

長 径 間 吊 橋 の 立 体 有 限 変 位 解 析

THREE-DIMENSIONAL FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS
OF LONG-SPAN SUSPENSION BRIDGES

林 正*・前田研一**・増井由春***・内海 靖****・山野長弘*****

By Masa HAYASHI, Ken-ichi MAEDA, Yoshiharu MASUI, Yasushi UCHIUMI
and Nagahiro YAMANO

A numerical method for the finite displacement analysis of long-span suspension bridges is proposed. At the structural analysis of suspension bridges, the following special calculations not used in the ordinary matrix method are required: the initial stress and configuration analysis for main cables and towers under dead load. Furthermore, it is necessary to consider the structural models for the overall system and the local skeleton. For these purposes, a program for finite displacement analysis of suspension bridges as well as general spatial frames is developed and some numerical calculations are carried out.

1. 緒 言

本州四国連絡橋における吊橋の歴史は、因島大橋（中央径間長 770m, 1983年完成）に始まり、大鳴門橋（同 876m, 1985年完成）、下津井瀬戸大橋、北備讃瀬戸大橋、南備讃瀬戸大橋（同 940m, 990m, 1100m, 1988年完成）へと続いて、着実に長大化の道を歩んできた。さらに、1986年4月には明石海峡大橋が着工され、1996年の完成に向けて、現在、下部工および主塔工事が進められている。本橋が完成すれば、中央径間長2000m級の世界最長の長大吊橋が出現し、わが国の吊橋技術は世界の最高峰に達することになる。

このような長大化の歴史の下、吊橋の補剛トラスの設計、架設計算に適用される解析法も大きく変遷してきた¹⁾。平面解析についていえば、それらの計画段階では、吊橋固有の古典的理論である撓度理論に基づく解析法が主流であり、有限変位理論に基づくマトリックス骨組解析法²⁾を適用し、吊橋を連続体としてではなく離散系の骨組構造として解析することも行われ始めていたが、主に架設検討³⁾に対してであった。その後、因島大橋、大鳴門橋では、補剛トラスを等価な梁に置換した骨組モデルに対する線形化有限変位解析法が設計計算の主流となり、この時点で撓度理論によるものは一般に試算計算のみに使用されるようになった。次に、下津井、北備讃および南備讃瀬戸大橋の段階では、補剛トラスを忠実にモデル化した骨組モデルを対象とした有限変位解析法が、架設計算はもちろん、設計計算においても中心的な位置を占めるようになった。実用面では、これ以上の解析法の進展は考えられず、今後、明石海峡大橋においても同様の状態であると思

*	工博	長岡技術科学大学教授	工学部建設系	(〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)
**	工博	川田工業(株)技術本部中央研究室長		(〒114 東京都北区西ヶ原3-45-4)
***		長岡技術科学大学技官	工学部建設系	(〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)
****		川田工業(株)技術本部技術部長大橋課		(〒114 東京都北区西ヶ原3-45-4)
*****	工修	川田テクノシステム(株)	大阪支社	(〒550 大阪市西区北堀江1-22-9)

われる。

これらの平面解析法の変遷は、工事規模の大きさから、より厳密な解析法を適用してより経済的な断面構成とすることによって工費のかなりの低減が期待されたことが、大きな要因であった。また、平面骨組構造物の有限変位解析法は早くから確立されていたにもかかわらず、吊橋の設計計算において中心の位置を占めるまでに時間を要したのは、千自由度を超える非線形問題のマトリックス演算を高精度で高速に処理する必要があることから数値計算ソフトの整備、および、大型コンピュータの普及を待たなければならなかったこともあるが、膨大な量の入出力データの処理問題が最も大きな要因であった。入力データに関しては、非常に多くの部材、節点に関するデータ、および、吊橋特有の設計条件を満足させるための初期形状決定に関するデータなども処理する必要がある一方、出力データに関しては、多くの部材の荷重組合せ別の断面力の集計を始めとして設計に必要な全てのデータを処理する必要があるからである。この問題は、コンピュータ周辺装置、特に図化機能の進歩により解決され、前、後処理プログラムの整備によって、入力データの自動作成、省力化が図られるとともに、出力データとして設計図書にそのまま使用できる日本語表示の集計図表の自動作成も可能となって、ようやく設計計算法としての地歩を固めるに至ったのである。

他方、立体解析については、設計における寄与度が高くないこと、および、平面解析とは比較にならない多自由度の解析となることなどから、解析法の変遷は急激とはいえず、南備讃瀬戸大橋までの段階でも線形化有限変位解析法を適用している。解析モデルは、補剛トラスをほぼ忠実にモデル化したものを適用した場合もあるが、等価な梁に置換した骨組モデル（いわゆる魚骨モデル）を用いるのが一般的であった。しかも、解析プログラムは、平面解析の場合のようにその使用者が独自に開発したものではなく、NASTRAN、および、SAPなどの汎用プログラムと連動させたものがほとんどであった。この理由は、数万自由度に及ぶ大容量の演算を行うためには、当時はまだ汎用プログラムの数値計算技法に頼る必要があったからである。

その後、明石海峡大橋の施工計画が具体化した以後に、立体魚骨モデルによる有限変位解析結果が報告され始めたが、同様に、MSC/NASTRAN、および、COSMOSなどの汎用非線形解析プログラムによるものが適用されている。最近のコンピュータ技術の進歩は、平面解析プログラムのみならず、これらの汎用立体解析プログラムについてもパソコンやワークステーションでの使用を可能とし、プログラムの使用環境が大きく改善されている。これにより、長大吊橋の補剛トラスの設計、架設計算における立体解析に対する有限変位解析法の適用の可能性は、かなり高くなったといえる。

汎用プログラムの最大の長所は、入力仕様書に従えば大規模な非線形構造解析を適用可能な範囲において比較的容易に実行でき、膨大な入出力データについても適切な前、後処理プログラムを開発して連動させればよく、開発リスクなしに最小限の開発コストで設計計算への適用が可能になるということである。しかしながら、その最大の短所は、多くの場合、解析理論の内容が明確でなく、ブラックボックスになっている部分が少なくないことであり、例えば、過去の解析結果において、特に架設系の解析などで収束性の極端に悪い例や発散した例などが報告されているが、そのような場合に対処できる方法には制約と限界を伴うことは避けられない。また、同じ架設系の解析においても、解体計算によって架設ステップを順に追った解析計算を連続的に実行することは、汎用プログラムでは困難である。さらに、特殊な剛性や、適合条件、および、境界条件を有する部材をモデル化して解析するような場合には、汎用プログラムに新たな理論式を組込むことは一般の使用者には困難であり、適用範囲を外れると対処の方法がないことになる。

したがって、今後、設計計算における立体解析への有限変位解析法の適用の可能性をより確実にするためには、使用者が独自に開発し、その解析対象や解析目的の変化に応じて改良を加えることができる解析プログラムの存在が必要不可欠であり、これと汎用プログラムによるものとを併用して比較、検討していく中で種々の問題点が解決されていくものと思われる。現在では、数万自由度に及ぶ大容量の演算処理は容易とはいえないまでも、不可能なことではなくなっているにもかかわらず、この種の解析プログラムの開発に関する報告は、著者らの知る限りではみられない。

このような観点から、著者らは、補剛トラスを忠実に立体トラスモデルに置き換えた全橋モデルを対象とした場合においても、明石海峡大橋級の長径間吊橋の有限変位解析をパソコン、あるいは、ワークステーションで計算できる解析プログラムを独自に開発した。このプログラムには、通常の初期形状決定計算法に加えて、主塔を忠実にモデル化するために新たに必要となった初期形状決定のための反復計算法を組込む一方、

安定な収束性を確保するためには、有限回転を考慮した解析法^{(1)・(5)}を適用することとし、より一般的な形で解式を誘導し直して組込んだ。また、ウィンドシューは数万tonに及ぶ暴風時の風荷重の大部分を支持することから、モデル化の手法によっては、局部的に大きな不平衡力を生じたり効率の悪い演算を必要とするが、このウィンドシュー部材のモデル化に関連し、非線形解析における従属節点の処理のための厳密な計算式も新たに誘導して組込んだ。さらに、架設ステップを順に追った解体計算による連続的な架設計算を実行できる機能、補剛トラスを立体魚骨モデルに置き換えた場合でも各トラス部材の断面力として出力できる機能、および、ウィンドシュー部材のモデル化にあたっては実用的な簡易法も選択できる機能などの各種機能を付与した。

本論文は、上述の反復計算を含む初期形状決定計算法、有限回転や従属節点を考慮した立体有限変位解析法、および、トラス部材やウィンドシュー部材のモデル化の手法などについて述べ、長径間吊橋の完成系、架設系での有限変位解析への適用を提案するものである。さらに、これらの計算法、解析法、および、モデル化の手法を組込んで開発した解析プログラムを、明石海峡大橋の計画段階での諸元を参考とした各種モデルを対象として適用し、解析結果の比較、考察から、解析計算法の妥当性、および、解析プログラムの有効性を検証するものである。

2. 初期形状決定

吊橋の解析では、死荷重時における特有の設計条件を満足させるための初期形状が事前に決定されなければならない。この初期形状決定は、主ケーブル等については、平面解析の場合と同様に解析的に計算されるが、主塔については、塔面内の部材構成や塔柱の傾斜などを忠実にモデル化する場合、反復計算による必要がある。以下に、吊橋特有の設計条件、および、立体解析における初期形状決定計算法について述べる。

(1) 設計条件⁽⁶⁾

吊橋特有の設計条件は、一般に次のようなものであり、非対称、および、連続支持の場合にも適用できる。

- ①補剛トラスは、死荷重時に、所定の完成形状となり、その状態で応力を生じない。ただし、死荷重を主構トラスの上、下弦材の格点に配分して載荷する場合には垂直材に、さらに、横トラスの上、下弦材の格点に分割して載荷する場合にはその各部材にも、軸力が発生することになる。
- ②ハンガー、および、タワーリンク、エンドリンクは、補剛トラスの死荷重を全て担い、その状態で鉛直である。
- ③中央径間の主ケーブルはハンガーが分担した補剛トラスの死荷重の全てを担った状態で、中央点における所定の完成時のサグ f_c を満たし、張力の橋軸方向成分 H_w は塔頂において側径間のそれと等しい。
- ④主塔は、死荷重時における中央径間、側径間の主ケーブル張力の塔頂での鉛直成分 V_c 、 V_s 、および、タワーリンクの軸力が作用した状態で、所定の完成形状を満たし橋軸直角方向の鉛直面内に位置する。したがって、その状態で、塔基部反力と構成部材の断面力の橋軸方向成分は零である。

なお、これらの条件では、ハンガーや、リンク類、および、主ケーブル、主塔の死荷重についても厳密に考慮されていることはいうまでもない。

(2) 主ケーブルの初期形状決定⁽⁷⁾

主構トラスの垂直材や、ハンガー、および、リンク類の各部材の初期形状決定は、死荷重時の初期軸力から逆算して無応力長を算定することであり、ここでは説明を省略する。これに対して、主ケーブルの初期形状決定は、設計では所定の完成時サグ f_c が与えられるのみであることから、まず、完成形状に対応する各節点の座標値、および、その状態での各部材の初期張力を求める必要があり、これらの値を用いて逆算により各部材の無応力長を算定することになる。そこで、この完成形状に対応する各節点の座標値、各部材の初期張力の求め方について、次に説明する。なお、各部材の無応力長は、それぞれ製作長に対応するものである。

図-2.1において、最初に中央径間に着目すれば、各節点の橋軸方向、および、橋軸直角方向の座標値は容易に求められることから、主ケーブルの左、右端の節点（塔頂）と所定のサグ f_c を与えられた節点の3節点における橋軸方向の鉛直面内の力の釣合い条件によって、両端の部材の張力の橋軸方向成分 H_w 、およ

び、鉛直成分 $V_{c,l}$ 、 $V_{c,r}$ の値が求められる。したがって、中間の各節点には鉛直荷重のみが作用し、 H_w は各部材について一定であることから、各部材の張力の鉛直成分、および、各節点の鉛直座標の値は釣合い条件によって両端から順次に求められ、各部材の初期張力、完成形状が算定されることになる。

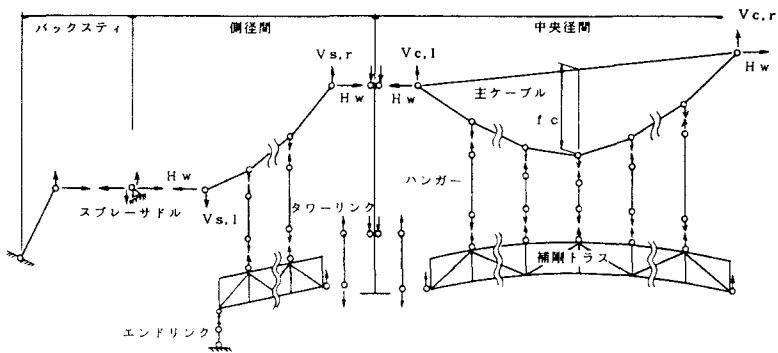


図-2.1 主ケーブルの初期形状決定

他方、側径間については、各部材の張力の橋軸方向成分 H_w は中央径間と共通であり、左、右端の節点（一端は塔頂）における橋軸方向の鉛直面内での釣合い条件から、両端の部材の張力の鉛直成分 $V_{s,l}$ 、 $V_{s,r}$ の値が求められる。そして、中央径間と同様にして、各部材の張力の鉛直成分、および、各節点の鉛直座標の値が求められ、各部材の初期張力、完成形状が算定されることになる。また、一端の節点にスプレーサドルが設置されている場合には、サドル上での支持方向を考慮した釣合い条件から、バックステイケーブルの初期張力を求めればよい。

（3）主塔の初期形状決定

主塔の初期形状決定は、主ケーブル等のそれとは全く異なり、中央、側径間側の主ケーブル張力の鉛直成分 $V_{c,l}$ 、 $V_{c,r}$ および、タワーリンクの軸力 $N_{L,c}$ 、 $N_{L,s}$ が作用した状態で設計時に定められた所定の完成形状となるような無応力形状を算定することであり、前述のように反復計算を必要とする。なお、この無応力形状は、製作形状（キャンパー）に対応するものである。

例えば、図-2.2に示す例では、一基の主塔はブレース材のある固定門形ラーメンとなるために、各荷重成分によって、固定端反力と各部材の断面力に橋軸直角方向（塔面内）のせん断力と橋軸回りの曲げモーメントが生じる。これにより、各部材は伸縮と曲げ変形を受けることから、次のような反復計算によって無応力形状に対する各節点の座標値を求めなければならない。

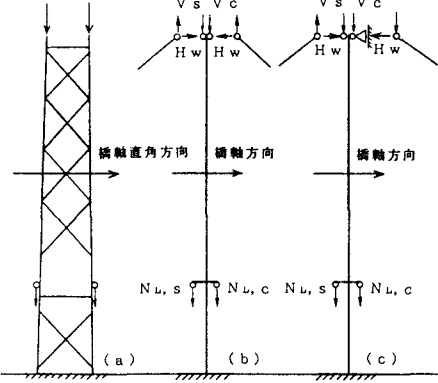


図-2.2 主塔の初期形状決定

すなわち、まず、橋軸直角方向の鉛直面内に所定の完成形状で位置する主塔のみのモデルに対し、図-2.2 (a)に示したように、各部材の死荷重に加えて主ケーブル張力の鉛直成分やタワーリンクの軸力を荷重として作用させ、有限変位解析を行う。計算された各節点の変位を用いて座標値を修正し、無応力形状の座標値を仮定する。この仮定値を用いて再び有限変位解析を行い、変形後の各節点の座標値と完成形状のそれとの差異が許容値内に収まるまで、同様の計算を反復する。

この反復計算を伴う主塔の初期形状決定計算法において、数値計算上で注意すべきことは、主ケーブルを取除き塔頂を自由端にした図-2.2(b)の状態では計算する場合、不安定領域での有限変位解析を行わなければならないことである。これは、実際の架設段階では有り得ないことであるが、数万tonに及ぶ主ケーブル張力の鉛直成分が橋軸方向の鉛直面内では片持ち梁の状態にある主塔に対して座屈荷重を超えるからである。それゆえに、安定した収束計算には12～13桁の有効桁数を確保する必要がある一方、中央径間と側径間のタ

ワーリンクの軸力に微小な差異がある場合には、それを相殺する仮定の荷重を載荷しておかなければならない。そうしなければ、僅かな荷重の差が初期不整を与えたのと同様の結果を生じさせ、変位が増大して座標値は収束しなくなる。

したがって、実際の初期形状決定計算では、図-2.2(c)に示したように、塔頂で橋軸方向の変位を仮に拘束したモデルを対象として同様の反復計算を適用するのが実用的である。中央径間と側径間のタワーリンクの軸力に微小な差異がある場合には塔頂に極く僅かな量の橋軸方向の反力を生じることになるが、それが全体構造解析に及ぼす影響は、実際問題では無視できる量である。

3. 立体有限変位解析法

(1) 有限変位解析

有限変位解析には有限回転を考慮した解法⁴⁾を用い、これに以下のような改良を加えて、より一般的な形で解式を誘導し直した。

本手法では、有限回転を合成するために回転行列 R を用いているが、この行列と節点回転角の3成分 θ_i との厳密な関係式を求める。ある空間ベクトル ϕ まわりの回転角を α とすると、剛体の回転に関するオイラーの定理から、回転行列 R の (i, j) 要素 r_{ij} は次式で与えられる^{4), 5)}。

$$r_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + \phi_i \phi_j (1 - \cos \alpha) - \varepsilon_{ijk} \phi_k \sin \alpha \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここに、 ϕ_i は回転中心軸 ϕ の方向余弦、 δ はクロネッカーのデルタ、 ε は交代記号で、 i, j, k はこの順序で1, 2, 3をとるものとする。

式(1)を正接の半角で表わし、これに文献5)で求めた次式

$$\tan(\theta_i/2) = \phi_i \tan(\alpha/2) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

を代入すると、 r_{ij} の式が得られる。

$$r_{ij} = \frac{2}{1 + \tan^2(\alpha/2)} \left(\delta_{ij} + \tan \frac{\theta_i}{2} \cdot \tan \frac{\theta_j}{2} - \varepsilon_{ijk} \cdot \tan \frac{\theta_k}{2} \right) - \delta_{ij} \quad (3)$$

ここに、

$$\tan^2(\alpha/2) = \sum_{i=1}^3 \tan^2(\theta_i/2) \quad (4)$$

次に、 r_{ij} と θ_i の逆の関係式を求める。そこで、公式

$$\sin x = \frac{2T}{1+T^2}, \quad \cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2} \quad (T = \tan \frac{x}{2})$$

に式(2)を代入し、式(1)を用いると θ_i の式が得られる。

$$\sin \theta_i = \frac{r_{ij} + r_{kk}}{1 + r_{ii}}, \quad \cos \theta_i = \frac{r_{kj} - r_{jk}}{1 + r_{ii}} \quad (r_{ii} \neq -1) \quad (5)$$

なお、 $r_{ii} = -1$ の場合には $\alpha = \pm \pi$ となるので、構造解析ではこのような回転を考える必要はない。

数値計算では、式(3)の r_{ij} を用いた回転行列の積により有限回転を合成し、合成された回転角は式(5)から求める。したがって、 α と ϕ_i を計算する必要はない。

変位後の部材座標系を求める際は、従来より、変形後の断面主軸の方向を一意的に決定するために、部材

両端のねじれ角は絶対値が等しく符号が反対になるように決めていた⁴⁾が、ここでは、部材のねじれ角の変位関数 $\phi(\xi)$ に用いていた1次式の代わりに次式の形状関数 $N(\xi)$ を用いる。

$$\phi(\xi) = N(\xi)(\phi_b - \phi_a), \quad N(\xi) = \xi - 1/2 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (6)$$

ここに、 $\phi_a, \phi_b (= -\phi_a)$ は部材端 a, b のねじれ角、 ξ は正規座標である。

式(6)の変位関数は、座標変換の手法と整合するだけでなく、ひずみエネルギーに含まれる ϕ に関する非線形項をすべて相対ねじれ角で表わすことができる。

また、文献4)では、棒部材の厳密な変位場を線形化する際に、たわみ角(断面主軸 y, z まわりの回転角)に線形の値を用いたために2次の非線形項の係数に違いが生じた⁵⁾が、ここでは、式(6)と、文献5)に示した2次の非線形項まで正確な変位場を用いて剛性行列を求めた。なお、並進変位 u, v, w の形状関数には通常の多項式を用いている。

以上の改良を行って、リブアーチの座屈後の解析に適用した結果では、かなりの改善が認められた。計算結果は、省略するが、式(6)を用いたことの効果が大きく、解の収束性が良くなった。

(2) 従属節点

汎用の構造解析プログラムには通常、従属節点の処理が組み込まれている。その計算式が不明なプログラムもあるが、調べた限りでは非線形解析のための厳密な計算式は見受けられなかった。従属節点は、後に説明するウィンドシュエのモデル化に関係するので、非線形解析の式を示しておく。

従属節点とは、周知のように、その変位成分が、他の独立節点の変位成分と従属関係にある。そこで、従属節点の並進変位と回転のそれぞれ3成分を u_s, θ_s 、独立節点のそれらを u_p, θ_p で表わすと、剛体力学から次の従属関係式が得られる。

$$u_s = u_p + [R_p - E] r_s \quad (7, a)$$

$$\theta_s = \theta_p \quad (7, b)$$

ここに、 $R_p (= R_s)$ は点 P の回転行列、E は3次の単位行列で、 r_s は、図-3.1に示す点 P に対する点 S の位置ベクトルである。

数値計算では、式(7)を構造全体の接線剛性行列に用いて点 S のの自由度を消去しなければならないが、式(7, a)は θ_p に関して非線形である。そこで、式(3)を用いて線形化すると次式が得られる。

$$[R_p - E] r_s \approx [H_s] \theta_p \quad (8)$$

ここに、

$$[H_s] = \begin{bmatrix} (\theta_y \bar{Y} + \theta_z \bar{Z})/2 & \bar{Z} - \theta_y \bar{X}/2 & -\bar{Y} - \theta_z \bar{X}/2 \\ -\bar{Z} - \theta_x \bar{Y}/2 & (\theta_x \bar{X} + \theta_z \bar{Z})/2 & \bar{X} - \theta_z \bar{Y}/2 \\ \bar{Y} - \theta_x \bar{Z}/2 & -\bar{X} - \theta_y \bar{Z}/2 & (\theta_x \bar{X} + \theta_y \bar{Y})/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\theta_p = \{\theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T \quad (10, a)$$

$$r_s = \{\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}\}^T = \{X_s - X_p \quad Y_s - Y_p \quad Z_s - Z_p\}^T \quad (10, b)$$

式(8)を式(7)に代入すると、線形化された従属関係式は次のように表される。

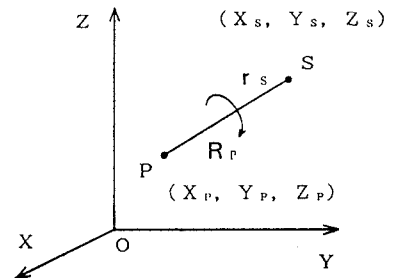


図-3.1 従属節点と独立節点

$$\left\{ \begin{matrix} u_s \\ \theta_s \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} E & H_s \\ O & E \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_p \\ \theta_p \end{matrix} \right\} \quad (11)$$

ここで、式(9)の非線形項の θ_i を省略すると線形関係式が得られる。この式は、オフセットビームの計算にも用いられている⁸⁾。

数値計算では、自由度の消去に関して縮約の手法を用いる⁹⁾。なお、非線形計算の基本的な手法から、式(11)を用いて得られた値を厳密な式(7)で修正する。

(3) プログラム

データの入力方法については、数千に及ぶ節点と部材に関するデータの入力作業の省力化のため、種々の自動生成機能を設けた。また、入力データをチェックするルーチンや、図化機能を応用して、入力ミスによる誤計算を可能な限り排除できるようにした。

主ケーブル等の初期形状決定計算は解析的であるのでプログラムを分離することも出来るが、入力作業などの数値計算全体の効率性から、主塔の初期形状決定のための反復計算法とともにマトリックス法のプログラム¹⁾に組み込んだ。なお、計算式は、非対称吊橋にも適用できる一般的な手法である。

また、任意の架設系に対処するために、完成系より除去する部材、および、節点をそれぞれダミー部材、および、ダミー節点とすることによって処理し、解体計算により完成系からフリーケーブル状態までの各架設ステップを順に追った解析計算を連続的に実行できるようにした。

全体構造の有限変位解析では、吊橋を計算するための特別な式は用いていないが、異なった節点自由度（トラス部材やケーブル部材のみが結合する3自由度節点と、梁部材が結合する6自由度節点）を持つ骨組構造の計算では、必要な自由度のみを用いて計算するアルゴリズムを使用している。この手法により、吊橋の計算では、バンド幅も狭くなるので、メモリの節約と、特に計算時間の短縮に著しい効果がある。

さらに、通常の橋梁構造物では計算値に有限回転による影響が現れる程の変形は起きないが、回転行列を用いる解法は非線形計算の安定性に優れており、解の収束性が良くなる長所がある。したがって、多くの部材、節点を一度に除去した場合の架設計算のように、不安定な状態での非線形計算の収束性を確保するのには有効である。

4. 部材のモデル化の手法

(1) 魚骨モデルへの変換^{10), 11)}

実際の設計において常に補剛トラスを忠実にモデル化した解析を行う必要はなく、目的に応じて、それを等価な梁で置換した魚骨モデルで解析する場合も考えられる。このような場合には、次のような換算式を用いて剛度変換、および、断面力変換を行わなければならない。これらの換算式は断面が剛の仮定によっているが、次章の数値計算例では、その妥当性、および、適用限界についても考察する。

i) 剛度変換（全橋換算）

魚骨モデルの断面積、面内、面外の断面2次モーメント、および、純ねじり定数は、図-4.1の記号を用いて次式で換算される。

$$\left. \begin{aligned} \text{断面積} & A = 2(A_u + A_l) \\ \text{断面二次モーメント(面内)} & I_v = \frac{2A_u \cdot A_l}{A_u + A_l} h^2 \\ \text{断面二次モーメント(面外)} & I_{II} = \frac{A_u + A_l}{2} b^2 \\ \text{純ねじり定数} & J = \frac{1}{G} \times \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、

A_u, A_l : 補剛トラスの上、下弦材の断面積

A_d, A_b : 補剛トラスの斜材、横構の断面積

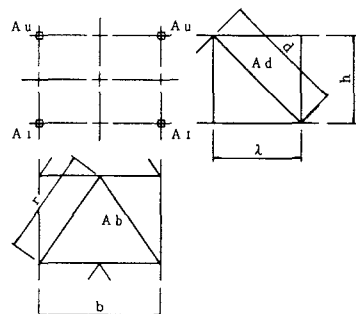


図-4.1 補剛トラスの部材構成

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= G \cdot (t_1 \cdot b + t_2 \cdot h) \cdot \frac{bh}{2}, \quad b_2 = G \cdot (t_1 \cdot b - t_2 \cdot h) \cdot \frac{bh}{2} \\ t_1 &= \frac{E}{G} \times \frac{A_d \lambda h}{d^3}, \quad t_2 = \frac{E}{G} \times \frac{A_b \lambda b}{2r^3} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ii) トラス断面力の変換

魚骨モデルによって得られた面内断面力は、図-4.2の記号を用いて、次式で各トラス部材の軸力に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \text{上弦材軸力} \quad N_{u1} &= N_{u2} = -M_{j2}/h \\ \text{下弦材軸力} \quad N_{l1} &= N_{l2} = M_{j3}/h \\ \text{斜材軸力} \quad N_{d1} &= -S_{j1} \cdot d/h \\ N_{d2} &= S_{j3} \cdot d/h \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 M_{j2} 、 M_{j3} 、および、 S_{j1} 、 S_{j3} は格点 j_1 、 j_2 、 j_3 における曲げモーメント、せん断力である。

また、面外断面力については、図-4.3に示す主構パネルの4タイプに対して表-4.1のように変換される。

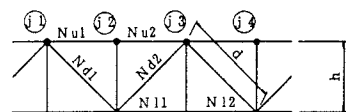


図-4.2 各トラス部材の面内断面力

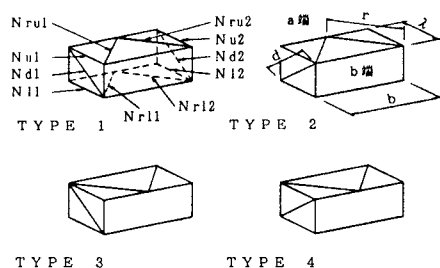


図-4.3 主構パネルのタイプ

表-4.1 各トラス部材の面外断面力の変換式

	上弦材軸力		下弦材軸力		斜材軸力		上横構軸力		下横構軸力	
	N_{u1}	N_{u2}	N_{l1}	N_{l2}	N_{d1}	N_{d2}	N_{ru1}	N_{ru2}	N_{rl1}	N_{rl2}
TYPE 1	$\frac{M_{ya}}{2b} - \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$\frac{M_{yb}}{2b} + \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$\frac{M_{ya}}{2b}$	$-\frac{M_{yb}}{2b}$	$\frac{d}{h} \cdot S_d$	$-\frac{d}{h} \cdot S_d$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$
TYPE 2	$\frac{M_{ya}}{2b}$	$-\frac{M_{yb}}{2b}$	$\frac{M_{ya}}{2b} + \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$-\frac{M_{yb}}{2b} - \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$-\frac{d}{h} \cdot S_d$	$\frac{d}{h} \cdot S_d$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$\frac{d}{h} \cdot S_{bl}$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$
TYPE 3	$-\frac{M_{ya}}{2b}$	$\frac{M_{yb}}{2b}$	$-\frac{M_{ya}}{2b} - \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$\frac{M_{yb}}{2b} + \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$\frac{d}{h} \cdot S_d$	$-\frac{d}{h} \cdot S_d$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$
TYPE 4	$\frac{M_{ya}}{2b} + \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$\frac{M_{yb}}{2b} - \frac{T}{2bh} \cdot \lambda$	$-\frac{M_{ya}}{2b}$	$\frac{M_{yb}}{2b}$	$-\frac{d}{h} \cdot S_d$	$\frac{d}{h} \cdot S_d$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bu}$	$-\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$	$\frac{r}{b} \cdot S_{bl}$

ここに、

N_{u1} , N_{u2} , N_{l1} , N_{l2} : 補剛トラスの上, 下弦材軸力
 N_{d1} , N_{d2} : 補剛トラスの斜材軸力
 N_{ru1} , N_{ru2} , N_{rl1} , N_{rl2} : 補剛トラスの上, 下横構軸力
 T : 魚骨モデルによるねじりモーメント
 M_{ya} , M_{yb} , S_z : a, b 端の面外曲げモーメント, 面外せん断力

$$\left. \begin{aligned} S_{bu} &= S_z / 2 + T / 2h & S_{bl} &= S_z / 2 - T / 2h \\ S_d &= T / 2b & S_b &= T / 2h \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

以上のような変換式を前章に述べた有限変位解析プログラムに組み込むことによって、本解析プログラムでは、魚骨モデルによる解析、および、各トラス部材に対応する断面力への自動換算が可能となっている。

(2) ウィンドシューのモデル化

暴風時における解析では、数万トンの風荷重がウィンドシューに作用することになり、そのモデル化が解の収束性に影響を及ぼす。また、構造全体の中でウィンドシュー周辺が最もバンド幅の広くなるため、バンドアルゴリズムを用いる解法では、計算効率を考慮してモデル化する必要がある。以上のことを配慮して、ウィンドシューのモデル化の手法について述べる。

図-4.4は、解析モデルのウィンドシュー周辺部を示したものである。ウィンドシュー部(B点)において、橋軸方向及び鉛直方向の移動については拘束されず、さらに回転成分についても拘束されないということを留意しなければならない。

この条件を満足するモデルとして、図(a)においてA点とB点の橋軸直角方向の水平変位成分のみが等しくなるようなモデルを考える。すなわち、A点の水平変位の成分をB点のそれに従属させてその自由度を消去する方法が考えられる。この手法は論理的に明快であるが、この操作によってA点とC点が直接に関係づけられることになり、上述のバンド幅の問題が生じる。すなわち、バンド幅が広くなることにより、バンドアルゴリズムを用いる解法では数値計算の効率が悪くなることは避けられないが、論理的に明快な基準値としてより厳密な解を必要とするような場合には、有効なモデル化の手法である。

次に、図(b)のようなモデルを考える。このモデルでは、ウィンドタングの先端に2個の節点を設けて(B点、B'点)、これらにそれぞれ剛棒とトラス材を結合して、橋軸直角方向の水平変位成分が等しくなるようにしたものである。このモデル化でも、若干バンド幅が広がるが、図(a)のモデルよりは狭く実用的であるといえる。

さらに、図(c)のモデルでは、桁上の点Aから立ち上げた剛棒について、先端のB点で橋軸直角方向の水平変位成分の自由度のみを有する剛性行列を用いる。このモデル化によれば、図(a)、図(b)のモデルに比べバンド幅をかなり狭くでき、最も単純でかつ効率のよい数値計算が可能となり、より実用的な簡易法といえる。前章に述べた有限変位解析プログラムには、図(a)、図(b)のモデルの他、図(c)のモデルも取扱えるように必要な剛性行列の解式が組込まれている。

5. 数値計算例

開発した有限変位解析プログラムの有効性を検証するために、明石海峡大橋の計画段階での諸元¹²⁾を参考にした各種モデルについて数値計算を行った結果と、それに対する考察を以下に述べる。本数値計算例では、従来の線形化有限変位解析結果との比較も考え、汎用プログラムNASTRANによる計算も行うこととした。なお、計算にはNEC・PC9800RAを主として用いたが、一部の計算、および、NASTRANの計算には、NEC・EWS4800/20、および、日本ユニシス2200/200Dをそれぞれ用いた。

(1) 解析モデル

計画案は中央径間長1990m、主構高さ14mの2ヒンジ補剛トラス吊橋であり、図-5.1、および、図-5.2に示すように、補剛トラスを立体トラスモデル(約2300節点、約6400部材)、および、魚骨モデル(約1600節点、約2200部材)にモデル化して解析モデルとした。両解析モデルの諸元を表-5.1、表-5.2に示す。

(2) 解析ケース

解析ケースは表-5.3に示すようなものとし、立体トラスモデル、および、魚骨モデルについて、それぞれ完成系、架設系を対象とした。この表において、両者の解析モデルのモデルA、B、Cは、図-5.3に示すよ

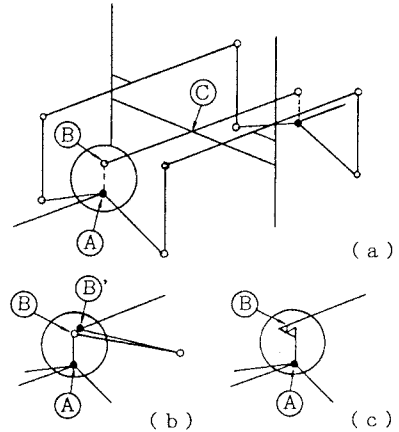


図-4.4 ウィンドシューのモデル化

うな主塔部のウィンドシュアのモデル化の違いにより区分したものである。なお、モデルAは、ウィンドシュアの位置に仮の支点を設けて橋軸直角方向の変位を拘束したモデルである。また、図-5.4に載荷図を示すように、荷重として、完成系には活荷重、風荷重、および、架設系には架設時荷重、架設時風荷重を載荷した。

表-5.1 立体トラスモデルの諸元

		A (m ²)		IX (m ⁴)		IY (m ⁴)		IZ (m ⁴)	
		主塔間	脚柱間	主塔間	脚柱間	主塔間	脚柱間	主塔間	脚柱間
補助トラス	上・下弦材	0.103	~ 0.122	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	斜材	0.029	~ 0.057						
	垂直材	0.034	~ 0.043						
	上・下横橋	0.027	~ 0.118						
	主橋トラス 上弦材	0.053	~ 0.069						
	下弦材	0.040	~ 0.089						
ケーブル	斜材	0.031	~ 0.042	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	垂直材	0.025	~ 0.042						
ケーブル		0.788		0.000		0.000		0.000	
ハンガー		0.009		0.000		0.000		0.000	
主塔 (塔柱)		2.592 ~ 4.204		17.820 ~ 37.270		28.040 ~ 85.300		13.540 ~ 23.200	

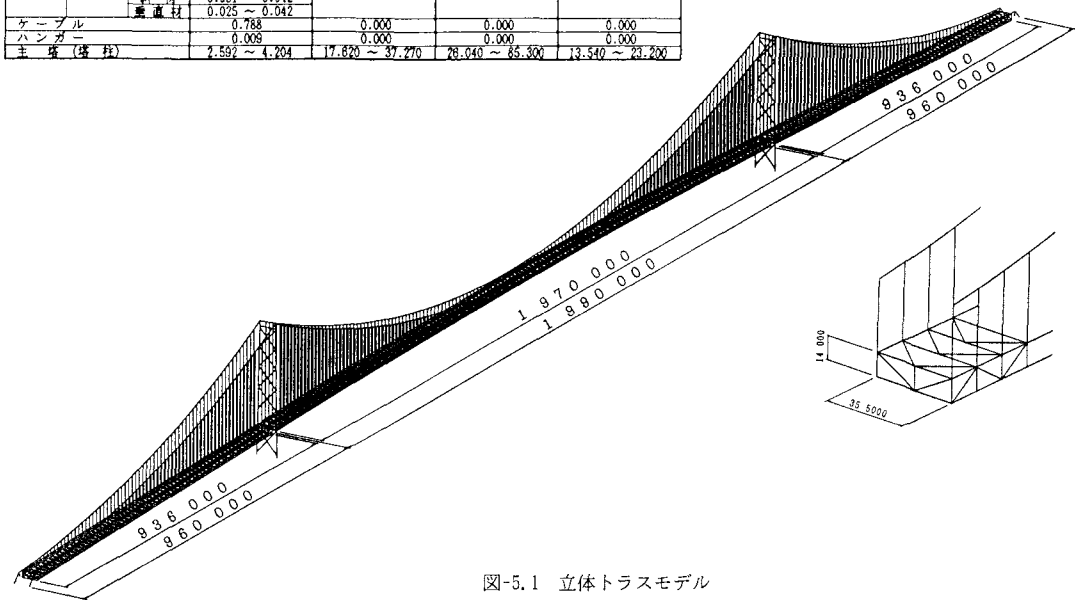


図-5.1 立体トラスモデル

表-5.2 魚骨モデルの諸元

	A (m ²)		IX (m ⁴)		IY (m ⁴)		IZ (m ⁴)	
	主塔間	脚柱間	主塔間	脚柱間	主塔間	脚柱間	主塔間	脚柱間
補助材	0.412 ~ 0.489		7.529 ~ 22.355		20.199 ~ 23.982		129.858 ~ 34.204	
仮型部材	100.000		100.000		100.000		100.000	
ケーブル	0.788		0.000		0.000		0.000	
ハンガー	0.009		0.000		0.000		0.000	
主塔 (塔柱)	2.592 ~ 4.204		17.820 ~ 37.270		28.040 ~ 85.300		13.540 ~ 23.200	

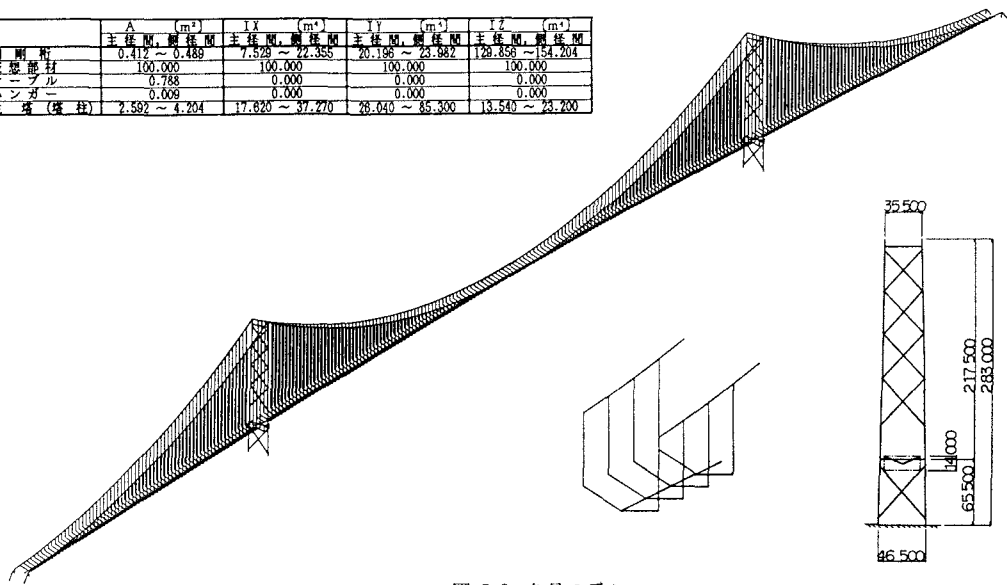


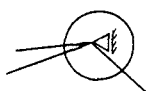
図-5.2 魚骨モデル

表-5.3 解析ケース

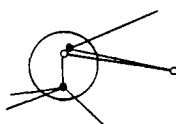
解析モデル	ウィンドシユ- のモデル化	完 成 系			架 設 系
		線 形 化*	非 線 形	非 線 形	
立体トラス モデル	モデル-A	TNA-CA	TNL-CA	TNL-EA	
	モデル-C	—	TNL-CC	—	
魚骨モデル	モデル-A	FNA-CA	FNL-CA	FNL-EA	
	モデル-B	FNA-CB	FNL-CB	—	
	モデル-C	—	FNL-CC	—	

*汎用プログラムNASUTRANによる計算

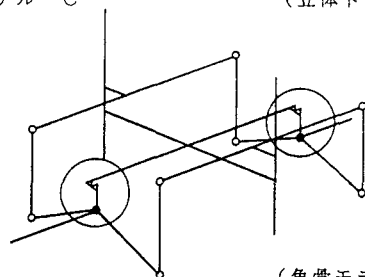
モデル-A



モデル-B



モデル-C

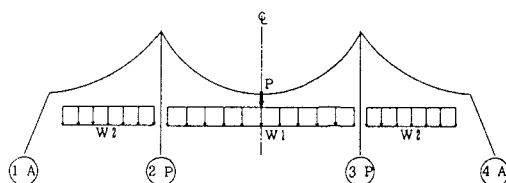


(立体トラスモデル)

(魚骨モデル)

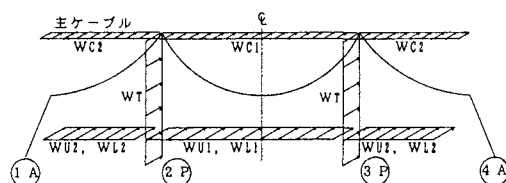
図-5.3 主塔部ウインドタング架のモデル化

(a) 活荷重 (L)



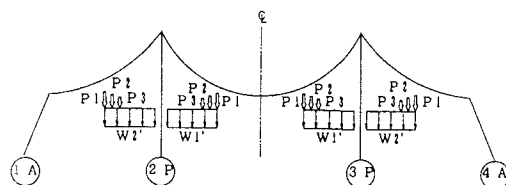
	中央係間		側係間
	W1 (t/m/c)	P (t/c)	W2 (t/m/c)
上弦材	1.883	62.25	1.883

(b) 風荷重 (W)



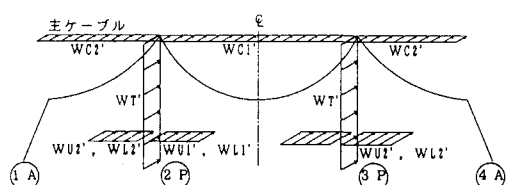
	中央係間		側係間
	W1 (t/m)	W2 (t/m)	
上弦材(U)	3.871	4.284	
下弦材(L)	2.705	2.764	
ケーブル(C)	0.516	(t/m/c)	
主塔	8.20	(t/m/c)	

(c) 架設時荷重 (ER)



	中央係間		側係間			
	W1' (t/m/c)	W2' (t/m/c)	P1 (t/c)	P2 (t/c)	P3 (t/c)	
上弦材	0.5	0.5	240	130	20	
下弦材	0.5	0.5	—	—	—	

(d) 架設時荷重 (W_{ER})



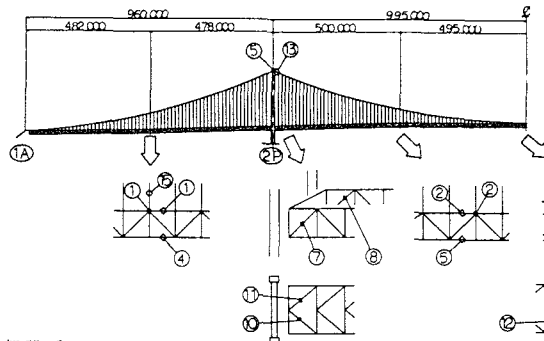
	中央係間		側係間
	W1' (t/m)	W2' (t/m)	
上弦材(U)	1.935	2.132	
下弦材(L)	1.185	1.382	
ケーブル(C)	0.258	(t/m/c)	
主塔	4.60	(t/m/c)	

図-5.4 荷重載荷図

(3) 計算結果

数値計算結果の一部として、図-5.5に示す着目点について、各解析ケースにおける変位、断面力、および、反力の計算値の比較を表-5.4～表-5.7に示す。表-5.4、表-5.5は鉛直荷重載荷によるものであるが、完成系では活荷重載荷による死荷重状態からの変化量を表わし、他方、架設系については、完成時の死荷重状態からの変化量に架設時荷重による変化量を加えたものを表わしている。鉛直荷重載荷の場合はウィンドシユ-のモデル化による差異は現われないことから、これらの表では、モデルAについてのみ示した。また、表-5.6～表-5.7は、完成系、架設系における橋軸直角方向の風荷重による変化量を表している。

(a) 完成系



(b) 架設系

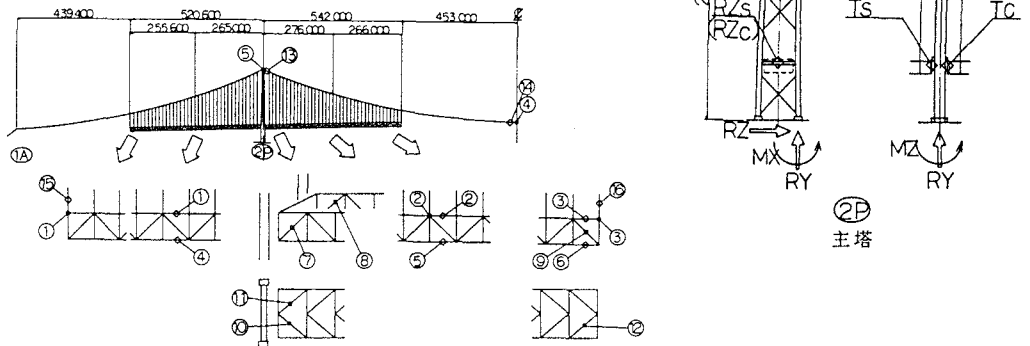


図-5.5 変位, 断面力, および, 反力の着目点

表-5.4 鉛直荷重 (L, ER) による変位と反力

		単位 : mm					単位 : mm					単位 : t, t·m				
		鉛直変位					橋軸方向変位					塔基部反力				
		①	②	③	④	⑤	①	②	③	④	⑤	Ry	RZ	MZ	Ts	Tc
完成系	TNA-CA	-327	-1340	-2019	-2018	-15	72	8	0	0	212	3769	-283	10453	68	75
	TNL-CA	-298	-1389	-2021	-2019	-15	68	8	0	0	220	3801	-283	7380	68	77
	FNA-CA	-327	-1380	-2014	-2014	-15	57	9	0	0	212	3798	-282	10191	72	80
	FNL-CA	-298	-1389	-2017	-2018	-15	68	8	0	0	220	3801	-283	7391	71	81
架設系	TNL-EA	-5230	-728	11424	32768	32	473	-1363	-2145	0	-2784	-11230	749	-112199	875	817
	FNL-EA	-5252	-722	11373	32717	32	478	-1296	-2082	0	-2790	-11233	755	-112353	703	843

表-5.5 鉛直荷重 (L, ER) による断面力

		単位 : t									
		上弦材					下弦材				
		①	②	③	④	⑤	①	②	③	④	⑤
完成系	TNA-CA	-48	-44	-172	54	42	173	-88	-88	32	4551
	TNL-CA	-41	-48	-187	54	43	170	-92	-92	32	4510
	FNA-CA	-50	-43	-201	51	43	171	-94	-94	42	4548
	FNL-CA	-48	-44	-187	48	44	167	-97	-97	42	4508
架設系	TNL-EA	-3301	-3227	37	3258	3202	412	-868	-868	-579	-19024
	FNL-EA	-3434	-3345	28	3414	3333	435	-893	-893	-618	-19043

表-5.6 風荷重 (W, W_{ER}) による変位と反力

		単位 : mm					単位 : mm					単位 : t, t·m				
		橋軸直方向変位					橋軸方向変位					塔基部反力				
		①	②	③	④	⑤	①	②	③	④	⑤	Ry	RZ	MZ	Wind RZs	Wind RZc
完成系	TNA-CA	8477	23011	27682	26811	1180	31	493	0	0	35	47320	5234	-39515	—	—
	TNL-CA	8457	22924	27529	26724	1222	-36	515	0	0	88	48487	5304	-39680	—	—
	TNL-CC	8428	23011	27622	26809	1272	-55	514	0	0	81	52885	6935	-54843	-1619	-1595
	FNA-CA	8413	22751	27648	26764	1174	31	480	0	0	33	47181	5156	-38925	—	—
	FNL-CA	8429	22766	27613	26777	1223	-54	505	0	0	89	48839	5282	-39631	—	—
	FNA-CB	8400	22756	27620	26815	1232	38	484	0	0	33	51031	6843	-54376	-1830	-1830
	FNL-CB	8473	22791	27584	26781	1269	-1	491	0	0	90	52587	6935	-54914	-1621	-1636
	FNL-CC	8483	22880	27674	26840	1271	-54	503	0	0	88	52844	6935	-54842	-1619	-1609
架設系	TNL-EA	9961	7798	14338	8757	491	-237	454	285	0	1	19821	2302	-17227	-489	-508
	FNL-EA	9944	7718	14307	8771	491	-250	478	309	0	3	18909	2294	-17232	-496	-515

表-5.7 風荷重 (W , W_{ER}) による断面力

		上弦材			下弦材			横 構			ケーブル			ハンガー		単位 : t
		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	
完成系	TNA-CA	-4029	-3919	-854	-4043	-3927	-883	—	—	—	—	883	887	-15	31	
	TNL-CA	-3940	-3832	-850	-4118	-3985	-842	—	—	—	—	1188	1001	-18	34	
	TNL-CC	-3953	-3817	-924	-4128	-3904	-823	-604	604	32	—	1034	881	-15	33	
	FNA-CA	-4060	-3901	-852	-4011	-4017	-848	—	—	—	—	798	613	3	7	
	FNL-CA	-4064	-3968	-828	-4062	-3915	-823	—	—	—	—	1038	885	3	17	
	FNA-CB	-4047	-3887	-847	-3999	-4003	-842	-657	657	17	—	804	620	3	7	
	FNL-CB	-4047	-3944	-827	-4045	-3893	-822	-581	581	18	—	1051	899	3	17	
	FNL-CC	-4051	-3953	-821	-4049	-3902	-817	-577	577	16	—	1048	893	3	17	
架設系	TNL-EA	-775	-818	-55	-828	-681	-3	—	—	—	—	486	388	58	60	
	FNL-EA	-683	-761	-42	-848	-744	-42	—	—	—	—	461	284	58	60	

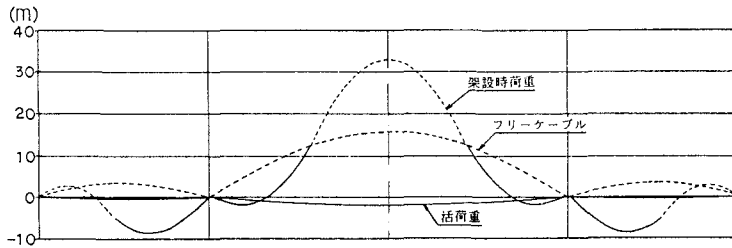


図-5.6 完成系、架設系の鉛直変位図 (L, ER)

さらに、図-5.6には、表-5.4に示したものと同一内容の鉛直荷重載荷による完成系、および、フリーケーブル状態を加えた架設系での鉛直変位をそれぞれ図示した。

(4) 考 察

計算結果からは、次のようなことがわかった。すなわち、まず、表-5.4、表-5.5の鉛直荷重載荷について、非線形解析と線形化解析による計算値は、鉛直変位①と上弦材①の軸力に最大10%の差があるがその絶対量は小さく、その他の値は2～3%の差しかない。これは、死／活荷重比の高い吊橋では、活荷重による非線形性は小さいという特性によるものと思われる。ただし、塔基部反力MZには30%近い差があるが、これは主塔が高いために、わずかな塔頂の橋軸方向の変位差が固定端モーメントに影響したものと考えられる。

立体トラスモデルと魚骨モデルによる差異は、上弦材③の軸力で15%の差を生じているが、その他の値の差は数%でよく一致しており、変形の大きい架設系も同様である。また、解析モデルによる差異は補剛トラスの斜材にも現れて、タワーリンク近傍の斜材軸力で6%程度である。

他方、風荷重による表-5.6、表-5.7の計算値には、ウィンドシューのモデル化による差異が認められるが、モデルAについては主塔の計算値は意味を持たず、その他の計算値での差は小さいことがわかる。また、モデルB、Cによる計算値は全ての項目でよく一致しており、モデル化に関係する節点の橋軸直角方向変位を調べると、モデルCでは、従属節点の式(7)より剛体回転による成分を除いた相対変位は1mm程度でウィンドシューの機能をよく表わしており、モデルBよりも忠実なモデル化といえる。

非線形解析と線形化解析による変位の差は、塔項の変位⑤以外では小さい。断面力では、主ケーブルの張力に25%～30%の開きがあるが、死荷重時張力(約54000～58000ton)に比べると無視できる量である。しかしながら、ウィンドシュー近傍の上、下横構のブレース材の軸力には10%以上の差を生じている。

解析モデルによる差は、上弦材③の軸力で13%あるが、その他の計算値は架設系も含めて数%程度である。また、上述の横構の軸力の差は5%程度である。

最後に、各節点の自由度の違いを考慮したバンドアルゴリズムを用いる本解析プログラムでは、全自由度数は立体トラス、魚骨モデルともほぼ同じ約7200となり、各解析ケースの計算時間にも大きな差は見られなかった。すなわち、PC9800RAによる経過時間はI/Oを含めて前者で約30分、後者で約30～40分(EWSによる場合は約8～10分)であった。許容収束誤差は 10^{-3} m、 10^{-2} tonで、Newton-Raphson法の反復回数は5～7回であった。

6. 結 言

前章までに述べてきたことなどから、長径間吊橋の立体有限変位解析のために提案した解析計算法の妥当性、および、開発した解析プログラムの有効性について、次のようなことがいえる。

- (1) 反復計算を伴う主塔の初期形状決定計算法は、塔頂で仮に橋軸方向変位を拘束（それによる誤差は完全に無視できる）することによって安定な収束性が得られ、塔面内の構成部材や塔柱の傾斜などを忠実にモデル化して所要の無応力形状を算定できる。
- (2) 主ケーブル等の初期形状決定は解析的に行われ、主塔のそれについても幾何学的非線形性を考慮していることから、全部材を組合わせて全体構造を解析することにより、吊橋特有の設計条件を完全に満足した死荷重時の平衡状態を再現できる。
- (3) 有限回転を考慮した解析法を適用したことにより、完成系での計算では少ない反復回数で非線形解が得られ、補剛トラスやハンガーなどの多数の部材を一度に除去して架設系の計算を行う場合でも同程度の反復回数で収束解が得られる。
- (4) 立体魚骨モデルに置き換えた場合にも各トラス部材の断面力として出力できる機能は、補剛トラスを構成する部材配置の種々のタイプに対応でき、解析結果を比較、検討する際などに有効である。
- (5) ウィンドシュアのモデル化の手法に関して、簡易法は、従属節点における条件をほぼ満たす解を与え、バンド幅を最小限にできることから、非常に実用的な手法である。

開発された解析プログラムは、補剛トラスを忠実に立体トラスモデルに置き換えた全橋モデルを対象とする場合でも、明石海峡大橋級の長径間吊橋の完成系、および、任意の架設系における有限変位解析をパソコン、あるいは、ワークステーションで実行できる。今後は、この立体有限変位解析プログラムに適切な前、後処理プログラムを整備し、平面解析プログラムとも連動させて、設計支援システムとしての体裁を整えていく予定である。

参 考 文 献

- 1) 前田研一・西土隆幸・内海 靖・斎藤道生：吊橋の設計支援システムと施工管理システム，土木学会第11回電算機利用に関するシンポジウム講演集，1986.
- 2) 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No.223，1974.
- 3) 前田幸雄・林 正・前田研一：主ケーブルの2次応力を考慮した吊橋の有限変位解析，土木学会論文報告集，No.315，1981.
- 4) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造の有限変位解析，土木学会論文報告集，No.253，1976.
- 5) 前田幸雄・林 正：充実曲線材の有限変位理論，構造工学論文集，Vol.32A，1986.
- 6) 例えば，小西一郎編：鋼橋・設計編Ⅱ，丸善，1975，pp.1027～1332.
- 7) 野村国勝・中崎俊三・内海 靖・前田研一・斎藤道生：吊橋・斜張橋の設計架設計算プログラムシステム，橋梁，Vol.21，No.5～9・11・12，1985，Vol.22，No.2・3，1986.
- 8) 川井忠彦・川島矩郎・三本木茂夫：薄板構造解析，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-7-A，培風館，1973，pp.48～52.
- 9) Gallagher, R. H. (川井忠彦・監訳)：有限要素解析の基礎，培風館，1976，pp.41～43.
- 10) 本州四国連絡橋公団：昭和48年度本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査報告書（別冊6・吊橋のねじり解析），土木学会，1973.
- 11) 本州四国連絡橋公団：昭和51年度本州四国連絡橋鋼上部構造に関する調査報告書（別冊2・トラス橋の解析），土木学会，1976.
- 12) 保田雅彦・平原伸幸：明石海峡大橋補剛桁の耐風性（中間報告），本四技報，Vol.13，No.52，1989.

（1990年10月12日受付）