"Bifurcation and stability, a numerical approach", Proc. of Int. Conf. on Innovative Methods for Nonlinear Problems, Swansea, 1984, 313-344
〔17〕Nishino,F. et al., "A total Lagrangian nonlinear analysis of elastic trusses", Proc. of JSCE., No. 344/I-1, 39-53, April 1984
〔18〕Wagner, W./Wriggers, P.,"A simple method for the calculation of postcritical branches", Engineering Computation, 1988, Vol.5, June, 103-109
〔19〕Wriggers, P./Simo, J.C.,"A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points", Int. J. for Numerical Meth. in Eng., Vol. 30, 155-176, 1990
〔20〕Wriggers, P./Wagner, W./Miehe, C., "A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70(1988), 329-347
〔21〕Allman, D.J.,"Calculation of the stable equilibrium paths of discrete conservative systems with singular points", Computers & Structures, No. 5, 1045-1054, 1989
〔22〕Bazant, Z.P./Cedolin, L., "Initial postcritical analysis of asymmetric bifurcation in frames", ST. ASCE., Vol. 115, No. 11, 1989, 2845-2857
〔23〕Mittelmann, H.D./Weber, H.(editor), "Bifurcation problems and their numerical solution", ISNM 54, Workshop on Bifurcation Problems and their Numerical Solution, Dortmund, January 15-17, 1980, Birkäuser
〔24〕Keller, H. B., Lectures on "Numerical Methods in Bifurcation Problems", TATA Insitute of Fundamental Research, BOMBAY, 1987, Springer, 155 pages
〔25〕Kröplin, B./Dinkler, D./Hillmann, J., "An energy perturbation applied to nonlinear structural analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 52, 1985, 885-897
〔26〕藤井文夫／北川竜三, ” エラスチカ問題の経路追跡方法と経路切りかえ方法”, 京都大学数理解析研究所講究録, 共同研究『連立非線形方程式の大域における数値解法とその応用』, 1990年11月

(1990年10月12日受付)