

混合ハイブリッド有限要素法を用いた弾性シェル構造物の有限変位解析

A FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS
OF ELASTIC SHELL STRUCTURES
BY A MIXED-HYBRID FINITE ELEMENT METHOD桜井 孝昌* D. KARAMANLIDIS** 西野 文雄***
By Takamasa SAKURAI, D. KARAMANLIDIS and Fumio NISHINO

A formulation of geometrical nonlinear shell problems with a doubly curved triangular shell element is presented. Each element has 18 degrees of freedom (6 degrees of freedom per nodal point and 3 nodal points in a element). In the numerical analysis, the method of FEM with removal of rigid body motion is employed and the large rotational angles of deformed shell is treated rigorously. A few numerical examples are presented to illustrate the advantage of the proposed scheme.

1. まえがき

弾性シェル構造物の有限変位解析に於て重要なテーマとされているのは、

1) 変形に伴う有限回転角を精度良く解析できる理論の確立^{1), 2)}、と 2) その数値解析の手法である。任意形状のシェルの有限変位解析に関する数値解析の手法として離散化解析の方法が採られる場合が多いが、この手法を大別すると、

- 1) 合応力-変位関係式に高次の微小項まで採り、高精度の支配方程式を定式化する方法³⁾。
- 2) 合応力-変位関係式は低次の微小項まで採って簡略化し、離散化要素の有限変位を幾何学的に精度良く評価する^{4), 5), 6), 7)}。

の2つの方法があげられる。1)の手法は離散化した要素に多くの自由度を持たせ、個々の要素が大きく変形する場合でも精度のよい解が得られるように考慮されているが、支配方程式が繁雑となる。2)の手法では個々の要素を小さく選びそれに伴って要素の自由度も少なく選ぶ。このように選ぶことにより個々の要素の変位は大きいか剛体変位を除いた変形は小さいとして解析する方法である。この方法では支配方程式が簡明に表せる利点がある。両者の方法共解析に当っては有限回転角をベクトルとして扱うと誤差が生じる為

*工博 豊田工業高等専門学校教授土木工学科 (471 愛知県豊田市栄生町2-1)

**D. Eng. University of Rhode Island Department of Civil Engineering, Ass. Professor
(Kingston, RI 02881 USA)

***工博 Ph.D. 東京大学教授工学部土木工学科 (113 東京都文京区本郷7-3-1)

その処理を適切に行う必要がある。精度の良い解が得られかつ解析が容易であることから2)の手法の方が有利であると考えられる。

桜井、忠、西野は3角形薄板要素を用いて剛体変位除去の手法により、有限回転を伴うシェル構造物の有限変位解析⁵⁾を行い有効な結果を得ている。本論文に於てはシェル構造物の解析手法の精度をさらに向上させるため、3角形薄板要素の代わりに3角形シェル要素を用いて同様の手法で解析した。この3角形シェル要素は3角形板要素と同じく、3節点18自由度に選り、シェル面は放物面で近似した。要素剛性マトリックスの定式化には要素内部で変位と応力の両者を未知数に選ぶ混合ハイブリッド有限要素法を用いた。

2. 解析方法の概要

解析方法を簡明に説明するために、3次元弾性体に関して定式化の方法を述べる。3次元物体内に3次元直交デカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) を採る。物体の全ポテンシャルエネルギーを π_p と表すと、

$$\pi_p = \int \int \int A(u_i) dv + WEF, \quad WEF = - \int \int \int f^g_i u_i dv - \int \int T^g_i u_i ds \quad (1), (2)$$

ここに、 $A(u_i)$ はひずみエネルギー関数を表す。WEFは作用力による外力仕事 (Work of Externally Applied Force) を表し、 f^g_i 、 T^g_i はそれぞれ物体内部および物体表面に作用する外力を、 u_i ($i=1, 2, 3$) は変位を表す。ローマ下添字 i に関しては総和規約を適用し、以下特に断らない限り同様とする。 dv および ds はそれぞれ体積および表面積に関する積分を表す。ここで、グリーンのひずみテンソルを e_{ij} と表すとひずみ-変位関係式は、

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) / 2 \quad (3)$$

と表される。ここに、 $(\cdot, \cdot)$ は x_i による微分を表す。キルヒホッフの応力テンソルを σ_{ij} と表し、補ひずみエネルギー関数を $B(\sigma_{ij})$ と表すと、ひずみエネルギー関数 A は補ひずみエネルギー関数 B によって

$$A = \sigma_{ij} e_{ij} - B \quad (4)$$

と表される。式 (3) を (4) に代入すると、

$$A = \sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ij} u_{k,i} u_{k,j} / 2 - B \quad (5)$$

の関係が求まる。式 (5) を式 (1) に代入し、次の部分積分

$$\int \int \int \sigma_{ij} u_{i,j} dv = - \int \int \int \sigma_{ij,i} u_j dv + \int \int \sigma_{ij} \nu_j u_i ds \quad (6)$$

および、物体力を考えない場合のつり合い式

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (7)$$

を用いると式 (1) は、

$$\pi_p = - \int \int \int B d v + \int \int \int \sigma_{ij} u_{k,i} u_{k,j} / 2 d v + \int \int \sigma_{ij} \nu_j u_i d s + W E F \quad (8)$$

と表される。この式はHellinger-Reissnerの式として知られている⁸⁾。ここで応力ベクトルを β 、節点変位ベクトルを Δu と表す。領域内の変位 u_i は形状関数を介して Δu で表すことができる。以上の諸量を用いると、式(8)の右辺第1, 2, 3項はそれぞれ

$$\int \int \int B d v = \sum_m \beta^T H \beta / 2, \quad \int \int \int \sigma_{ij} u_{k,i} u_{k,j} / 2 d v = \sum_m \Delta u^T K^o \Delta u / 2 \quad (9), (10)$$

$$\int \int \sigma_{ij} \nu_j u_i d s = \sum_m \beta^T G \Delta u \quad (11)$$

と表される。ここに、 ν_j は境界面の方向余弦を、 m は離散化された要素数を表す。式(9)の H 、式(10)の K^o および式(11)の右辺の G はこの式の左辺の積分によって定義される構成マトリックス、幾何剛性マトリックスおよび境界線の幾何学的条件によって計算されるマトリックスである。式(9)、(10)および(11)を式(8)に代入すると、

$$\pi_p(\beta, \Delta u) = \sum_m (-\beta^T H \beta / 2 + \Delta u^T K^o \Delta u / 2 + \beta^T G \Delta u) + W E F \quad (12)$$

と求まる。 π_p の β に関する第1変分を採り、ポテンシャルエネルギーの停留条件を適用すると

$$\delta \pi_p = \sum_m \delta \beta^T (\partial \pi_p / \partial \beta) = \sum_m \delta \beta^T (-H \beta + G \Delta u) = 0 \quad (13)$$

と表される。式(13)より β は

$$\beta = H^{-1} G \Delta u \quad (14)$$

と求まる。式(14)を(12)へ代入すると、

$$\pi_p(\Delta u) = \sum_m \Delta u^T (K + K^o) \Delta u / 2 + W E F \quad (15)$$

と求まる。ここに、 K は微小変位の剛性マトリックスで、マトリックス H の対称性を考慮すると

$$K = G^T H^{-1} G \quad (16)$$

と求まる。式(15)の π_p の Δu に関する停留条件より、

$$\delta \pi_p = \sum_m \delta \Delta u^T (K + K^o) \Delta u + \delta (W E F) = 0 \quad (17)$$

と求まり、式(17)より剛性方程式が求まる。

3. 薄肉シェル要素による定式化

数値解析は有限要素法を利用して行い、要素はFig. 1に示す3角形薄肉シェル要素を用いる。Fig. 1に示す様に、3次元空間固定座標系 $[I_1, I_2, I_3]$ と3次元局所座標系 $[i_1, i_2, i_3]$ を定義する。これらの座標ベクトルは右手系単位ベクトルでそれぞれの座標系内では互いに直交する様を選ぶ。3角形要素の節点を①、②、③と表し、節点①-②線上の座標ベクトルを i_1 、節点①、②、③を結ぶ3角形平面上に i_2 およびこの平面の法線方向に i_3 とする。 i_1 、 i_2 、 i_3 方向の変位ベクトルおよび回転ベクトルを

$$\begin{aligned} u &\equiv [u_1 \quad u_2 \quad w]^T \\ \theta &\equiv [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \end{aligned} \quad (18)$$

と定義する。シェルのポテンシャルエネルギーを π_{ps} と表し、この式を板厚方向に積分すると π_{ps} は、

$$\begin{aligned} \pi_{ps}(N, M, u^b, w^b) = & \sum_m \left\{ - \int \int (N^T D_m N + M^T D_b M) / 2 \, dA + \int N_{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta} / 2 \, dA \right. \\ & \left. + \int (T_\alpha u^b_{,\alpha} + T_3 w^b + M_{\nu\alpha} w^b_{,\nu}) \, ds \right\} + WEF \end{aligned} \quad (19)$$

と求まる。ここに、 dA はシェル中央面での面積積分を、 ds は要素境界線での線積分を表す。 $u^b_{,\alpha}$ および w^b は境界線上の α ($\alpha=1, 2$) および3の方向の変位を、 N および M はそれぞれシェルの断面に生じている応力の板面内応力ベクトルおよびモーメントベクトルを表し、

$$N \equiv [N_{11} \quad N_{22} \quad N_{12}]^T, \quad M \equiv [M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12}]^T \quad (20)$$

と表される。 D_m および D_b はそれぞれ面内力およびモーメントに対応する構成マトリックスで、

$$D_m \equiv (1/Eh) D, \quad D_b \equiv (1/2/Eh^3) D \quad (21)$$

と表される。ここに、 h は板厚を表し、 D はヤング率 E 、ポアッソン比 ν を用いて次の様に表されるマトリックスである。

$$D \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (22)$$

T_α 、 T_3 および $M_{\nu\alpha}$ は境界線上の応力で、

$$T_\alpha = N_{\alpha\beta} \nu_\beta, \quad T_3 = (M_{\alpha\beta, \beta} + N_{\alpha\beta} z_{,\beta}) \nu_\alpha, \quad M_{\nu\alpha} = M_{\alpha\beta} \nu_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (23)$$

と表される。ここに、 ν_α は要素平面内における境界線の方角余弦を表す。外力が節点のみに作用する問題

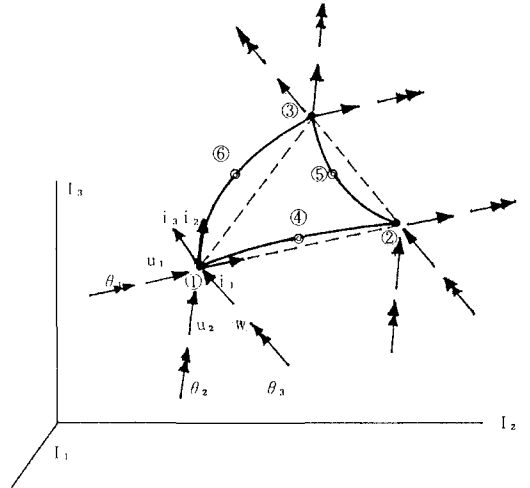


Fig.1 Triangular Shell Element and Definition of Coordinates

を扱うものとする、つり合い式および変位境界条件は、

$$N_{\alpha\beta, \beta} = 0, \quad M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} z, \beta),_{\alpha} = 0 \quad \text{in } A_n (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (24)$$

$$u^b_{, \alpha} - u^g_{, \alpha} = 0, \quad w^b - w^g = 0, \quad w^b_{, \alpha} - w^g_{, \alpha} = 0 \quad \text{on } C_{un} (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (25)$$

ここに、 A_n は板面内を、 C_{un} は変位を与える境界線を表す。 u^g および w^g は既知変位を表す。式(23)および(24)における z は板平面を基準とする要素内のシェル中央面の高さを表わし、ここでは次の式で表される曲面を採用する。

$$z(x_1, x_2) = C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_2 + C_4 x_1^2 + C_5 x_1 x_2 + C_6 x_2^2 \quad (26)$$

ここに、 $[x_1, x_2, z]$ はFig. 1に示す $[i_1, i_2, i_3]$ 座標系の座標値を表す。シェルの要素境界線上の z の値としてFig. 1の要素の節点①、②および③で $z=0$ と選び節点④、⑤および⑥はそれぞれの線分の中点に選びそれらの z の値を z_4, z_5, z_6 とする。面積座標を L_i ($i=1, 2, 3$)で表すと、要素内の z は

$$z(L_i) = [4 L_1 L_2 \quad 4 L_2 L_3 \quad 4 L_1 L_3] [z_4 \quad z_5 \quad z_6]^T \quad (27)$$

と表される。ここで、応力および変位を次の様に仮定する。

$$N_{\alpha\beta} = \text{Constant}, \quad M_{\alpha\beta} = x_1, x_2, z \text{ に関する 1 次式} \quad \text{in } A_n (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (28)$$

$$u_{\alpha} = x_{\alpha} \text{ の 1 次式}, \quad w = x_{\alpha} \text{ の 3 次式} \quad \text{in } A_n \quad (i=1, 2, 3, \alpha=1, 2) \quad (29)$$

$$u^b_{, \alpha} = \text{境界線座標 } s \text{ の 1 次式}, \quad w^b = s \text{ の 3 次式}, \quad w^b_{, \alpha} = s \text{ の 1 次式} \quad \text{on } C_{un} (\alpha=1, 2) \quad (30)$$

ここに、 $(\quad, n)$ は板面内の境界線 s と直交し板面内にある座標 n による微分を表す。境界線上で式(30)で定義した様に変位 u_{α} および w を選ぶと、境界線上のたわみおよびたわみ角の連続性が保証される。式(28)の条件を与える応力 $N_{\alpha\beta}$ および $M_{\alpha\beta}$ は次の様に選んだ。

$$\begin{aligned} N_{11} &= \beta_1, \quad N_{22} = \beta_2, \quad N_{12} = \beta_3, \\ M_{11} &= -z \beta_1 + x_1 \beta_4 + x_2 \beta_5 + \beta_6, \quad M_{22} = -z \beta_2 + x_1 \beta_7 + x_2 \beta_8 + \beta_9, \\ M_{12} &= M_{21} = -z \beta_3 + x_1 \beta_{10} + x_2 \beta_{11} + \beta_{12} \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)で定義した応力を用いると式(24)のつり合い式は恒等的に満足される。式(29)で定義した変位関数は次式の様に選んだ。

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 + A_2 x_1 + A_3 x_2, \quad u_2 = A_4 + A_5 x_1 + A_6 x_2 \\ w &= B_1 + B_2 x_1 + B_3 x_2 + B_4 x_1^2 + B_5 x_1 x_2 + B_6 x_2^2 + B_7 x_1^3 + B_8 (x_1 x_2^2 + x_2^3) + B_9 x_2^3 \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、式(32)は式(10)で定義されている幾何剛性マトリックス K^g を計算するのに用い、式(16)で定義されている微小変位の剛性マトリックス K の計算には用いない。式(30)で定義した境界線上の変位関数は次式の様に選んだ。

$$\begin{aligned} u^b_{, \alpha} &= (1 - \xi) / 2 u_{\alpha i} + (1 + \xi) / 2 u_{\alpha j}, \quad w^b = f_1 w_i + f_2 w_{, s i} + f_3 w_j + f_4 w_{, s j} \\ w^b_{, n} &= (1 - \xi) / 2 w_{, n i} + (1 + \xi) / 2 w_{, n j} \end{aligned} \quad (33)$$

ここに、

$$\begin{aligned} f_1 &= (\xi^3 - 3\xi + 2) / 4, & f_2 &= 1 (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) / 8 \\ f_3 &= (-\xi^3 + 3\xi + 2) / 4, & f_4 &= 1 (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) / 8, & \xi &= (2s - 1) / l \end{aligned} \quad (34)$$

ここに、下添字 i および j は節点 i と j における諸量を表し、 l は節点 i と j を結ぶ直線長、 s は節点 i を原点とする境界線上の位置を表す。

これらの関数を用いて式 (19) のポテンシャルエネルギー π_{ps} の停留条件より式 (17) で示されているシェル要素に関する要素剛性マトリックス K および K^0 が求まる。解が収束した状態の要素座標系 i_s に関する3角形シェル要素の要素剛性方程式を、

$$F = (K + K^0) u^0 \quad (35)$$

と表す。 F は節点応力成分、 K および K^0 はそれぞれ3角形シェル要素に関する微小変位理論におけるシェルの要素剛性マトリックスおよび3角形板要素に関する幾何剛性マトリックスである。 u^0 は節点変位および節点の回転成分を表す。ただし、Fig. 1に示す要素座標系 i_s の回りの回転成分 θ_s に対応する剛性マトリックスの成分は、本解析では全てゼロと計算される。

4. 数値解析例

前節で述べた解析手法により、離散化した3角形シェル要素の座標系を剛体変位除去後の座標系 $[i_1, i_2, i_3]$ に選び、要素剛性マトリックス $K + K^0$ を計算する。これらの要素剛性マトリックスの内 K は微小変位理論に対応する要素剛性マトリックスで、要素境界線上のたわみとたわみ角の連続性を満足している C^1 クラスのマトリックスである。これに対して幾何剛性マトリックス K^0 は定式化を容易にするため要素境界線上でたわみ角の連続性が満足されていない C^0 クラスの剛性マトリックスを用いた。薄板3角形要素を用いた数値解析に関しては、この K と K^0 の組み合わせによって解析を行い良好な結果を得ている⁵⁾。

式 (35) で定義した要素剛性方程式における節点変位ベクトル成分および回転ベクトル成分 u^0 は離散化した個々の要素に関して、剛体変位および剛体回転を除いた節点の変位量であることから、離散化する要素を小さくすることによりこの値を微小にすることができる。このことを利用して、節点における曲面の有限回転後の方向は剛体変位後の座標ベクトル i_1, i_2, i_3 および節点の微小回転角で計算できる。本解析はこの方法により有限回転するシェル構造物の有限回転を精度良く処理した⁵⁾。

数値解析を実施する場合は式 (19) の面積積分 dA および線積分 ds に関して、それぞれ3角形板要素および節点間の直線上で積分する。要素が曲面であることは式 (23) および式 (24) 第2式の z, θ の項で考慮されているが、要素面内および境界線上の積分においては平面および直線で近似した。これらの積分による誤差は円筒の場合で中心角が $\pi/8$ に対して0.6%と微小である。文献9) は本論文を用いてシェル構造物の微小変位解析を行っているが、この様な積分の近似によっても良好な結果が得られることが円筒の微小変位解析によって確かめている⁹⁾。この積分近似の方法によって求まる式 (35) の幾何剛性マトリックス K^0 は3角形板要素の幾何剛性マトリックスと同じとなる。このことは式 (19) 右辺第2項が平板要素の対応する式と同じになることによる為である。式 (35) の要素剛性方程式を用い、有限回転角を用いない剛体変位除去の手法により有限変位解析を行うことができる。この手法は文献5) に詳述してある。

Fig. 2は2周辺に分布荷を受ける4周辺単純支持平板の有限変位解析例である。この平板は図中に示す初期変位 w_0 を有し、荷重作用辺では作用方向(Fig.2左の x_1 軸)の変位を一樣とする条件で解いた。解

析では2軸対称とし、平板の1/4について解いた。要素分割数を3種類選び、3角形シェル要素を用いて計算した。図の縦軸には分布荷重の合力Pを無次元化した値 Pb/Eh^3 を採った。ここに、 b 、 E および h はそれぞれ平板の辺長、ヤング係数および板厚を表す。横軸には板中央点Cにおける初期変位 w_0 と z 方向変位 w の和を板厚で除した値 $(w_0+w)/h$ を採り、荷重-変位関係をプロットしCoanの結果¹⁰⁾と比較した。分割数 3×3 でCoanの結果と良く一致する解が得られており、本解析法による解の妥当性が検証できた。

Fig. 3は図の左上に示すパイプの中央点に集中荷重が作用する場合の解析例である。パイプの両端は自由端とし、対称性を利用してパイプの1/8領域について解析した。3角形シェル要素による解析結果の収束の精度を検討する為、3角形板要素を用いた計算も行い、両者の結果を比較した。Nolte³⁾等は1要素54自由度の3角形シェル要素を8要素(4×1)用いて解き、図の実線に示すつり合い曲線を得ている。これらの結果は本解析で1要素18自由度の3角形シェル要素を8要素(4×1)用いた結果と一致した。さらに、板要素で解いた結果を本解析のシェル要素による結果と比較すると、シェル要素の結果のほうが精度の良い解が得られている。このことから、この計算例で見る限り、本研究で定式化した3角形シェル要素は少ない未知数で良い精度の解が得られることが検証できた。但し、剛性マトリックス K を計算するのにシェル要素の場合は、数値積分を用いる為板要素に比較して計算時間が長くなる。

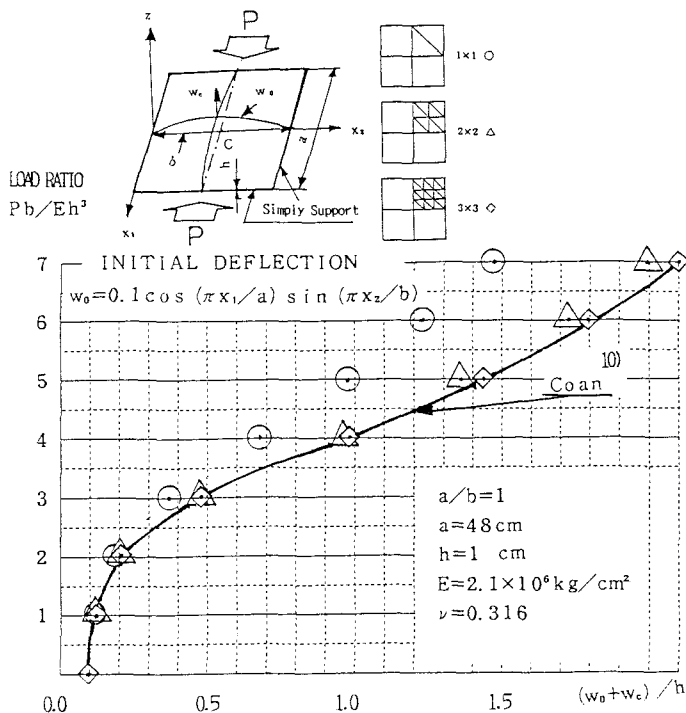


Fig.2 Load-Deflection Curve of Plate

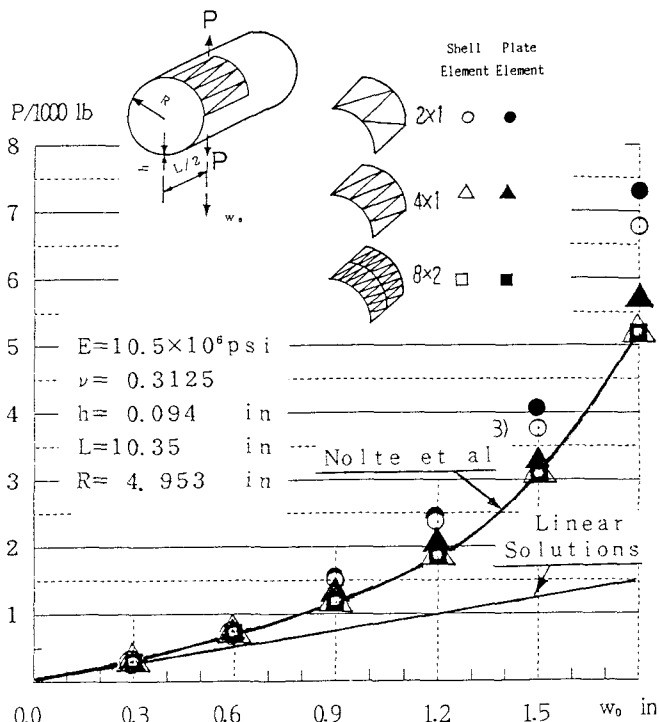


Fig. 3 Load-Deflection Curve of Cylindrical Tube

5. おわりに

以上の結果をまとめると、

- (1) 混合ハイブリッド有限要素法を用い、要素の幾何形状を放物面で近似して、18自由度の3角形シェル要素の剛性マトリックスを定式化した。
- (2) 有限変位解析を行うに当っては、剛体変位後の要素の平面を基準座標とすると、要素の変形は微小として扱える剛体変位除去の手法を用いて、有限回転を精度良く処理した。この手法に適するシェル要素としては、要素の剛体変位は大きくてもよいが、要素の変形は小さいことが必要である。これらの条件に対して本研究で用いた3角形シェル要素は特に適している要素と言える。
- (3) 本研究で示した解析例で見る限り、1要素54自由度の高精度のシェル要素を用いた場合および3角形薄板要素を用いた場合に比較して、本解析で示した3角形シェル要素を用いた結果はより少ない未知数で同程度の精度の解がえられた。

参考文献

- 1) Sakurai, T., Hasegawa, A., and Nishino, F.: A Finite Displacement Formulation of Elastic Shells Proc. of JSCE, No.330, pp. 151-159, February 1983.
- 2) Iura, M. and Hirashima, M.: Lagrangian Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells with Finite Rotations, Proc. of JSCE No.344/I-1, pp. 153-163, April 1984.
- 3) Nolte, L. P. :, On the Derivation and Efficient Computation of Large Rotation Shell Models, Finite Rotations in Structural Mechanics 1985, Lecture Notes in Engineering, Series 19, Springer-Verlag 1986.
- 4) 吉田裕・増田陳紀・松田隆：薄板で構成される立体構造物の弾塑性・大変位離散化要素解析法。土木学会論文報告集 第288号, pp. 41-55, 1978年8月。
- 5) Sakurai, T., Chu, K., and Nishino, F. :, A Numerical Analysis of Finite Displacement Problems of Elastic Shell Structures, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng. Vol.3 No.1, pp.1-10, April 1986(Proc. of JSCE No.368/I-5).
- 6) 鈴木敏郎・金子洋文：有限要素法による部材構成板要素の座屈及び座屈後挙動の大変形解析, 日本建築学会論文報告集 316号 pp. 9-17, 1982年 6月。
- 7) Stander, N., Matzenmiller, A., and Ekkenhard, R.: An Assessment of Assumed Strain Methods in Finite Rotation Shell Analysis, Eng. Comput., Vol. 6, pp. 58-66, March 1989.
- 8) Washizu, K. : Variational Methodes in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press Ltd., Oxford 1968.
- 9) Karamanlidis, D. and Jasti, R. : Free-Form Shell Analysis by a Mixed-Hybrid Finite Element Approach, Ingenieur-Archiv 57, pp. 456-466, 1987.
- 10) Coan, J. M. : Large-Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Appl. Mech., pp. 143-151, June, 1951.

(1990年10月12日受付)