

要素剛性分離の手法による構造物の
幾何学的非線形解析A STUDY ON TANGENT GEOMETRIC STIFFNESS WITHOUT INCLUDING INHERENT
STIFFNESS OF ELEMENT ITSELF後藤茂夫^{*}・荒牧軍治^{**}・井嶋克志^{***}

By Shigeo GOTO, Gunji ARAMAKI, Katsushi IJIMA

It is shown that tangent geometric stiffness matrices are obtained without including inherent stiffnesses of elements themselves. The tangent stiffness matrices are formulated by not using joint displacement vectors, but element force vectors in prior conditions to increment of joint forces. Therefore, this formulation of the tangent stiffness is available to geometrically nonlinear analyses of actual structures.

There are some cases in which element forces are defined for a element, and the tangent stiffnesses are different in every cases. It is proved that the differences are due to the tangent geometric stiffness of a element itself in the element coordinates.

1. まえがき

現在まで、多くの研究者により、薄肉構造や充実断面の曲線棒部材、あるいは立体シェル要素など、実在構造物の力学モデルとしての有限要素構造物を構成する各種要素に関する高精度な有限変位理論が展開されている。

しかしながら、各種要素毎の高精度な変位場による、省略のない構造解析のための非線形剛性方程式あるいは接線剛性方程式の定式化はかなり困難であり、得られた幾何剛性項においても、本質的に異なる二つの非線形要因に起因する項、すなわち要素座標系を適当に設定し、要素分割を密にすることにより、その影響が急激に減少する要素固有の幾何学的非線形項と構造物としての幾何学的非線形挙動を支配する要素の剛体変位に起因する非線形項との区分が明確でなければ、必然的にその適用要素も限定されることになる。

また、確かに構造物の幾何学的非線形解析において、目的とする変位と荷重の関係を高次非線形連立方程式に帰着せしめることが可能であれば、これを純数学的に解けばよいのであるが、現実の構造物への適用には問題がある。

^{*} 正会員 工博 佐賀大学教授 理工学部建設工学科 (〒840 佐賀市本庄町1番地)

^{**} 正会員 工博 佐賀大学教授 理工学部土木工学科 (同上)

^{***} 正会員 工博 佐賀大学助教授 理工学部建設工学科 (同上)

現実の構造物は、その架設過程における逐次部材の追加による構造系の変化を経て完成系に到達するものであり、全変位がゼロの基準状態となるものはなく、また、完成系での全荷重を撤去（重力をゼロとする）しても全要素無応力となるとは限らない。

したがって、全変位をパラメータとする、あるいは、増分形式であっても先行状態の変位を含む非線形関係式による定式化は、単一要素の非線形挙動の解析に対する意義はあっても実際の構造物の解析に対しては実用的でない場合もある。

構造解析が純数学的な解法と異なるのは、NEWTON-RAPHSON 法の反復過程において変位からの荷重の算出に必ずしもその非線形方程式を必要としない点であり、節点変位から厳密な適合条件により要素変形を求め、要素力剛性方程式により要素力を、さらに節点変位を忠実に考慮して節点力に変換すればよく、厳密な接線剛性方程式さえ得られれば、NEWTON-RAPHSON 法と等価な接線剛性法により厳密解への収束値を求めることが可能なことである。

この意味において、既知先行状態よりの増分形式の接線剛性方程式であり、幾何剛性に変位を含まないということは、実用上きわめて有利であり、また重要な条件であるといえる。

著者の一人は、さきに有限要素の既知平衡状態よりの節点力増分と変位増分との関係を表す接線剛性方程式における、要素端の変位と要素変形との適合条件の幾何学的非線形性に起因する幾何剛性マトリックスの定式化を行い、先行状態の既知節点力と要素形状とによって構成される単純明解な接線幾何剛性係数を得、それらが、要素の種類を問わず、要素力と要素変形の組合せと要素の節点の種類と数によって定まることを指摘している。

本文においても著者らは、一貫して、構造物の構成要素に関しては、その要素内全域の応力ひずみ状態を規定し得る要素力と要素変形との関係すなわち要素力剛性方程式は、すでに与えられているものとして、要素固有の剛性に起因する接線剛性マトリックスに付加すべき幾何剛性マトリックスについて論じており、ここではもはや、要素内における一切のひずみと変位に関する関係は不要となり、得られる幾何剛性項は、変位は含まずに先行要素力のみ関数となる。

この要素剛性の分離による手法は、たとえば、2 節点要素の接線幾何剛性は、直線棒部材でも、あるいはどのような曲線材であっても共通であり、またピン結合 3 節点板要素の場合でも軸方向力部材 3 個によるトラス骨組としてのものを用いてよく、簡単に接線幾何剛性を書き下ろすことができるなど、きわめて汎用性があり、さらに、各部材の重心軸、せん断中心軸が必ずしも一点に集中し得ない現実の格点構造に容易に対処させることができるなど、その発展性は大きく、従来の変位法による構造解析手法の延長としてプログラミングが容易であり、いわゆる弾性座屈後の極端な大変位挙動の追跡計算も可能となるものである。

本論文は、要素固有の剛性（線形、非線形を問わない）を分離して定式化された接線幾何剛性係数を用い、非線形の剛性方程式を全く必要としない接線剛性法に関する基礎的考察および異なった要素座標系間の接線幾何剛性マトリックスの差異に関する理論的考察を述べると共に、ピン結合要素および 3 節点剛節要素について、幾何学的非線形性の少ない要素力と要素変形の組合せを提案、それに対応する接線幾何剛性マトリックスの定式化と簡単な計算例を示し、立体薄板構造の横倒れ座屈後などどのような幾何学的大変形挙動に対しても確実な追跡計算が可能であり、いかに漸増荷重を分割載荷してもそれらの収束解は、与えた許容不平衡力の範囲で十分な精度が保証され誤差の累積は全く生じないことを実証するものである。

2. 基礎理論

（1） 増分形式による有限変位のエネルギー理論

現実の構造物は、その架設過程における逐次部材の追加による構造系の変化を経て完成系に到達する。したがって、全部材が無応力状態からの有限変位解析は実用的ではなく、死荷重などによる先行釣合状態から

の荷重増分による部材力、変位の増分を求めることが重要となる。

変形前の要素力 $\mathbf{S}$ と荷重 $\mathbf{X}$ の平衡条件を

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S} = \mathbf{X} \quad \dots\dots\dots (1)$$

とすれば、微小増分間の関係より次式のように接線剛性方程式が得られる。

$$\boldsymbol{\alpha} \delta \mathbf{S} + \delta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g) \delta \mathbf{x} = \mathbf{K}_T \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{X} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\delta \boldsymbol{\alpha}$ は要素力 $\mathbf{S}$ から荷重 $\mathbf{X}$ への座標変換マトリックスとその微小増分、変位の微小増分 $\delta \mathbf{x}$ に関して線形化された左辺第1、第2項より得られる係数マトリックス $\mathbf{K}_0$ および $\mathbf{K}_g$ は、要素剛性のみに起因するいわゆる微小変位理論としての剛性マトリックスおよび接線幾何剛性マトリックスである。

図-1 は構造解析における基本的力学量である要素変形、節点変位およびそれぞれに対応する要素力と節点荷重の関係をスカラー的に表現したもので、第1象限から順に要素力式、釣合条件、剛性方程式および適合条件式を表し、内側の長方形は、先行状態を、外側は外力の増加による変形後の新たな釣合状態を示している。

図より、停留すべき変形後の全ポテンシャルエネルギー Π' は、ひずみエネルギーを U' 、外力のポテンシャル損失を V' として

$$\begin{aligned} \Pi' &= U' - V' \\ &= (U + \Delta U + U^*) \\ &\quad - (V + \Delta V + V^* + V^{\circ}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となるが停留条件の変位による変分 $\delta \Pi'$ を考えた場合、 $U - V$ は先行状態での停留条件を満たしており、 $V^{\circ} = \mathbf{x}^T \mathbf{X}$ は、 $\mathbf{x}$ が定値となるので、結局、変位の変分で停留する全ポテンシャルエネルギーの増分は

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Delta U + U^* - V^* - \Delta V \\ &= \int \Delta \mathbf{S}^T d \Delta \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}^T \mathbf{S} - \Delta \mathbf{x}^T (\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表され、これより変形後の要素力と荷重の釣合条件が次式ようになる。

$$\partial \Delta \mathbf{s}^T / \partial \Delta \mathbf{x} \cdot (\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}) = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} \quad \dots\dots\dots (5)$$

したがってこれと式(1)との比較により変換マトリックスの有限増分 $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ は

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = \partial \Delta \mathbf{s}^T / \partial \Delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となるので、式(2)、(6)より $\mathbf{K}_g$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g &= \partial (\delta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{S})^T / \partial \Delta \mathbf{x} \\ &= [\partial / \partial \Delta \mathbf{x} (\partial \Delta \mathbf{s}^T / \partial \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{S})^T]_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

すなわち、接線剛性方程式における要素変形と節点変位の適合条件に関する非線形性に起因する幾何剛性マトリックスの i 行 j 列要素は、変位ベクトルを

$$\Delta \mathbf{x} = [\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n]^T \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおいてつぎのように表すことができる。^{2), 7), 9)}

$$\mathbf{K}_{gij} = [\partial^2 (\sum \Delta s_k \mathbf{S}_k) / (\partial \Delta x_i \partial \Delta x_j)]_{x_1, x_2, \dots, x_n=0} \quad \dots\dots\dots (9)$$

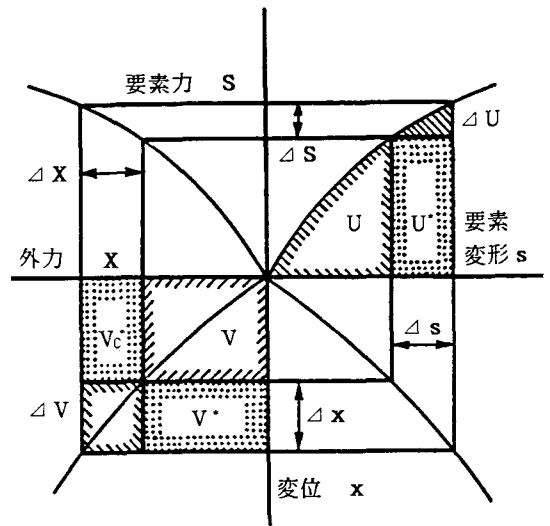


図-1 変形と力の関係

(2) 有限回転と回転変位ベクトル

本論文では、要素固有の有限変位挙動は考える必要がないので、変位場への有限回転の導入による煩わしさは一切なく、ただ、節点あるいは要素端における有限回転のみを厳密に考慮すればよい。

立体空間における有限回転は、無限小回転と異なり非可換となり、回転軸方向の軸性ベクトルと考えた場合の3成分はもはや回転を意味しなくなるが、解として得られる回転変位の3成分は、回転軸回りのトルクの仕事量と和が等価となる各トルク成分の仕事に対応する変形量として意味があり、合成することにより回転軸方向の向きとなつてはじめて回転としての意味を持つものと考えることができる。すなわち、単位ベクトルが

$$\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k} = [\alpha, \beta, \gamma]^T \quad \text{..... (10)}$$

となる軸の回りの大きさMのトルクと回転角 ϕ による仮想仕事Wに対し、トルクは

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [M_1, M_2, M_3]^T \\ &= M [\alpha, \beta, \gamma]^T \quad \text{..... (11)} \end{aligned}$$

となるベクトルであるので、ベクトルの内積としての仮想仕事を

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{M} \phi = M_1 \phi_1 + M_2 \phi_2 + M_3 \phi_3 \\ &= M (\alpha \phi_1 + \beta \phi_2 + \gamma \phi_3) = \mathbf{M}^T \phi \quad \text{..... (12)} \end{aligned}$$

と考えると

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]^T = \phi [\alpha, \beta, \gamma]^T \quad \text{..... (13)}$$

のように ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を成分とする回転変位ベクトル ϕ を定義することができる。

(3) 座標系の回転と回転の合成

任意の軸の回りの回転は、その軸の方向の右ねじの回転に伴う進行方向の向きと回転量を大きさとするベクトル(回転ベクトル)で与えられているものとする。回転ベクトルを

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k} = [r_1, r_2, r_3]^T \quad \text{..... (14)}$$

基準座標系 ω が回転軸の回りを $\mathbf{r}$ だけ回転してできる座標系 ω' の直交基底ベクトルを $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ として ω から ω' への座標変換マトリックス $\mathbf{A} = \Phi(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r}) = [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \quad \text{..... (15)}$$

を求めれば

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}^T \mathbf{r})^{1/2} \quad \text{..... (16)}$$

とおき、 $\mathbf{e}$ を3行3列の単位マトリックスとして

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \mathbf{r}^T (1 - \cos r) / r + \mathbf{e} \cos r - \mathbf{r} \times \mathbf{e} (\sin r) / r \quad \text{..... (17)}$$

となり^{3), 8)}、その逆変換

$$\mathbf{r} = \text{arc} \Phi(\mathbf{A}) \quad \text{..... (18)}$$

も容易に求めることができ、ある節点が回転 $\mathbf{r}_1$ 、さらに $\mathbf{r}_2$ を生じた場合の合成回転ベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = \text{arc} \Phi \{ \Phi(\mathbf{r}_2) \Phi(\mathbf{r}_1) \} \quad \text{..... (19)}$$

となる。

これより、変形後の要素座標系から基準座標系への座標変換マトリックスを β 、要素端の回転変位ベクトルを $\Delta \mathbf{x}$ とすれば、変形後の要素座標系に関する剛体回転成分を除いた要素変形としての要素端の回転変形ベクトル $\Delta \theta$ は

$$\Delta \theta = \text{arc} \Phi \{ \Phi(\Delta \mathbf{x}) \beta \} \quad \text{..... (20)}$$

となる適合条件で表される。

(4) 接線剛性法について

非線形の剛性方程式をまったく必要としない接線剛性法における反復公式は、反復回数の指標を r として

$$\Delta \mathbf{x}_{r+1} = \Delta \mathbf{x}_r - \mathbf{K}_T^{-1} \{ \mathbf{a}_r, \mathbf{S}_r \} \cdot (\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} - \mathbf{a}_r \mathbf{S}_r) \quad \dots\dots\dots (21)$$

となるが、図-2によりこの反復手法の概念を示す。

第1象限における変位と荷重の厳密な関係を表す非線形の剛性方程式は、本手法では与えられておらず、ここでは点線で示しておく。

第2象限は共通座標系に関する節点変位 $\Delta \mathbf{x}$ より各要素固有の要素座標系に関する要素変形 $\Delta \mathbf{s}$ を求める適合条件式、第3象限は要素変形から対応する要素力 $\Delta \mathbf{S}$ を求める要素力式、さらに第4象限は各節点に集まる要素の要素力から変形後の形状を考慮した座標変換により算出される節点力としての荷重を求める平衡条件式を表すものとする。

原点Oは既知の平衡状態で、接線剛性法の反復手法は、まず与えられた荷重増分としての節点力 $\Delta \mathbf{X}$ （Qで示す）に対してO点を先行状態とする接線剛性方程式を解き $\Delta \mathbf{x}_1$ を得る（ $O \rightarrow A \rightarrow B$ ）、次に変位 $\Delta \mathbf{x}_1$ に対して適合条件式により要素力 $\Delta \mathbf{S}_1$ 、さらに平衡条件式を用いて、その変位状態を発生せしめる厳密な荷重状態としての $\Delta \mathbf{X}_1$ を計算することにより（ $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ ）、新しい平衡状態Fを設定する事ができる。

もちろん、この状態はまだ目的の状態とは異なり、与えられた荷重 $\Delta \mathbf{X}$ に対して $\delta \mathbf{X}_2 = \Delta \mathbf{X} - \Delta \mathbf{X}_1$ ($\mathbf{Q} - \mathbf{E}$) の不平衡力が存在する。

したがって、この状態Fを先行状態とする接線剛性方程式 ($F \rightarrow G$) を用いて $\delta \mathbf{X}_2$ に対する解 $\delta \mathbf{x}_2$

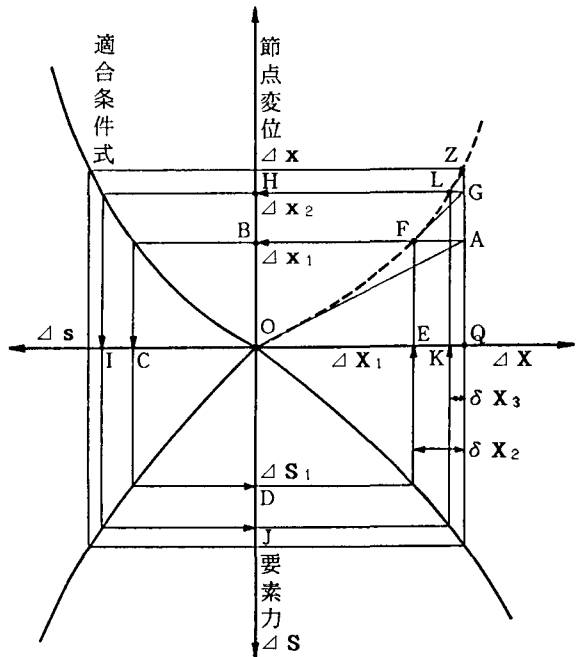
(H-B)を求め、新しい変位 $\Delta \mathbf{x}_2 = \Delta \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2$ より $H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$ として $\Delta \mathbf{x}_2$ を満足せしめる荷重状態Kが得られ、次の先行状態としてLの設定が可能となる。

以下これを反復することにより、 $O \rightarrow F \rightarrow L \cdots \rightarrow Z$ と無限に Z に近づけることができる。

要するに接線剛性法は、結果として厳密な非線形の剛性方程式の解を示す曲線上をたどることになるが、現実には定式化の不可能なその非線形方程式に対する数学的な NEWTON-RAPHSON 法とまったく等価となる手法であるといえる。

接線剛性法はまた、各段階を既知先行状態とした場合の不要外力となる不平衡力の除荷という反復手法であるため、本質的に任意の節点に強制変位を与えて解を求める、いわゆる変位制御による計算がきわめて容易となる。

すなわち初期状態に強制変位を与えた状態を先行状態とし、強制変位方向を拘束する支点条件を設定して不平衡力の算出、接線剛性方程式の計算という通常の反復計算を行えばよく、剛性マトリックスには一般の変位法の場合と同様な支点条件の導入の外一切手を加える必要がない。



図一 2 接線剛性法 の 概念 図

3. 異なった要素座標系による接線幾何剛性マトリックス間の関係

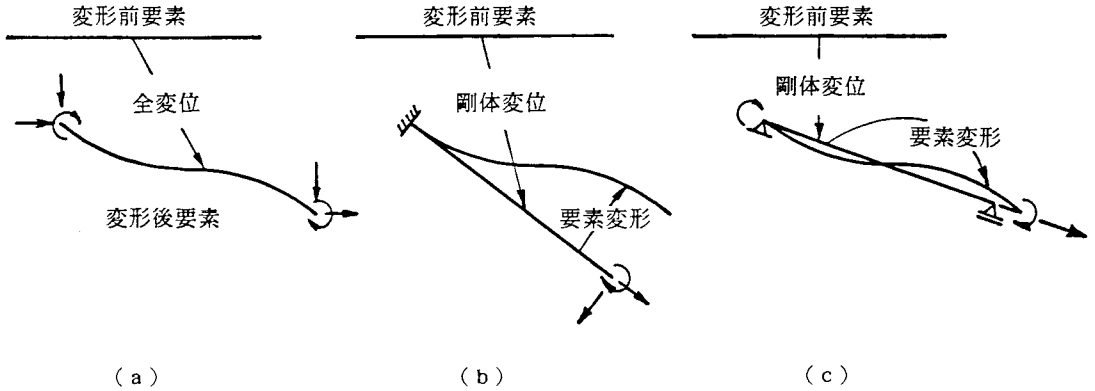


図-3 要素変形と剛体変位

図-3は、2節点直線棒要素の場合を例にとり、全変位、および全変位を剛体変位と要素変形の合成と考えたときの二つの要素座標系の場合を示したものであり、このように要素剛性の定義すなわち要素力と要素変形との組合せが異なれば接線幾何剛性マトリックスも異なった配列、要素となり、それらの解におよぼす影響に差が生じることが考えられる。

いま要素座標系を理想的に設定し得たとして、線形関係を満足する要素力と要素変形の組合せを

要素力 $S_1, S_2, S_3, \dots$

要素変形 $s_1, s_2, s_3, \dots$

また、目的の接線剛性方程式の作成にかかわる基準座標系に関する節点力と節点変位の組合せを

節点力 $X_1, X_2, X_3, \dots$

節点変位 $x_1, x_2, x_3, \dots$

さらに、第1の要素座標系における要素力と要素変形の関係から幾何学的非線形性を考慮して導かれる第2の要素座標系に関する要素力と要素変形の組合せを

要素力 $T_1, T_2, T_3, \dots$

要素変形 $t_1, t_2, t_3, \dots$

とする。

この場合、第1および第2の要素座標系から導かれる基準座標系に関する接線幾何剛性マトリックス K_{1g} , K_{2g} の i 行 j 列要素は、 S_r , T_r を先行要素力と考えて、それぞれ

$$K_{1gij} = \Sigma_r [S_r \partial^2 s_r / \partial x_i \partial x_j] \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$K_{2gij} = \Sigma_r [T_r \partial^2 t_r / \partial x_i \partial x_j] \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

のように表すことができる。

ここで $[]$ の中の偏微分項は残った変位項を0とおくものとする。また $s_1, s_2, \dots$ を $t_1, t_2, \dots$ の関数と考えれば、式(2.2)において、以下各偏微分の項は、 $[]$ を省略して

$$\begin{aligned} \partial^2 s_r / \partial x_i \partial x_j = & \Sigma_q \{ (\Sigma_p \partial^2 s_r / \partial t_p \partial t_q \cdot \partial t_p / \partial x_i) \cdot \partial t_q / \partial x_j + \partial s_r / \\ & \partial t_q \cdot \partial^2 t_q / \partial x_i \partial x_j \} \quad \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

となり、また、3組の座標系間の微小変位増分に関する線形の適合条件と先行状態に置ける要素力と節点力との関係は

$$\delta s_i = \partial s_i / \partial x_1 \cdot \delta x_1 + \partial s_i / \partial x_2 \cdot \delta x_2 + \dots \dots \dots (25)$$

$$\delta t_i = \partial t_i / \partial x_1 \cdot \delta x_1 + \partial t_i / \partial x_2 \cdot \delta x_2 + \dots \dots \dots (26)$$

$$\delta s_i = \partial s_i / \partial t_1 \cdot \delta t_1 + \partial s_i / \partial t_2 \cdot \delta t_2 + \dots \dots \dots (27)$$

$$X_i = \partial s_1 / \partial x_i \cdot S_1 + \partial s_2 / \partial x_i \cdot S_2 + \dots \dots \dots (28)$$

$$X_i = \partial t_1 / \partial x_i \cdot T_1 + \partial t_2 / \partial x_i \cdot T_2 + \dots \dots \dots (29)$$

$$T_i = \partial s_1 / \partial t_i \cdot S_1 + \partial s_2 / \partial t_i \cdot S_2 + \dots \dots \dots (30)$$

と表すことができる。

式(22)，(24)より

$$K_{1gij} = \Sigma_q \partial t_q / \partial x_j \Sigma_p \partial t / \partial x_i \Sigma_r S_r \partial^2 s_r / \partial t_p \partial t_q + \Sigma_q \partial t_q^2 / \partial x_i \partial x_j \Sigma_r S_r \partial s_r / \partial t_q \dots \dots \dots (31)$$

となるが、この右辺第2項は、式(23)，(30)より

$$\begin{aligned} \Sigma_q \partial t_q^2 / \partial x_i \partial x_j \Sigma_r S_r \partial s_r / \partial t_q \\ = \Sigma_q t_q \partial t_q^2 / \partial x_i \partial x_j \\ = K_{2gij} \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

のように K_{2gij} に等しくなり、また、第1項の Σ_r に関する部分は、第2の要素座標系を基準座標系と考えた、第1の要素座標系から導かれる $\delta T_1, \delta T_2 \dots$ に関する接線要素力剛性方程式における幾何剛性マトリックス K_{12g} の*i j*要素に他ならず、これを

$$K_{12gij} = \Sigma_r S_r \partial^2 s_r / \partial t_p \partial t_q \dots \dots \dots (33)$$

と置けば、式(31)は

$$K_{1gij} = \Sigma_q \partial t_q / \partial x_j \Sigma_p \partial t_p / \partial x_i K_{12gij} + K_{2gij} \dots \dots \dots (34)$$

となり、右辺第1項は、また

$$\begin{bmatrix} \partial t_1 / \partial x_i, \partial t_2 / \partial x_i, \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{11}, K_{12}, K_{13}, \dots \\ K_{21}, K_{22}, K_{23}, \dots \\ K_{31}, K_{32}, K_{33}, \dots \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix}_{12g} \cdot \begin{bmatrix} \partial t_1 / \partial x_j \\ \partial t_2 / \partial x_j \\ \partial t_3 / \partial x_j \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix} \dots \dots \dots (35)$$

のように、第2の要素座標系に関する要素幾何剛性マトリックス K_{12g} を基準座標系へと座標変換して得られるマトリックス K_{12g} の*i j*要素を表しており

$$K_{1g} = K_{12g} + K_{2g} \dots \dots \dots (36)$$

が成立する。

すなわち、異なった要素座標系に関する要素力と要素変形の組合せから導かれる二組の接線幾何剛性マトリックスの差異は、それぞれの要素変形間の適合条件の非線形性に起因する接線要素剛性マトリックスの幾何剛性部分の差異を相補するものとなる。

したがって、それぞれの収束した解の差は、要素力剛性方程式における幾何学的非線形挙動の精度の差を表すことになり、例えば、図-3の(b)よりは(c)が、図-8よりは図-6の方が有利であることは明かである。

また、接線剛性法による解の収束性は、要素座標系の設定方法いかんにかかわらず理論的な差はなく、ただ、先行状態から収束釣合状態へ至る変位過程における各要素の剛体変位成分と要素変形成分の割合が異なるため各種の計算例においてケースバイケースで若干の差を生じることが予想される。

4. 立体ピン結合要素の接線幾何剛性マトリックス

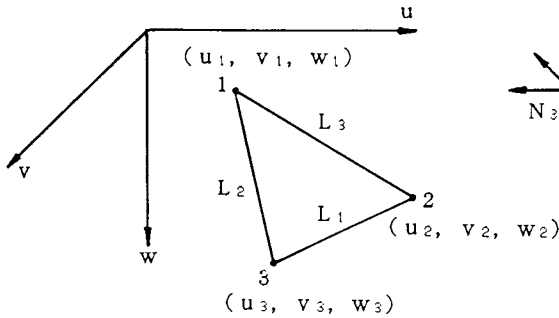


図-4 3節点要素

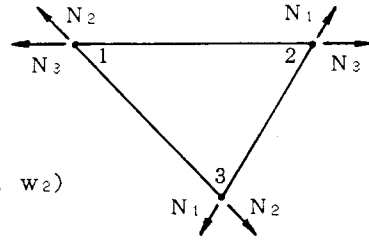


図-5 先行要素力

要素の3節点を結ぶ三角形の3辺の長さ L_1 , L_2 , L_3 の増分、 ΔL_1 , ΔL_2 , ΔL_3 を要素変形とすれば、先行要素力は、図-4のように辺に沿う引張力 N_1 , N_2 , N_3 となる。3辺の共通座標系に関する方向余弦は、節点 i の座標値を u_i , v_i , w_i として

$$\alpha_i = u_{jk} / L_i = (u_k - u_j) / L_i \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\beta_i = v_{jk} / L_i = (v_k - v_j) / L_i \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\gamma_i = w_{jk} / L_i = (w_k - w_j) / L_i \quad \dots\dots\dots (39)$$

と表される。ここで i, j, k の組合せは以下の通りである。

$$(i \ j \ k) = (1 \ 2 \ 3), (2 \ 3 \ 1), (3 \ 1 \ 2)$$

したがって、適合条件の展開は、変位すなわち u_i , v_i , w_i の増分を Δu_i , Δv_i , Δw_i として

$$\Delta L_i = \alpha_i \Delta u_{jk} + \beta_i \Delta v_{jk} + \gamma_i \Delta w_{jk} + \{ \Delta u_{jk}^2 + \Delta v_{jk}^2 + \Delta w_{jk}^2 - (\alpha_i \Delta u_{jk} + \beta_i \Delta v_{jk} + \gamma_i \Delta w_{jk})^2 \} / 2 L_i + \dots\dots\dots (40)$$

のようになる。

これより N_i を係数とする部分幾何剛性マトリックス k_{gjk} を

$$k_{gjk} = (N_i / L_i) \cdot \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1 - \beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1 - \gamma^2 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots (41)$$

と表して、第1の要素力と要素変形の組合せより導かれる、共通座標系に関する接線幾何剛性マトリックスは

$$K_g = \begin{bmatrix} k_{g12} + k_{g31} & -k_{g12} & -k_{g31} \\ -k_{g12} & k_{g12} + k_{g23} & -k_{g23} \\ -k_{g31} & -k_{g23} & k_{g31} + k_{g23} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (42)$$

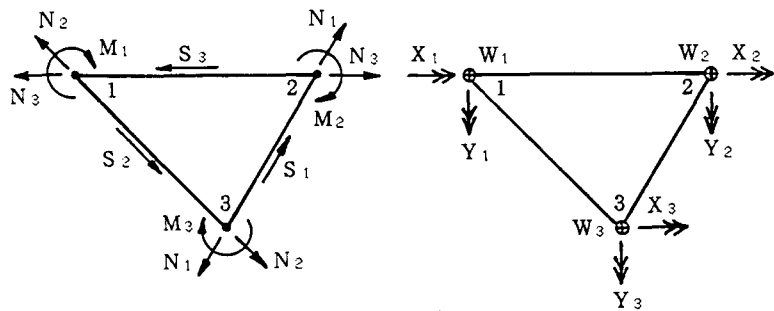
となるが、これは、1と2、2と3、3と1の各節点を結ぶ両端ピンの2節点要素3個による三角形骨組みの場合と同一となっている。

この組合せの要素力と要素変形の関係は、板要素等に対しても幾何学的非線形性が少なく、また式(42)で示される接線幾何剛性も3節点に対する偏りもないきわめて有利な接線剛性方程式が得られることになる。

なお多節点ピン結合要素の場合も各節点を静定な立体トラスの頂点と考えて、その部材力に対応する要素

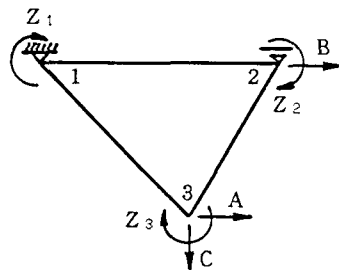
力と節点間距離の変化を要素変形とする組合せを用いれば、2 節点要素による立体トラブロックとしての接線幾何剛性マトリックスの配列と同様になる。

5. 立体 3 節点剛節要素の接線幾何剛性マトリックス



図－ 6 面内要素力

図－ 7 面外要素力



図－ 8 要素座標系に関する平面要素力

要素力と要素変形の組合せは、4. の各辺に沿う力と節点間距離の変化に加え、要素端の回転に関するものが必要となる。

要素座標系を 1 2 方向に x 軸、3 点が決める平面内 x 軸と直角方向に y 軸、および面外方向へ z 軸を定め、独立な要素力の組合せとして図－ 6、7 の

$\mathbf{S} = [N_1, N_2, N_3, X_1, Y_1, M_1, X_2, Y_2, M_2, X_3, Y_3, M_3]^T$ をとる。

変形前の要素座標系を基準座標系として、この座標系に関する座標値と並進変位を 4. と同様に表せば、変形後の要素座標系を基準座標系へと変換する座標変換マトリックス β は

$$\mathbf{u}_{ij} = [u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}]^T \tag{4 3}$$

$$\beta_x = (\mathbf{u}_{12} + \Delta \mathbf{u}_{12}) / (b + \Delta b) \tag{4 4}$$

$$\beta_y = \{\mathbf{u}_{13} + \Delta \mathbf{u}_{13} - (c + \Delta c) \beta_x\} / (b + \Delta b) \tag{4 5}$$

$$\beta_z = \beta_x \times (\mathbf{u}_{13} + \Delta \mathbf{u}_{13}) / (a + \Delta a) \tag{4 6}$$

$$\beta = [\beta_x, \beta_y, \beta_z] \tag{4 7}$$

のようになり、基準座標系に関する i 端の回転変位ベクトルを $\Delta \mathbf{x}_i$ とすれば、剛体変位成分を除いた要素変形としての i 端の回転変位ベクトル $\Delta \theta_i$ は

$$\Delta \theta_i = \text{arc } \Phi \{ \Phi (\Delta \mathbf{x}_i) \beta \} \tag{4 8}$$

であり、これを展開すれば $\Delta \omega = c \Delta w_{12} - b \Delta w_{13}$ において

$$\Delta \theta_{xi} = \Delta x_i + (a b + c \Delta v_{12} - b \Delta v_{13}) \Delta \omega / a^2 b^2 + \Delta v_{12} \Delta w_{12} / 2 b^2 \\ + (\Delta v_{12} \Delta y_i + \Delta w_{12} \Delta z_i) / 2 b - (c \Delta u_{12} - b \Delta u_{13}) \Delta w_{12} / a b^2 + \dots \quad (49)$$

$$\Delta \theta_{yi} = \Delta y_i + (b - \Delta u_{12}) \Delta w_{12} / b^2 - \Delta v_{12} \Delta x_i / 2 b \\ + (\Delta v_{12} - b \Delta z_i) \Delta \omega / 2 a b^2 + \dots \quad (50)$$

$$\Delta \theta_{zi} = \Delta z_i - (b - \Delta u_{12}) \Delta v_{12} / b^2 - \Delta w_{12} \Delta x_i / 2 b \\ + (\Delta w_{12} + b \Delta y_i) \Delta \omega / 2 a b^2 + \dots \quad (51)$$

となる。なおこれらの回転変位ベクトルのうち $\Delta \theta_{zi}$ は、図-8に示す平面要素力としての節点モーメント Z_i に対応する要素変形であり、図-6と図-8の要素力間の変換が式(52)のようになるので

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2aa_1 & 2aa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2da_1 & 0 & 2ab & -c & -c & -c \\ -2da_1 & 2ca_2 & 0 & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 2ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix} / 2 a b \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

図-6の M_i に対応する要素変形を $\Delta \phi_i$ とすれば、仮想仕事の原理より

$$\Delta \phi_i = \Delta \theta_{zi} + (b \Delta c - c \Delta b) / 2 a b \\ = \Delta \theta_{zi} + \{-L_1 \Delta L_1 + L_2 \Delta L_2 - (c - d) \Delta L_3\} / 2 a b \quad (53)$$

のように辺長変化による剛体回転の項が付加されることがわかる。

また N_1, N_2, N_3 の関数となるパラメータで構成される接線幾何剛性部分を K_{g1} とすれば、式(42)における各方向余弦を

$$\alpha_1 = -d / L_1, \quad \alpha_2 = -c / L_2, \quad \alpha_3 = 1 \quad (54)$$

$$\beta_1 = a / L_1, \quad \beta_2 = -a / L_2, \quad \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \quad (55)$$

と置き、0を3行3列のゼロマトリックスとして

$$K_{g1} = \begin{bmatrix} k_{g12} + k_{g31} & 0 & -k_{g12} & 0 & -k_{g31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{g12} & 0 & k_{g12} + k_{g23} & 0 & -k_{g23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{g31} & 0 & -k_{g23} & 0 & k_{g31} + k_{g23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

となり、これに式(49)～(51)の適合条件に式(9)を実行して得られる接線幾何剛性マトリックス K_{g2} を加えることにより3節点剛節要素の接線幾何剛性マトリックスが得られる。以下 K_{g2} の非零要素を文献¹⁾の例に倣って示す。

表-1 K_{g2} の非零要素

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	H_1	0	0	0	0	0	$-H_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	*	Q_1	$-P_1$	0	0	0	*	Q_2	$-P_2$	0	0	0	*	Q_3	$-P_3$	0
3		R_1	gR_1	*	H_2	*	0	R_2	gR_2	*	H_3	gH_3	*	R_3	gR_3	*
4						$-Q_1$	$-R_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5						P_1	fR_1	0	0	0	0	0	$-R_1$	0	0	0
6						*	0	0	0	0	0	0	Q_1	0	0	0
7						$-H_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8								$-Q_2$	P_2	0	0	0	*	$-Q_3$	P_3	0
9								$-R_2$	fR_2	*	$-H_3$	fH_3	*	$-R_3$	fR_3	*
11													$-eR_2$	0	0	0
12													eQ_2	0	0	0
14													$-eH_3$	0	0	0
15															$-eR_3$	eQ_3

*で示された i 行 j 列要素 k_{ij} は、以下のとおりである。

$$k_{2,3} = (b d W_1 - L_1^2 W_3) / 2 a b^2$$

$$k_{2,9} = \{b c W_1 + (a^2 - c d) W_3\} / 2 a b^2$$

$$k_{2,15} = (d W_3 - b W_1) / 2 a b$$

$$k_{3,6} = - (a X_1 + d Y_1) / 2 a b$$

$$k_{3,8} = \{b d W_2 + (a^2 - c d) W_3\} / 2 a b^2$$

$$k_{3,12} = - (a X_2 + d Y_2) / 2 a b$$

$$k_{3,15} = - (Z_1 + Z_2 + Z_3) / 2 a b$$

$$k_{3,18} = - (a X_3 + d Y_3) / 2 a b$$

$$k_{6,9} = (a X_1 - c Y_1) / 2 a b$$

$$k_{8,9} = (b c W_2 - L_2^2 W_3) / 2 a b^2$$

$$k_{8,15} = (c W_3 - b W_2) / 2 a b$$

$$k_{9,12} = (a X_2 - c Y_2) / 2 a b$$

$$k_{9,15} = (Z_1 + Z_2 + Z_3) / 2 a b$$

$$k_{9,18} = (a X_3 - c Y_3) / 2 a b$$

また、表中ではスペースの関係上、 $[e, f, g] = [b, c, d] / a$ 、 $H_i = W_i / b$ 、 $[P_i, Q_i, R_i] = [X_i, Y_i, Z_i] / 2 b$ とした。

6. 計算例

(1) ピン結合要素構造物の大変位解析

図-9のような、板厚1mm、初期状態における水平面への投影図が辺長10mの直角2等辺三角形をなす16個の9自由度要素から成るスパン80m、サグ16mの薄膜構造物を想定し、第3格点の片側を変位制御により最終的に3.3mまで持ち上げる計算を行った。

各要素の材質は構造用鋼とし、自重は考えず初期状態として各格点に2tfの鉛直下方への力を作用させて、鉛直変位増分は0.2～1mを与えた。図-10は変位制御点の反力と変位、第3格点の向こう側および第6格点の手前側の変位の関係をグラフにしたものである。

各変位増分段階の収束状況はかなり良く、表-2に制御変位3mから増分0.5mを与えた場合の各反復段階の最大不平衡力(tf)の推移を示す。

なお、この時の変位制御力は3.650tfから4.022tfとなる。

(2) 剛節要素による腹板の横倒れ大変位解析

図-11のような高さ50cm、長さ2.5mの片持ち腹板を板厚2cm、直角辺50cmの18自由度直角二等辺三角形要素10枚の構造用鋼で構成したものの先端上部に面外方向、0.1tfを固定し、鉛直方向下向きに荷重を漸増させた場合の計算を行った。なお図では三角形要素の斜辺部分は省略している。

図-11の変形図は鉛直力9.4tfの場合でこのときのu、v、w方向の変位はそれぞれ-804、1422、753mmに達する。

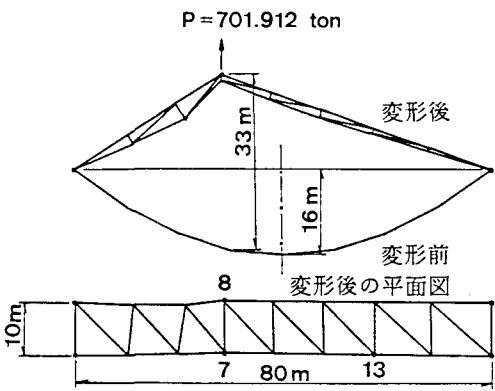


図-9

表-2

回数	δP
0	6587.5329
1	436.4517
2	22.3293
3	486.1922
4	12.7493
5	0.7927
6	0.2629
7	0.0018
8	0.0000

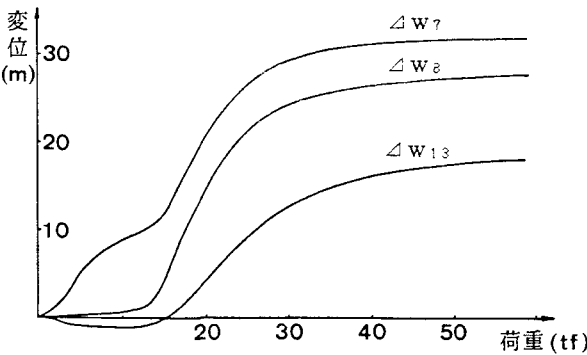


図-10

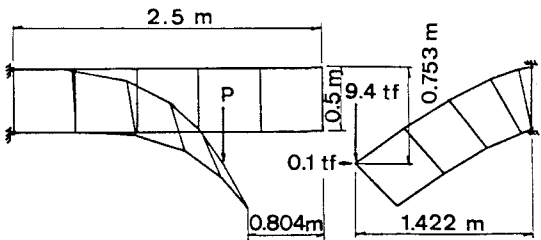


図-11

図-12はそれまでの鉛直力と載荷点の面外 v 方向と鉛直 w 方向の変位との関係を示したものである。収束までの反復回数は、収束領域の安定性と荷重増分によって異なるが、誤差の累積が生じないことから、十分に増分ピッチを小さくすることにより反復回数も少くなり確実な収束計算が可能となる。

表-3は初期無応力状態より荷重増分として鉛直荷重4.5tfのみを作用させた場合、表-4は面外荷重0.1tfと鉛直荷重4.5tfを作用させた場合、表-5はこれを先行状態として鉛直荷重増分を0.3tf作用させた場合の最大不平衡力、不平衡モーメントの収束状況を示したものであり、最初の不平衡力は先行状態の収束誤差と荷重増分の和となるものである。

なお許容収束誤差は0.001tf、tfmとしている。

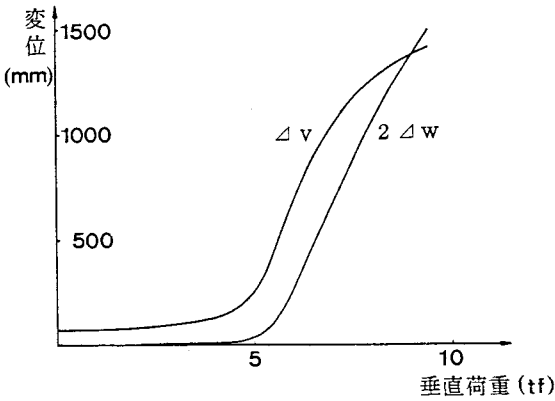


図-12

表-3

回数	δP	δM
0	4.5000	0.0000
1	0.6359	0.0106
2	0.0000	0.0000

表-4

回数	δP	δM
0	4.5011	0.0000
1	131.9435	5.9851
2	2.6408	0.3119
3	339.0579	10.6655
4	0.7836	0.2258
5	44.1250	1.4781
6	1.3002	0.3299
7	1.9016	0.3792
8	0.6561	0.1718
9	0.3076	0.0364
10	0.2514	0.0732
11	0.0167	0.0023
12	0.0369	0.0108
13	0.0099	0.0027
14	0.0053	0.0015
15	0.0022	0.0006
16	0.0010	0.0003

表-5

回数	δP	δM
0	0.3000	0.0003
1	49.8406	2.7872
2	1.4730	0.4107
3	13.3547	1.0111
4	2.4970	0.6413
5	0.8615	0.1843
6	0.3751	0.1051
7	0.0962	0.0287
8	0.0743	0.0221
9	0.0279	0.0081
10	0.0160	0.0046
11	0.0075	0.0021
12	0.0036	0.0010
13	0.0017	0.0005
14	0.0008	0.0002

7. 結言

接線剛性法による構造物の幾何学的非線形挙動の解析にきわめて有利であると考えられる要素剛性分離の手法の基礎理論と考察を述べ、立体ピン結合要素および剛結合要素の接線幾何剛性マトリックスを示し、これらを用いて立体有限要素構造物の極端な大変位挙動の計算を行い理論の有利性と実用性を実証した。

このように、要素剛性分離の手法により、その他各種要素に対してもそれぞれの特質を活かした要素力と要素変形の組合せを設定することにより、より有利な汎用性のある接線幾何剛性マトリックスを求めることが可能であり、また変位法による汎用構造解析に造詣のある技術者であれば、比較的容易に本手法による構造計算プログラムを作成してその実用性を確認することができるものと思われる。

参考文献

- 1) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 237, pp. 11～26, 1975.
- 2) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，No. 238, pp. 31～42, 1975.
- 3) 前田幸雄・林正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 13～27, 1976.
- 4) 後藤茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，No. 270, pp. 41～49, 1978.
- 5) 吉田裕・増田陳紀・松田隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，No. 288, pp. 41～52, 1979.
- 6) 吉田裕・増田陳紀・森本剛・広沢規行：立体骨組構造の増分つりあい方程式とその解法，土木学会論文報告集，No. 300, pp. 21～31, 1980.
- 7) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用，土木学会論文報告集，No. 304, pp. 17～32, 1980.
- 8) 土木学会編：構造力学公式集例題集，pp. 1～5, 1980.
- 9) 後藤茂夫：立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化，土木学会論文報告集，No. 335, pp. 1～11, 1983.
- 10) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T., Hasegawa, A.: A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, Proc. of Japan Society of Civil Engineers, No. 344/I-1, pp. 39～53, 1984.
- 11) 後藤芳顕・松浦聖・長谷川彰夫：充実断面空間棒材の有限変位理論の一定式化，構造工学論文集，Vol. 31A, pp. 183～196, 1985.
- 12) 前田幸雄・林正：充実曲線材の有限変位理論，構造工学論文集，Vol. 32A, pp. 139～151, 1986.
- 13) 井浦雅司・平嶋政治：有限回転を伴う充実空間曲線部材の幾何学的非線形理論，構造工学論文集，Vol. 32A, pp. 153～163, 1986.
- 14) 吉田裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と問題，土木学会論文報告集，No. 374, pp. 25～37, 1986.
- 15) 桜井孝晶・忠和男・西野文雄：弾性シェル構造物の有限変位問題に関する一数值解析，構造工学論文集，Vol. 33A, pp. 41～52, 1987.

(1990年10月12日受付)