

要素剛性分離の手法による等張力曲面の 形状解析と膜構造解析

ANALYSES OF ISOTONIC CURVED SURFACE AND MEMBRANE STRUCTURE BY THE
METHOD WITH THE SEPERATION OF THE ELEMENT STIFFNESS.

後藤茂夫^{*}, 荒牧軍治^{**}, 井嶋克志^{***}, 深江葉子^{****}

By Shigeo GOTO, Gunji ARAMAKI, Katsushi IJIMA and Yoko FUKAE

An isotonic curved surface like a soap film modeling by finite elements is a particular structure which differs from actual structure in having only the geometric stiffness without the element stiffness. In this paper, an analytical method on the determination of the shape of the soap film as the initial shape of a membrane structure is shown.

The following properties become evident after some computations.

1. In analyses of soap film structures by finite elements, there are no solutions which satisfy both the equilibrium conditions of the forces and the isotonic conditions simultaneously, the former are sacrifice to satisfy the latter.
2. Though the unbalanced forces of a soap film structure in first two or three iterations of the computations by the tangent stiffness method converge to considerable values, in further iterations the unbalanced forces decrease gradually and monotonously.
3. Even if a state of the soap film structure in over three iterations are used for the initial state of a membrane structure with actual stiffness, the stress deviations of all elements transformed from the unbalanced forces are small pretically enough.

1. まえがき

近年、ブームとなった各地の博覧会の各種パビリオンにおいて膜構造が使用され、その斬新な力学曲面の造形美がより身近なものとなった。最近が高強度の膜材料の開発がなされ、線材等を併用してかなり自由な形状も可能となったが、あくまでも膜構造設計の基本は、応力集中の少ない、力と形との調和のとれた安定した曲面形状を求めることが理想的である。

曲げ剛性のない、張力のみに抵抗できる連続した超軽量の薄膜材で曲面を覆う構造形態を考えれば、自重を無視した場合、内圧と釣合う定張力分布を示す石鹸膜の形成する形状を初期形状として設定することはきわめて合理的であり、その条件下において最小の表面積となる石鹸膜曲面の問題は、古くから微分幾何学、複素関数論また変分学の分野で研究されてきた。

* 工博 佐賀大学教授 理工学部 建設工学科 (〒840 佐賀市本庄町1番地)

** 工博 佐賀大学教授 理工学部 土木工学科 (同上)

*** 工博 佐賀大学助教授 理工学部 建設工学科 (同上)

**** 佐賀大学大学院理工学研究科 建設工学専攻 (同上)

しかしながら、針金などで任意な立体閉曲面をつくり、石鹼液をくぐらせて優美な最小曲面を観察することは出来ても、前記の理論による解析解を得ることはできず、古くは棒断面に関するねじりの応力関数との相似性に着眼した Prandtl の石鹼膜実験以来、等張力曲面を基本形状とする膜構造の初期形状策定には石鹼膜模型が利用されていたようである。

著者らは、有限要素構造物の要素変形と節点変位の適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性を要素固有の剛性から完全に分離して接線剛性法を適用する幾何学的非線形解析手法を任意境界の石鹼膜構造に応用し、合理的な膜構造の初期形状策定の解析的手法を得ることができた。

もちろん、この要素剛性分離の手法は、完成後の膜と線材や骨組みとの合成構造系の幾何学的非線形挙動の解析にも有利な手法であり、荷重の载荷除荷、変位制御もさらに容易に行えるので、各種の膜構造物の

- 1) 初期形状の試策、決定 → 要素の無応力裁断寸法の決定
- 2) 要素剛性の付与、無重力時膜応力・形状の決定
- 3) 自重の载荷 → 完成系の形状、応力の決定
- 4) - 1 風荷重等の载荷による変位応力解析
- 2 空気圧の減圧によるインフレあるいはデフレ時の解析

などを、一貫して同一理論による同一プログラムにより解析することが可能となる。

2. 三角形石鹼膜要素の要素力

表面張力一定の石鹼膜曲面を平面三角形要素による有限要素構造で近似する。

等方性の平面三角形要素に図-1 のような静定な拘束条件を与えたときの要素力式は、ポアソン比を ν 、 $\mu = (1-\nu)/2$ と置いて

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = tE / \{2ab(1-\nu^2)\} \begin{bmatrix} b^2 & ab\nu & 0 \\ ab\nu & a^2+c^2\mu & -bc\mu \\ 0 & -bc\mu & b^2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となるが、表面張力一定のひずみ ε と応力 σ の条件

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (1-\nu) \sigma / E \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

より、式(3)、(4) のように3頂点の節点力の合力は、各底辺と直交しその辺長に比例する。(図-2)

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \sigma t / 2 \begin{bmatrix} b \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (3), \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \sigma t / 2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (4)$$

また、図-3 の辺に沿う辺長力に対しては次式のようなになる。

$$N_i = \sigma t (a_i - c_i d_i / a_i) / 2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

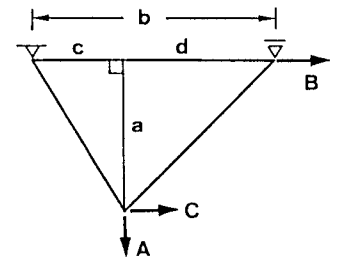


図-1 拘束条件と独立な節点力

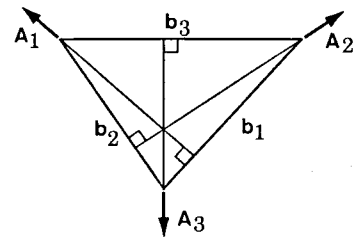


図-2 底辺に垂直な節点力

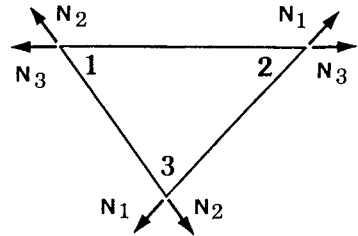


図-3 辺方向の節点力

3. 要素力剛性

これらの要素の通常の意味での面内方向の要素力剛性は存在しないが、一定表面張力下での形状の変化に対する要素力の変化として、式(3)の増分を考えれば

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta B \end{bmatrix} = \sigma t/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、共通座標系に関する頂点*i*の座標値を u_i, v_i, w_i として座標値ベクトルと微小変位ベクトルを

$$\mathbf{u}_i = [u_i, v_i, w_i]^T, \quad \delta \mathbf{u}_i = [\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i]^T \quad \dots\dots\dots (7)$$

と置き要素平面の底辺と垂線の方法余弦ベクトル

$$\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1] / b, \quad \boldsymbol{\beta} = [b \mathbf{u}_3 - c \mathbf{u}_2 - d \mathbf{u}_1] \quad \dots\dots\dots (8)$$

を用いて線形の適合条件を表せば

$$\delta a = \boldsymbol{\beta}^T \delta \mathbf{u}_3 - (c \boldsymbol{\beta}^T \delta \mathbf{u}_2 + d \boldsymbol{\beta}^T \delta \mathbf{u}_1) / b \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\delta b = \boldsymbol{\alpha}^T (\delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となるので、結局、単一要素の共通座標系に関する接線剛性方程式に置ける要素剛性マトリックス $\mathbf{K}_0$ は、次式となる。

$$\mathbf{K}_0 = \sigma t/2b \begin{bmatrix} d(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T) & c \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T - d \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T & -b \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T \\ c \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T - d \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T & -c(\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T) & b \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^T \\ -b \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T & b \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

4. 幾何剛性と接線剛性方程式

三角形要素の辺張力 N_1, N_2, N_3 による接線幾何剛性マトリックスは、三辺をそれぞれ軸方向力部材と考えたときのトラスブロックの接線幾何剛性マトリックスと全く同一となる。

即ち、辺*i*の共通座標系に対する方向余弦を $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ とすれば、その一端を固定した軸方向力部材としての接線幾何剛性マトリックスは

$$\mathbf{k}_i = N_i/b_i \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i^2 & -\alpha_i \beta_i & -\alpha_i \gamma_i \\ -\alpha_i \beta_i & 1 - \beta_i^2 & -\beta_i \gamma_i \\ -\alpha_i \gamma_i & -\beta_i \gamma_i & 1 - \gamma_i^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

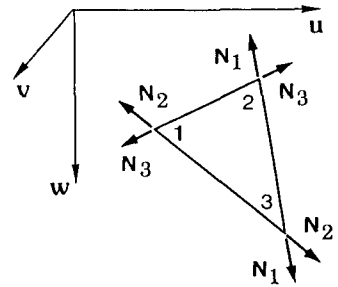


図-4 共通座標系と要素

となり、これを用いて三角形要素の接線剛性方程式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}_1 \\ \delta \mathbf{U}_2 \\ \delta \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{K}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 & -\mathbf{k}_3 & -\mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_3 & \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 \\ -\mathbf{k}_2 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \mathbf{u}_2 \\ \delta \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

なお、 $\mathbf{K}_0$ の影響は6.に示すようにほとんどなく、石鹼膜構造は幾何剛性のみを有する特殊な構造系であると言える。

5. 内圧による面外節点力

一定内圧を受ける石鹼膜を計算する場合、要素の変形により各反復段階毎、各節点に作用する面外節点力の大きさと方向が変化することになるが、一つの要素の3頂点の値は等しく、内圧を p として次のベクトルで表される。

$$P = (u_2 - u_1) \times (u_3 - u_1) p / 6 \quad \dots\dots\dots (14)$$

6. 等張力平面三角形有限要素構造による石鹼膜曲面解析における不平衡力と収束性

通常の要素剛性を有する有限要素構造物の幾何学的非線形解析において、著者らの要素剛性分離の手法による接線剛性法は、荷重増分の大きさが適切な範囲であれば、不平衡力は急速に減少するきわめて良好な収束性状を示す。

完全に幾何剛性のみしか有さない等張力有限要素構造においても、最初の数回の反復でかなりの微少な不平衡力状態へと近づく。

図-5は、正六角形を96個の三角形に要素分割し、膜張力 25kgf/m に対して内圧 10kgf/m^2 を与えた場合の釣合形状を示したものであり、図-6は、その一辺の分割区間数を1～5と増加させたときの中心を通る対角線上の各節点の位置の比較図であり、分割数の増加にともなって一定の曲線上に近づく様子が見られる。

表-1は、図-5における平面を初期状態($n=0$)とする各反復回数とその時の最大不平衡力を示したもので、 δF_0 は要素力剛性 K_0 を考慮した場合、 δF はこれを無視した場合であり、これに限らず、その他全ての計算例においても K_0 を無視した場合の方が1, 2ステップ分有利となった。

後述のように、収束状況が安定すればいつでも実膜構造の無重力時完成形状決定のための先行状態とすることが出来るので、実用的にはほとんど差がないといえるが、プログラムの単純化ともなるので以降の計算は全て K_0 を省略している。

要素力剛性 K_0 を省略した場合の最終段階 $n=11$ における不平衡力を調べてみると、図-5に黒丸で示した隅角近傍点での不平衡力が最大で 0.4713kgf に達するが、その他の全節点に関しては、 $0.0313\sim 0.0599$ とほぼ十分な収束状態に達していることがわかる。

また、緩慢な減少しか示さない隅角近傍点の位置は反復段階毎に次第に支点である隅角点に近づいていく。

一般に、石鹼膜曲面の平面三角形有限要素による近似では、全要素が等張力という条件下で、各内圧節点力とその節点の周りの要素力とが完全に釣合い、全節点での不平衡力が0となる理想的な形状は存在し得ないので、ある程度不平衡力が安定し

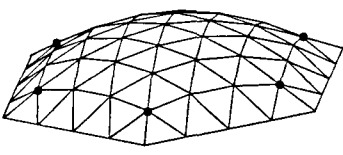


図-5 正六角形石鹼膜の釣合形状

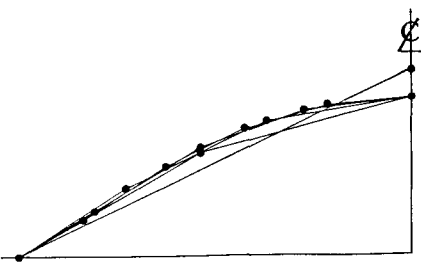


図-6 要素数と対角線形状

表-1

n	δF_0 kgf	δF kgf
0	8.660	8.660
1	2.515	2.515
2	0.702	0.525
3	0.522	0.510
4	0.512	0.507
5	0.509	0.502
6	0.502	0.497
7	0.500	0.492
8	0.495	0.487
9	0.491	0.482
10	0.487	0.476
11	0.482	0.471

た状態で反復計算を打ち切らなければ、最大不平衡力の発生点近傍の節点の移動により当初の要素分割の状態からのずれが大きくなり好ましくない。

なお、現実には石鹼膜を形成することのできる条件下であれば、設定した初期先行状態と目的石鹼膜形状とが極端にかけ離れたものでない限り、解は発散することなく不平衡力は単調に減少し、実用上十分な精度で等張力曲面が得られることが確かめられている。

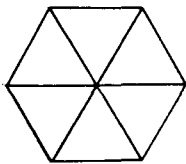


図-7 1自由節点系

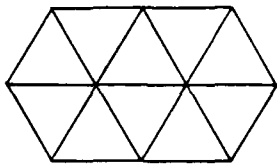


図-8 2自由節点系

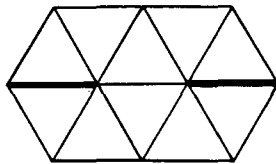


図-9 糸付き2自由節点系

図-7は、最も単純な理論的平衡状態が存在する1自由節点の場合、図-8は、理論的平衡状態が存在しない2自由節点の場合、図-9は、これに太線で示した位置に伸び刚度 1tf/m の弾性糸を張った場合で、膜張力 25kgf/m 、内圧 25kgf/m^2 を与えたときの各不平衡力の推移を表-2に示す。

即ち、理論解がある場合は δF_1 のように2回で十分な収束となるが δF_2 の2自由節点の場合は2回以降不平衡力が漸減するがなかなか収束しない。

図-10は、この間の片方の節点の位置と不平衡力の関係を表す曲面で、鉛直下方に不平衡力、x軸は水平変位、y軸は面外変位を表す。黒丸は各反復段階の解の推移を示したもので、ほぼ2回目からは、不平衡力が最小となる曲面の尾根の部分をとどっていることがわかる。尚、最終的には、2自由節点は一点に重なり不平衡力は0となるが当初の分割の意味はなくなる。

図-9の場合は、弾性糸の伸びが不平衡力を吸収するため収束性はきわめて良好となる(δF_3)。

表-2

n	δF_1 kgf	δF_2 kgf	δF_3 kgf
0	9.623	9.623	9.623
1	0.173	0.270	13.050
2	0.002	0.130	0.556
3		0.128	0.033
4		0.127	0.002
5		0.126	
6		0.124	
7		0.123	
8		0.122	
9		0.120	

表-3

n	δF_4 kgf	δF_5 kgf
0	7.698	23.570
1	126.366	22.393
2	31.817	13.452
3	5.918	1.922
4	0.444	0.087
5	0.319	0.086
6	0.270	0.083
7	0.221	0.080

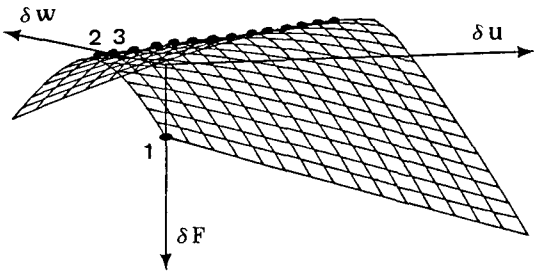


図-10 不平衡力曲面

図-11は、一辺6mの正三角形2個を組み合わせた菱形平面の短対角線に伸び剛度 1tf/mの糸を張った状態を初期状態として、膜張力 25kgf/m、内圧20kgf/m²となる要素数 153の等張力曲面を求めたもので、表-2のδF₄に不平衡力の推移を示す。

反復初期における大きな不平衡力を実剛性のある弾性糸の張力に関するものでだいたい4回以降で安定化の傾向を示す。

図-12～図-16は、同様な正三角形2個を互いに直交する平面としたものを初期状態として、内圧のない最小曲面を求める各反復段階毎の形状を追跡して、その変化の状態を見たもので、表-3のδF₅に不平衡力の推移を示す。

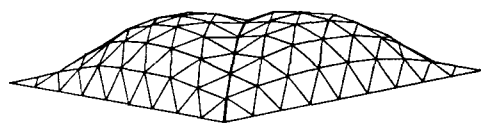


図-11 菱形石鹼膜の釣合形状

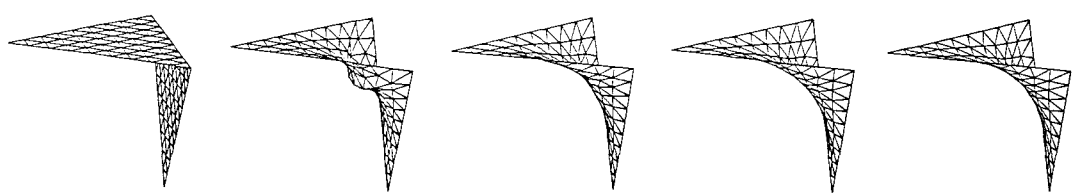


図-12～16 各反復段階毎の石鹼膜形状の変化

7. 要素剛性の付与による残差不平衡力の要素張力偏差への変換

本解析法においては、各反復過程における節点荷重は、その節点を共有する各三角形の面積と方向の変化による面外方向の節点力ベクトルとしての大きさと方向の変動を厳密に考慮して、全要素等張力の条件下での変形後の三角形要素力との釣合を満足する解を得ようとするものであるが、曲面を有限個の三角形要素で近似するため、一般に不平衡力が完全に0となる理論的な平衡状態が存在しない。

したがって、無重力状態での膜構造の完成形状を求める場合、ある程度の反復で不平衡力の収束状態が安定した時点で、これを先行状態として実際の膜構造の要素剛性を付与し平衡状態を算出しなければならない。

しかしながら、全要素が等張力で一定であるが残差不平衡力が存在する石鹼膜構造に、要素剛性を付与して平衡状態を求めれば、不平衡力はなくなるが、前提とする等張力よりの偏差が発生することになる。

すなわち、不平衡力の吸収により発生する張力偏差とその結果として先行状態となる石鹼膜形状よりの移動量の大きさが問題となるが、いくつかの試算の結果、数回の反復により不平衡力の大きさが安定すれば、その時点で実膜の要素剛性を付与して合理的な膜構造無重力時の完成形状が得られることを確認した。

以下に、そのための簡単な計算例を示すことにする。

なお、要素剛性のない石鹼膜においては、等張力である石鹼膜応力σとその時点の要素寸法によって要素力は決まっても無応力時の寸法というものは存在しない。したがって、実膜要素の要素力剛性を無重力時の寸法を基準とする線形剛性と仮定すれば、置き換えるべき石鹼膜要素と要素力を等しくする実膜要素の応力σ_o。およびひずみεは

$$\sigma_o = (1 + \epsilon) \sigma \qquad \epsilon = (1 - \nu) \sigma_o / E \qquad \cdots \cdots \cdots (15)$$

より求めなければならない。

ここでは、前節の図-5の正六角形を24分割した場合について石鹼膜としての等張力曲面計算を行い、

その反復回数 $n=1, 2, \dots, 10$ 各段階で等方性で弾性係数と膜厚の積が $Et=0.12tf/m$ 、ポアソン比が 0.4 となる膜要素を石鹼膜要素と置き換え（次の段階から膜としての要素剛性を付与する）、膜構造としての無重力時の形状を求めた。

表-4 の $n=0$ の横列の数値は、置換前の石鹼膜構造（幾何剛性のみ）としての不平衡力の収束状況（例えば δF_5 の最上段の数値は反復回数 5 回目の最大不平衡力の値）、縦列はその各反復段階を先行状態とする膜要素置換後の収束状況を示したもので、許容不平衡力は 0.05kgf としている。

表-4 (kgf)

n	δF_0	δF_1	δF_2	δF_3	δF_4	δF_5	δF_6	δF_7	δF_8	δF_9	δF_{10}
0	17.3205	2.6235	0.4903	0.3642	0.3400	0.3201	0.3017	0.2845	0.2684	0.2534	0.2393
1		0.4739	0.0644	0.0285	0.0239	0.0216	0.0198	0.0181	0.0166	0.0152	0.0140
2		0.0247	0.0075	0.0041	0.0036	0.0034	0.0032	0.0030	0.0029	0.0027	0.0025
3		0.0049	0.0009	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
4		0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

また表-5 は、それぞれの膜構造としての収束状態における先行状態からの節点の最大移動量 Δw (mm)、各要素の最大及び最小主応力 σ_{t1} 、 σ_{t2} を示したものである。なおこの場合、石鹼膜の単位幅等張力 25kgf/m に対する膜構造としての値は、式(15)より $\sigma_{et}=28.57\text{kgf/m}$ となる。

すなわち、膜構造の無重力時の完成形状策定のための幾何剛性みの石鹼膜形状計算の反復回数は、不平衡力が急減して安定するせいぜい 4 回ぐらいで十分であり、これより膜要素剛性を付与して 2～3 回の反復ではほぼ均一な主張力の目的状態が得られていることが解る。

8. 結言

曲げ剛性のない張力のみに抵抗できる薄膜構造の合理的な無重力時の完成形状は、理想的には膜の全位置、全方向において等張力となる状態である。

このような条件を満たし、与えられた境界と空間を覆う膜構造物の形状を解析的に求めようとする場合、実際に使用する膜材の物理特性を考慮した膜要素構造として解析する手法でのアルゴリズムの確立はきわめて煩雑であり問題がある。この理想的な条件は、一定の空気圧を受ける石鹼膜構造として知られており、構造解析的には、その面外方向に要素剛性はないが全方向一定張力という条件下で幾何剛性のみで面外方向の内圧力と釣り合っている、無応力状態の存在しない構造系である。

著者らは、このような石鹼膜構造を要素剛性のない幾何剛性みの三角形有限要素構造として、要素剛性分離の手法の最も単純明解な幾何剛性を用いて接線剛性法により解析を行い、これを膜構造物の無重力完成形状を決定するための先行状態とすることを検討した。

表-5

n	Δw	σ_{t1}	σ_{t2}
1	74.7	31.00	29.19
2	12.9	28.96	28.59
3	7.2	28.92	28.50
4	6.1	28.88	28.50
5	5.5	28.86	28.50
6	5.0	28.83	28.50
7	4.5	28.81	28.50
8	4.1	28.79	28.50
9	3.8	28.78	28.50
10	3.5	28.76	28.50

その結果、石鹼膜構造の形状解析では、数回で不平衡力は急減するが以降は漸減が続き、不平衡力が安定すれば全体を包括する曲面はほとんど変化せず、ただ各節点はその曲面上を移動する傾向を示す。

また、不平衡力が安定すれば、どの時点であっても実膜の要素剛性を付与した構造系の先行状態として、以降は1～2回で急速に収束し、張力偏差も事実上十分に小さくなることが確かめられた。

参考文献

- 1) 土木学会編：構造力学公式集例題集，pp. 1～5, 1980.
- 2) 後藤茂夫：立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化，土木学会論文報告集，No. 335，pp. 1～11, 1983.
- 3) 後藤茂夫・井嶋克志・深江葉子：要素剛性分離の手法による等張力曲面解析，平成元年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集，pp. 18～19
- 4) 低平地防災技術研究会：膜構造建築物の現況と展望，1989. 12.
- 5) 後藤茂夫・深江葉子・木元秀満：要素剛性分離の手法による等張力曲面の形状解析と膜構造解析，第45回年次学術講演会講演概要集，pp. 48～49, 1990.

(1990年10月12日受付)