

矩形板の幾何学的非線形問題の一解析法

GEOMETRICAL NONLINEAR ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATE

森田千尋* 崎山毅** 松田浩***

by Chihiro MORITA, Takeshi SAKIYAMA and Hiroshi MATSUDA

In this paper, an approximate method for analyzing the geometrical nonlinear problems of rectangular plates is proposed. The solutions of partial differential equations of rectangular plates are obtained in discrete forms by applying the numerical integration, and they give the transverse shear forces, twisting moment, bending moments, rotations, deflection, in-plane displacements and membrane forces at all discrete points. The nonlinear problems are solved by the iteration and the load incremental procedure.

As the applications of the present method, geometrical nonlinear problems of rectangular plates with four types of boundary conditions are calculated.

1. 序 言

矩形板が外力を受けて変形する場合、その変形が微小である場合には、通常、荷重と矩形板の変形は比例的であり、その挙動は線形である。しかしながら、矩形板の変形量が板厚に近い大きさになると面内力は変形の影響を受けて変化し、また、それらの面内力は変形に影響を与えるため、荷重と変形の関係は線形とはならず、矩形板は非線形挙動をすることになる。

一般に、このような非線形挙動を支配する基礎微分方程式は非線形であり、直接それを解いて矩形板の挙動を解析することは容易ではない。そのため、矩形板の非線形挙動の解法として、有限要素法、差分法をはじめ、いくつかの近似解法、数値解法が提案されている。

著者らは、先に、1つの境界辺に単純支持部と固定部が共存するような複合境界を含めて、最も一般的な境界条件、荷重条件および変厚性状の下で、変厚矩形板の弾性¹⁾および非弾性曲げ問題²⁾、自由振動³⁾や面外座屈⁴⁾などの固有値問題などを、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、変厚矩形板の基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づく変厚板の解法を提示した。

本論文は、先に著者らが提示した変厚矩形板の曲げ問題に対する離散化手法を、任意の境界条件および荷重条件を持つ変厚矩形板の幾何学的非線形問題の解析へ拡張したものである。数値解析例として四辺固

* 工修 長崎大学助手 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

** 工博 長崎大学教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

*** 工博 長崎大学講師 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

定板、四辺単純支持板（ピンおよびローラ）、および対辺単純支持他対辺固定板の解析結果を示す。

2. 矩形板の基礎微分方程式

矩形板のせん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x 、たわみを w とすれば、板の横荷重のほかに板の中央面に作用する面内力 N_{xy}, N_y, N_x を受けた場合、Fig. 1に示すような変厚板を含む一般的な矩形板の曲げに関する基礎微分方程式は、せん断変形の影響を考慮したMindlin理論に基づいて、次の増分形の連立偏微分方程式となる。

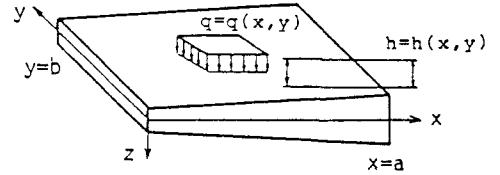


Fig. 1 矩形板

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} - \frac{N_x - \nu N_y}{(1 - \nu^2)D} \Delta M_x - \frac{N_y - \nu N_x}{(1 - \nu^2)D} \Delta M_y - \frac{2N_{xy}}{(1 - \nu)D} \Delta M_{xy} + \Delta q + \Delta N_c = 0 \quad (1. a)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1. b) \quad \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{2 \Delta M_{xy}}{D(1 - \nu)} \quad (1. f)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1. c) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa G h} \quad (1. g)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{\Delta M_x}{D} \quad (1. d) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa G h} \quad (1. h)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{\Delta M_y}{D} \quad (1. e)$$

また、板の中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v とすれば、面内力 N_{xy}, N_y, N_x との間には次のような関係がある。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1. i) \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \Delta W_{xc} = \frac{\Delta N_x}{D} \quad (1. k)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1. j) \quad \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \nu \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta W_{yc} = \frac{\Delta N_y}{D} \quad (1. l)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \Delta W_{xyc} = \frac{2 \Delta N_{xy}}{F(1 - \nu)} \quad (1. m)$$

ここに、 $q=q(x, y)$:横荷重強度、 ν :ポアソン比、 $D=Et^3/[12(1-\nu^2)]$:板の曲げ剛度、 E :弾性係数、

$h=h(x, y)$:板厚、 $\kappa=5/6$:せん断修正係数、 $G=E/[2(1+\nu)]$:せん断弾性係数、

$F=Et/(1-\nu^2)$:板の面内剛度、 Δ :荷重増分 Δq に対する各断面力および変形量の増分、

$\Delta N_c, \Delta W_{xc}, \Delta W_{yc}, \Delta W_{xyc}$:各増分荷重段階における不平衡力および非線形項(Appendix I)

次の無次元量、

$$X_1 = a^2 Q_y / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_3 = a M_{xy} / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_4 = a M_y / [D_0(1 - \nu^2)],$$

$$X_5 = a M_x / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x, \quad X_8 = w/a, \quad \eta = x/a, \quad \zeta = y/b$$

を用いると、例えば式(1. e)は、

$$\frac{\partial \Delta X_6}{\partial \zeta} + \nu \mu \frac{\partial \Delta X_7}{\partial \eta} = I \Delta X_4$$

と無次元化され、 $\partial \Delta X_6 / \partial \zeta$, $\partial \Delta X_7 / \partial \eta$, ΔX_4 の係数を各々、 $F_{156}=1$, $F_{257}=\nu \mu$, $F_{354}=-I$ と表わすと、式(1. a)～(1. h)の各式は、次式のように1つの式で書き表わされる。

$$\sum_{s=1}^8 \left[F_{1ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} \Delta X_s \right] + f_{1t} = 0 \quad (2. A)$$

($t=1, 2, \dots, 8$)

同様にして次の無次元量、

$$X_9=v/a, X_{10}=u/a, X_{11}=a^2 N_{xy}/[D_0(1-\nu^2)], X_{12}=a^2 N_y/[D_0(1-\nu^2)], X_{13}=a^2 N_x/[D_0(1-\nu^2)]$$

を用いると、式(1. i)～(1. m)は次のように簡単に書き表わされる。

$$\sum_{s=9}^{13} \left[F_{4ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \zeta} + F_{5ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \eta} + F_{6ts} \Delta X_s \right] + f_{2t} = 0 \quad (2. B)$$

($t=9, 10, \dots, 13$)

ここに、 F_{kts} , f_{kt} : Appendix II, a, b : 矩形板の横縦の辺長, $\mu=b/a$, h_0 : 基準板厚,

$$I = I(x, y) = \mu (1-\nu^2) (h_0/h)^3, J = J(x, y) = 2\mu (1+\nu) (h_0/h)^3, K = K(x, y) = E h_0^3 / (12 \kappa G a^2 h),$$

$$L_1 = L_1(x, y) = \mu (1-\nu^2) h_0^3 / (12 a^2 h), L_2 = L_2(x, y) = \mu (1+\nu) h_0^3 / (6 a^2 h), \bar{D} = \bar{D}(x, y) = (h_0/h)^3,$$

$$D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]: \text{基準板剛度}, \bar{q} = \mu q a^3 / [D_0(1-\nu^2)], \bar{N}_c = \mu N_c a^3 / [D_0(1-\nu^2)]$$

式(2. A), (2. B)を用いて、矩形板の幾何学的非線形解析が行なわれる。

3. 基礎微分方程式の離散解

基礎微分方程式(2. A), (2. B)における F_{kts} , f_{kt} が変数係数であることに注意し、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、つぎに積分方程式の近似解法を応用すると、矩形板の縦横の等分割線の交点に関する離散解は、次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{s0l} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3. A)$$

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{tk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{u0l} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3. B)$$

$$a_{pijkd}, b_{pijld}, \Delta q_{pij}: \text{Appendix III}$$

式(3. A), (3. B)は、矩形板の離散表示された離散解である。この解式中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量 ΔX_{rk0} , ΔX_{s0l} および4個ずつの諸量 ΔX_{tk0} , ΔX_{u0l} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 ΔX_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 ΔX_{rk0} , ΔX_{s0l} および ΔX_{tk0} , ΔX_{u0l} に関係づける要素 a_{pijkd} , b_{pijld} は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお離散解の導入過程の詳細は、文献1)を参照されたい。

4. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1. a)～(1. h)および(1. i)～(1. m)の近似解、(3. A), (3. B)に含まれる積分定数 ΔX_{rk0} , ΔX_{s0l} および ΔX_{tk0} , ΔX_{u0l} は、具体的には、それぞれ平板の $y=0$, $x=0$ なる辺上における断面力および変形を表わす。各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界支持条件

に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は、はじめから既知である。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x=a$ 、 $y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

Fig. 2(1)～(4)に、各々、四辺固定板、四辺単純支持板（ピン支持およびローラ支持）、対辺単純支持他対辺固定板（ピン支持）の左右および上下の2軸対称性を持つ平板の1/4部分を対象とした積分定数と境界条件を示している。各図において、隅角点における積分定数および境界条件は、 $\square$ で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において、2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献1)を参照されたい。

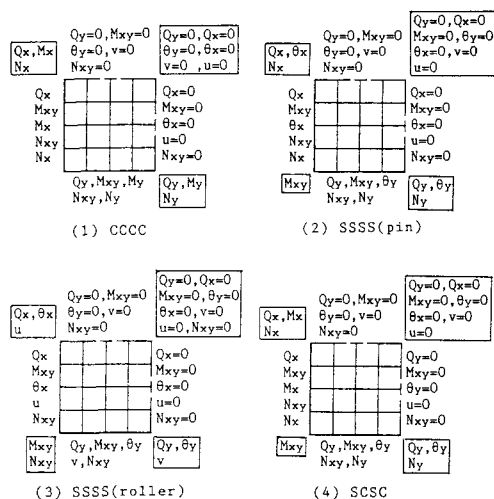


Fig. 2 積分定数と境界条件

5. 数値計算法

矩形板のたわみ量が板厚に近い大きになると、面内力がたわみの影響を受けて変化し、また、それらの面内力はたわみに影響を与えるため、たわみと面内力は連立させて求めなければならない。したがってこれらのことを考慮して、次の計算手順により矩形板の幾何学的非線形解析を行なう。

いま、第 $(n-1)$ 荷重段階の計算が終了したとすると、その時点での既知なるデータは次のようになる。

$$N_x = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta N_x, \quad N_y = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta N_y, \quad N_{xy} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta N_{xy}$$

$$w = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta w, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y}$$

この既知なるデータより、以下のようにして第 (n) 荷重段階における断面力および変形を求める。

- (a) 基礎微分方程式(1. a)の不均衡力 ΔN_c を計算し、面内力 N_x 、 N_y および N_{xy} を代入して、面外曲げ変形に対する断面力および変形、

$$\Delta Q_y, \Delta Q_x, \Delta M_{xy}, \Delta M_y, \Delta M_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_x, \Delta w$$

を求める。

- (b) 基礎微分方程式(1. g), (1. h)より、 $\partial \Delta w / \partial x$ 、 $\partial \Delta w / \partial y$ を求める。

- (c) 基礎微分方程式(1. k), (1. l)および(1. m)の非線形項 ΔW_{xc} 、 ΔW_{yc} および ΔW_{xyc} を計算し、面内変形に対する断面力および変形、

$$\Delta v, \Delta u, \Delta N_{xy}, \Delta N_y, \Delta N_x$$

を求める。

- (d) 求められた面内力 ΔN_{xy} 、 ΔN_y 、 ΔN_x により、新たに基礎微分方程式(1. a)の不均衡力 ΔN_c を計算する。

以上の(a)～(d)の計算を、たわみ、および不均衡力が収束するまで行なう。

6. 数値解析結果

等厚な薄板($h/a=0.01$)に関して、本解析法による数値解の収束性を検証した結果、たわみに関しては、分割数 $m=n=4$ 程度で、また応力に関しては、分割数 $m=n=8$ 程度の少ない分割数でも収束した解が得られている。したがって、本解析法による数値計算では、以後、横縦方向の分割数を $m=n=8$ とする。

(I) 等分布荷重

(1) 四辺固定板

まず、既往の解析結果と比較するために、四辺固定(CCCC)なる境界を持つ正方形板に等分布荷重が満載される場合の幾何学的非線形解析を行なった。矩形板は、横縦の辺長 $a=b=100\text{cm}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、板厚 $h=0.2\text{cm}$ 、弾性係数 $E=2.0\times 10^6\text{kg/cm}^2$ としている。Fig. 3は、中央点に関しての荷重～たわみ曲線を図示したものであり、Fig. 4は、中央点上面の応力(Compression)、下面の応力(Tension)および膜応力(Membrane)に関する荷重～応力曲線を図示したものである。一点鎖線は川井⁵⁾により、また、二点鎖線は Schmidt⁶⁾により有限要素法を用いて得られた結果、また、破線は Way⁷⁾によりエネルギー法を用いて得られた結果を示しており、本解析法による数値解析結果は、分割数 $m=n=8$ 程度でもこれらの解析解とほとんど一致した曲線が得られている。

(2) 四辺単純支持板

つづいて、四辺単純支持(SSSS)なる境界を持つ正方形板に等分布荷重が満載される場合の幾何学的非線形解析を行なった。Fig. 5は、分割数 $m=n=8$ 、増分荷重 $\Delta qa^4/Dh=100$ とした場合の中央点に関する荷重～たわみ曲線を図示したものであり、Fig. 6および Fig. 7は、中央点に関する荷重～応力曲線を図示したものである。四辺単純支持の場合は、面内変形に対する境界条件がピン支持とローラ支持の2種類が考えられ、それぞれの場合についての解析結果を示してある。一点鎖線は Berger⁸⁾により、また、破線は Levyによりピン支持の場合について得られた結果であり、たわみに関しては、Levyの解析結果にほぼ一致している。また、応力に関しては、膜応力は荷重の増加に伴って比例的に増加しているのに対し、曲げ応力はあまり増加しなくなる。

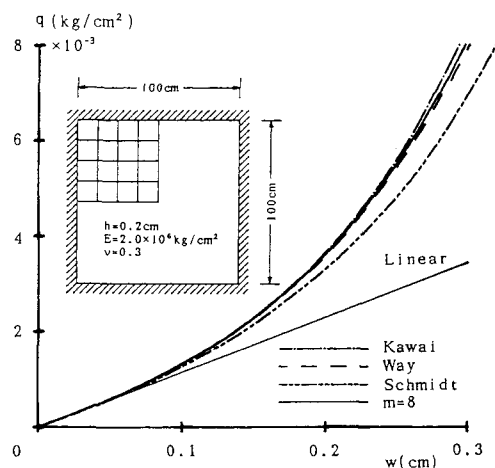


Fig. 3 荷重～たわみ曲線(CCCC)

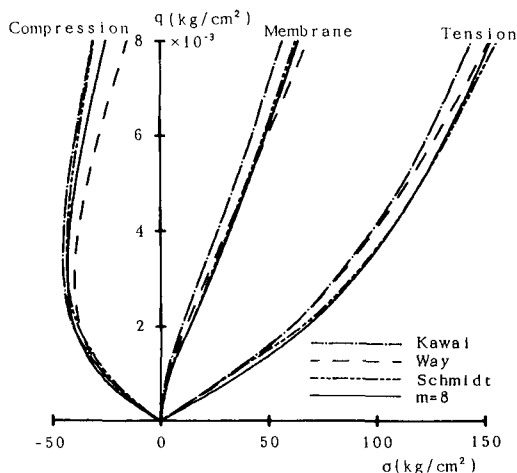


Fig. 4 荷重～応力曲線(CCCC)

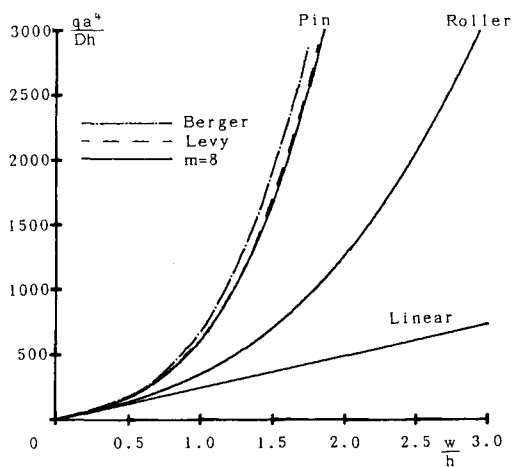


Fig. 5 荷重～たわみ曲線(SSSS)

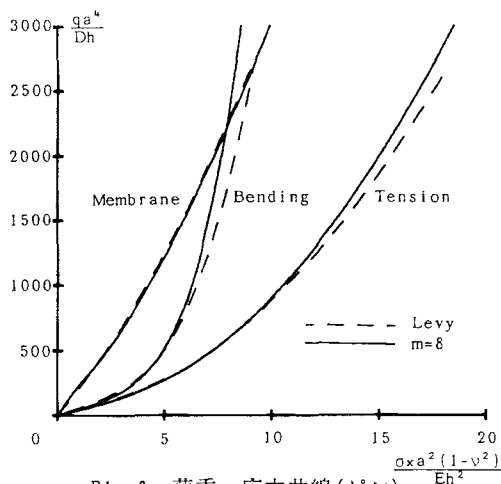


Fig. 6 荷重～応力曲線(ピン)

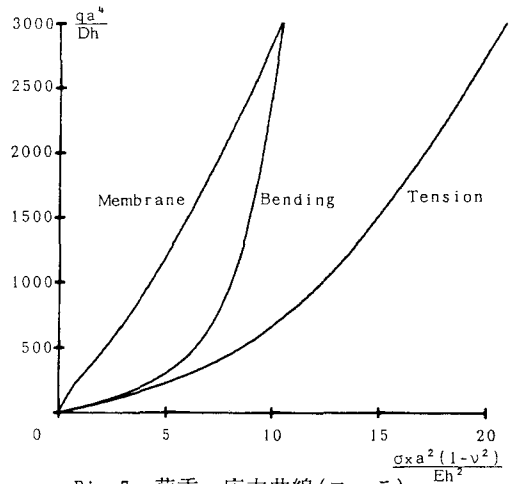


Fig. 7 荷重～応力曲線(ローラ)

(3) 対辺単純支持他対辺固定

さらに、対辺単純支持他対辺固定(SCSC)なる境界を持つ正方形板に等分布荷重が満載される場合の幾何学的非線形解析を行なった。Fig. 8は、分割数 $m=n=8$ 、増分荷重 $\Delta qa^4/Dh=100$ とした場合の中央点に関する荷重～たわみ曲線を図示したものであり、Fig. 9は、中央点に関する荷重～応力曲線を図示したものである。一点鎖線は Berger⁸⁾により得られた結果であり、たわみに関しては、四辺単純支持の場合と同程度のずれの解析結果が得られている。また、応力に関しては、膜応力は荷重の増加に伴って比例的に増加しているのに対し、曲げ応力はあまり増加しなくなる。

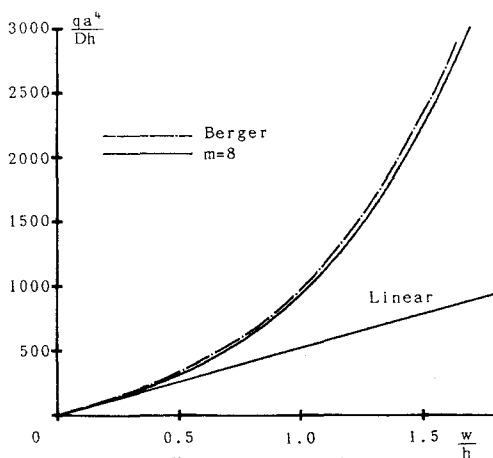


Fig. 8 荷重～たわみ曲線(SCSC)

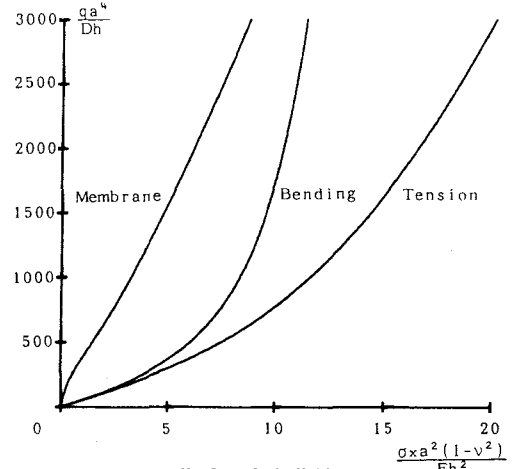


Fig. 9 荷重～応力曲線(SCSC)

(II) 集中荷重

次に、板の中央点に集中荷重が作用する場合の幾何学的非線形解析を行なった。板の中央点に集中荷重が作用する場合には、式(1. a)の q を $P\delta(x-a/2)\delta(y-b/2)$ と変更するのみで解析することができる。なお、 δ は Dirac のデルタ関数である。

Fig. 10は、四辺固定および四辺単純支持(ピン支持)なる境界を持つ正方形板に関して、分割数 $m=n=8$ 、増分荷重 $\Delta Pa^2/Dh=50$ とした場合の中央点での荷重～たわみ曲線を図示したものである。図中の実線は四辺単純支持(SSSS)の場合であり、一点鎖線は四辺固定(CCCC)の場合である。

7. 結 語

本論文は、矩形板の有限変形問題のための一離散化数値解法について述べたものである。有限変形を考慮した矩形板の変位-ひずみ関係により、矩形板の非線形挙動を支配する増分形の基礎微分方程式を導き、その基礎微分方程式に基づく、直接的で半解析的な、矩形板の非線形問題の一解析法を提示した。また本解析法は、面内圧縮荷重などによる弾塑性有限変形解析への応用も容易で、これらについては改めて報告の予定である。

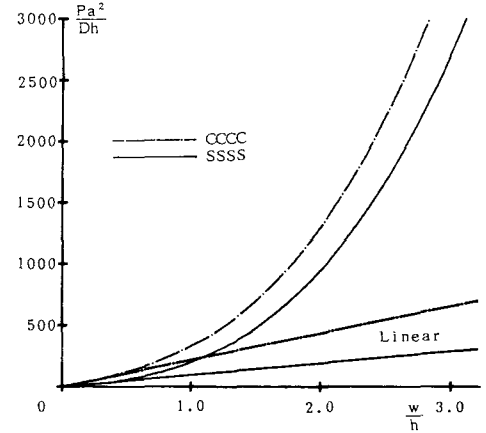


Fig. 10 荷重～たわみ曲線(集中荷重)

Appendix I

$$\begin{aligned}\Delta N_c &= \Delta N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \right) + \Delta N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \right) + 2 \Delta N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \right) \\ \Delta W_{xc} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \Delta W_{yc} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \Delta W_{xyc} &= \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}\end{aligned}$$

Appendix II

$$\begin{aligned}F_{111} &= F_{123} = F_{134} = F_{156} = F_{167} = F_{188} = F_{278} = F_{377} = 1 & F_{4911} &= F_{41012} = F_{4129} = F_{41310} = 1 \\ F_{212} &= F_{225} = F_{233} = F_{247} = F_{266} = -F_{322} = -F_{331} = F_{386} = \mu & F_{5913} &= F_{51011} = F_{51110} = F_{5139} = \mu \\ F_{146} &= \nu & F_{257} &= \nu \mu & F_{313} &= \lambda x y J & F_{314} &= \mu (\lambda y - \nu \lambda x) \bar{D} & F_{4119} &= \nu & F_{51210} &= \nu \mu & F_{61113} &= -L_1 \\ F_{315} &= \mu (\lambda x - \nu \lambda y) \bar{D} & F_{345} &= F_{354} = -I & F_{363} &= -J & F_{372} &= -K & F_{61212} &= -L_1 & F_{61311} &= -L_2 \\ F_{381} &= -\mu K & f_{11} &= \Delta \bar{Q} + \Delta \bar{N}_c & f_{211} &= \mu \Delta W_{xc} & f_{212} &= \mu \Delta W_{yc} \\ & & \text{Other } F_{ijk} &= f_{ij} = 0 & f_{213} &= \mu \Delta W_{xyc}\end{aligned}$$

Appendix III

$$\begin{aligned}A_{p1} &= \gamma_{p1} & A_{p2} &= 0 & A_{p3} &= \gamma_{p2} & A_{p4} &= \gamma_{p3} & A_{p5} &= 0 & A_{p6} &= \nu \gamma_{p4} + \gamma_{p5} & A_{p7} &= \gamma_{p6} & A_{p8} &= \gamma_{p8} \\ A_{p9} &= \nu \gamma_{p11} + \gamma_{p12} & A_{p10} &= \gamma_{p13} & A_{p11} &= \gamma_{p9} & A_{p12} &= \gamma_{p10} & A_{p13} &= 0 & B_{p1} &= 0 & B_{p2} &= \mu \gamma_{p1} \\ B_{p3} &= \mu \gamma_{p3} & B_{p4} &= 0 & B_{p5} &= \mu \gamma_{p2} & B_{p6} &= \mu \gamma_{p6} & B_{p7} &= \mu (\gamma_{p4} + \nu \gamma_{p5}) & B_{p8} &= \gamma_{p7} & B_{p9} &= \mu \gamma_{p13} \\ B_{p10} &= \mu (\gamma_{p11} + \nu \gamma_{p12}) & B_{p11} &= \mu \gamma_{p10} & B_{p12} &= 0 & B_{p13} &= \mu \gamma_{p9} & C_{p1fa} &= \mu (\gamma_{p3} + K_{fa} \gamma_{p8}) \\ C_{p2fa} &= \mu \gamma_{p2} + K_{fa} \gamma_{p7} & C_{p3fa} &= J_{fa} (\gamma_{p6} - \lambda x y f_{a1}) & C_{p4fa} &= I_{fa} \gamma_{p5} - \mu (\lambda y f_{a2} - \nu \lambda x f_{a1}) \bar{D}_{fa} \gamma_{p1} \\ C_{p5fa} &= I_{fa} \gamma_{p4} - \mu (\lambda x f_{a2} - \nu \lambda y f_{a1}) \bar{D}_{fa} \gamma_{p1} & C_{p6fa} &= -\mu \gamma_{p8} & C_{p7fa} &= -\gamma_{p7} & C_{p8fa} &= 0 & C_{p9fa} &= 0 \\ C_{p10fa} &= 0 & C_{p11fa} &= L_{2fa} \gamma_{p13} & C_{p12fa} &= L_{1fa} \gamma_{p12} & C_{p13fa} &= L_{1fa} \gamma_{p11} \\ [\gamma_{pt}] &= [\rho_{tp}]^{-1} \quad (p=1 \sim 8, t=1 \sim 8 \text{ or } p=9 \sim 13, t=9 \sim 13) \\ \rho_{11} &= \beta_{11} & \rho_{12} &= \mu \beta_{11} & \rho_{13} &= \beta_{11} \lambda x_{11} J_{11} & \rho_{14} &= \mu \beta_{11} (\lambda y_{11} - \nu \lambda x_{11}) \bar{D}_{11} \\ \rho_{15} &= \mu \beta_{11} (\lambda x_{11} - \nu \lambda y_{11}) \bar{D}_{11} & \rho_{22} &= -\mu \beta_{11} & \rho_{23} &= \beta_{11} & \rho_{25} &= \mu \beta_{11} & \rho_{31} &= -\mu \beta_{11} \\ \rho_{33} &= \mu \beta_{11} & \rho_{34} &= \beta_{11} & \rho_{45} &= -\beta_{11} I_{11} & \rho_{46} &= \nu \beta_{11} & \rho_{47} &= \mu \beta_{11} & \rho_{54} &= -\beta_{11} I_{11} & \rho_{56} &= \beta_{11} \\ \rho_{57} &= \nu \mu \beta_{11} & \rho_{63} &= -\beta_{11} J_{11} & \rho_{66} &= \mu \beta_{11} & \rho_{67} &= \beta_{11} & \rho_{72} &= -\beta_{11} K_{11} & \rho_{77} &= \beta_{11} & \rho_{78} &= \beta_{11} \\ \rho_{81} &= -\mu \beta_{11} K_{11} & \rho_{86} &= \mu \beta_{11} & \rho_{88} &= \beta_{11} & \rho_{911} &= \beta_{11} & \rho_{913} &= \mu \beta_{11} & \rho_{1011} &= \mu \beta_{11} \\ \rho_{1012} &= \beta_{11} & \rho_{119} &= \nu \beta_{11} & \rho_{1110} &= \mu \beta_{11} & \rho_{1113} &= -\beta_{11} L_{11} & \rho_{129} &= \beta_{11} & \rho_{1210} &= \nu \mu \beta_{11} \\ \rho_{1212} &= -\beta_{11} L_{11} & \rho_{139} &= \mu \beta_{11} & \rho_{1310} &= \beta_{11} & \rho_{1311} &= -\beta_{11} L_{21} & \beta_{11} &= \beta_{11} \beta_{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p=1\sim 8 \text{ のとき} & p=9\sim 13 \text{ のとき} \\
a_{p i j k d} &= \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{i f} A_{p t} [a_{t f o k d} - a_{t f j k d} (1 - \delta_{f i})] \right. \\
&+ \sum_{g=0}^j \beta_{j g} B_{p t} [a_{t o g k d} - a_{t i g k d} (1 - \delta_{g j})] \\
&+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} C_{p t f g} a_{t f g k d} (1 - \delta_{f i} \delta_{g j}) \left. \right\} & a_{p i j k d} = \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{i f} A_{p t} [a_{t f o k d} - a_{t f j k d} (1 - \delta_{f i})] \right. \\
&+ \sum_{g=0}^j \beta_{j g} B_{p t} [a_{t o g k d} - a_{t i g k d} (1 - \delta_{g j})] \\
&+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} C_{p t f g} a_{t f g k d} (1 - \delta_{f i} \delta_{g j}) \left. \right\} \\
b_{p i j l d} &= \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{i f} A_{p t} [b_{t f o l d} - b_{t f j l d} (1 - \delta_{f i})] \right. \\
&+ \sum_{g=0}^j \beta_{j g} B_{p t} [b_{t o g l d} - b_{t i g l d} (1 - \delta_{g j})] \\
&+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} C_{p t f g} b_{t f g l d} (1 - \delta_{f i} \delta_{g j}) \left. \right\} & b_{p i j l d} = \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{i f} A_{p t} [b_{t f o l d} - b_{t f j l d} (1 - \delta_{f i})] \right. \\
&+ \sum_{g=0}^j \beta_{j g} B_{p t} [b_{t o g l d} - b_{t i g l d} (1 - \delta_{g j})] \\
&+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} C_{p t f g} b_{t f g l d} (1 - \delta_{f i} \delta_{g j}) \left. \right\} \\
\Delta q_{p i j} &= \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{i f} A_{p t} [\Delta q_{t f o} - \Delta q_{t f j} (1 - \delta_{f i})] \right. \\
&+ \sum_{g=0}^j \beta_{j g} B_{p t} [\Delta q_{t o g} - \Delta q_{t i g} (1 - \delta_{g j})] \\
&+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} C_{p t f g} \Delta q_{t f g} (1 - \delta_{f i} \delta_{g j}) \left. \right\} & \Delta q_{p i j} = \sum_{t=9}^{13} \left\{ \sum_{f=0}^i \beta_{i f} A_{p t} [\Delta q_{t f o} - \Delta q_{t f j} (1 - \delta_{f i})] \right. \\
&+ \sum_{g=0}^j \beta_{j g} B_{p t} [\Delta q_{t o g} - \Delta q_{t i g} (1 - \delta_{g j})] \\
&+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} C_{p t f g} \Delta q_{t f g} (1 - \delta_{f i} \delta_{g j}) \left. \right\} \\
&- \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} A_{p 1} (\Delta \bar{w}_{f g} + \Delta \bar{w}_{c f g}) & - \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{i f} \beta_{j g} \Delta \bar{w}_{c p f g} \\
&\Delta \bar{w}_{c p f g} = \gamma_{p 11} \Delta \bar{w}_{x c f g} + \gamma_{p 12} \Delta \bar{w}_{y c f g} + \gamma_{p 13} \Delta \bar{w}_{x y c f g}
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) 崎山 毅・松田 浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号，pp.21-28, 1983.
- 2) 松田 浩・崎山 毅：矩形板の非弾性曲げの一解析法、構造工学論文集、Vol.33A，pp257-264，1987.
- 3) Sakiyama, T. and H. Matsuda: Free Vibration of Rectangular Mindlin Plate with Mixed Boundary Conditions, Jour. of Sound and Vibration, Vol.113, No.1, pp.208-214, 1987.
- 4) Sakiyama, T. and H. Matsuda: Elastic Buckling of Rectangular Mindlin Plate with Mixed Boundary Conditions, Computers & Structures, Vol.25, No.5, pp.801-808, 1987.
- 5) Kawai, T. and N. Yoshimura: Analysis of Large Deflection of Plates by Finite Element Method, Int. Jour. for Numerical Methods in Engng. Vol.1, pp.123-133, 1969.
- 6) Schmidt, B.: Ein Geometrisch und Physikalisch Nichtlineares Finite-Element-Verfahren zur Berechnung von Ausgesteiften, Vorverformten Rechteckplatten, Der Stahlbau, Heft 1, s.13-21, 1979.
- 7) Way, S.: A Laterally Loaded Clamped Square Plate with Large Deformation, Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938.
- 8) Berger, H. M.: A New Approach to the Analysis of Large Deformation of Plates, Trans. ASME, Jour. Appl. Mech., Vol. 22, pp.465-472, 1955.

(1990年10月12日受付)