

有理関数近似による部分修正系の固有値解析

A NUMERICAL METHOD FOR EIGENSOLUTION OF LOCALLY MODIFIED SYSTEMS
BY A RATIONAL FUNCTION APPROXIMATION

柏木 光博 * 平井 一男 ** 片山 拓郎 ***

by Mitsuhiro KASHIWAGI, Itio HIRAI and Takuro KATAYAMA

This paper proposes a rational function to find eigensolutions from the fundamental equation established for locally modified systems. Although the fundamental equation is of the order of the modified parts independent of the order of the original system, the fundamental equation is represented by discontinuous functions near the eigenvalues of the unmodified system. The proposed function gives a good approximation for the fundamental equation, and the advantages of the function for C.P.U time and accuracy are confirmed by several numerical examples in comparison with Householder-bisection method and the bisection method for the locally modified equation.

1. はじめに

この論文は、修正前の情報をもとにした有理関数近似式を提案し、これより修正系の固有値・固有ベクトルを精度よく求めることを述べている。

工学等における固有値解析は汎用プログラムの開発とともにかなり容易になっているが、固有値問題の解析は対応する静的解析に比べ煩雑で、かなりの計算時間を必要とする。すでに計算を行った系が部分的設計変更を繰り返す場合、変更前と同様な時間と労力と経費を用いて再解析することは、部分設計変更の多い系の設計や最適設計にとって一つの支障となる。部分的修正に対する解法がいくつか提案されているが²⁾⁻⁸⁾、これらの多くは一般に近似解法であり、修正量の小さな場合を対象としている。

文献(1)に述べられている方法は系全体の行列次数とは無関係に修正部(修正量の大小を問わない)の行列次数に圧縮された基礎式で表わしているので、修正部次数の大きい場合には不利であるが、修正部次数の小さい場合には有利に計算を進めることができる。また、この基礎式は厳密解であるので、いかにその精解を効率よく求めるかが問題となる。この基礎式の行列式からなる関数は修正前の固有値を境として不連続で、かつ修正前の固有値の極近傍において急激な変化を示すので、その解を求めることは容易でない。局所的解析によく用いられるニュートン・ラフソン法、逆線形補間法および多項式近似法等の解法は、著者らの数値実験では、この関数に対しては安定した効率のよい解法とはなり得なかった。一方、二分法は確実に根の範

* 工修 九州東海大学助教授 工学部建築学科 (〒862 熊本市大江町渡鹿223)

** 工博 熊本大学教授 工学部土木環境工学科 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)

*** 工修 佐世保重工業(株) 鉄構設計部 (〒857 佐世保市立神町)

囲を狭め安定して根を求め得る。しかし、この方法は要求される精度を得るまでに多くの計算量と時間を必要とする。このような関数を簡単に求め得る式によって精度よく近似できれば、収束も早く演算速度を上げることができる。多くの曲線式を数値実験した結果、ここに述べる有理関数による近似式が変動の大きい関数をよく追従することを確かめた。

以下に、本法の演算方法を述べ、例題解析により系全体を解く固有値解析法および部分修正基礎式を二分法で解く方法と比較解析し、その特徴を述べる。

2. 部分修正系基礎式

正定値対称な剛性行列 $\mathbf{K}$ および質量行列 $\mathbf{M}$ を持つ n 次の系の一部分が修正され、それぞれが $\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}$ になった時、修正後の系の固有値を λ 、固有ベクトルを $\mathbf{x}$ 、単位行列を $\mathbf{I}$ とすると、修正後の固有方程式は

$$[\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K} - \lambda [\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}]] \mathbf{x} = 0 \quad (1)$$

によって得られる。ここで

$$\mathbf{r} = [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{x} = -[\Delta \mathbf{K} - \lambda \Delta \mathbf{M}] \mathbf{x} \quad (2)$$

とくと、式(1)は

$$\begin{aligned} [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} + \Delta \mathbf{K} - \lambda \Delta \mathbf{M}] \mathbf{x} &= [\mathbf{I} + [\Delta \mathbf{K} - \lambda \Delta \mathbf{M}] [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]^{-1}] [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{x} \\ &= [\mathbf{I} + [\Delta \mathbf{K} - \lambda \Delta \mathbf{M}] \mathbf{G}] \mathbf{r} = \mathbf{Q} \mathbf{r} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + [\Delta \mathbf{K} - \lambda \Delta \mathbf{M}] \mathbf{G} \quad (4) \quad \mathbf{G} = [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]^{-1} \quad (5)$$

である。修正前の系の第 i 、 j 固有値 λ_i 、 λ_j に属する固有ベクトル ϕ_i 、 ϕ_j が

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij} \quad (6)$$

のように正規化された固有ベクトルを第 i 、 j 次列ベクトルにもつ行列を Φ とすると、修正前の系は

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad (7)$$

のように対角化できる。ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを、 T は転置を示す。 Λ は修正前の固有値についての対角行列で

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (8)$$

である。よって、式(5)は

$$\mathbf{G} = [\Phi^{-T} \Lambda \Phi^{-1} - \lambda \Phi^{-T} \Phi^{-1}]^{-1} = \Phi [\Lambda - \lambda \mathbf{I}]^{-1} \Phi^T \quad (9)$$

のように書き直される。また、 $\mathbf{G}$ の i 、 j 要素 G_{ij} は、上式を展開し修正前の k 番目の固有ベクトルの i 、 j 次要素を ϕ_{ik} 、 ϕ_{jk} とすることにより次式で求められる¹⁾。

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (10)$$

ところで、修正は系の一部に生ずると仮定すれば、 $\Delta \mathbf{K}$ 、 $\Delta \mathbf{M}$ は圧縮されたマトリクス $\overline{\Delta \mathbf{K}}$ 、 $\overline{\Delta \mathbf{M}}$ により

$$\Delta \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11) \quad \Delta \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

として再配列することができる。ここに、 $\overline{\Delta \mathbf{K}}$ 、 $\overline{\Delta \mathbf{M}}$ は m ($m < n$) 次の正方マトリクスとする。 $\overline{\Delta \mathbf{K}}$ 、 $\overline{\Delta \mathbf{M}}$ に対応して $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{x}$ を

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{r}} \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \quad (13) \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

と表わせば、式(2)より

$$\overline{\mathbf{r}} = -[\overline{\Delta \mathbf{K}} - \lambda \overline{\Delta \mathbf{M}}] \overline{\mathbf{x}} \quad (15) \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \quad (16)$$

となる。同様に G 、 Q も以下のように表わすことにより

$$G = \begin{bmatrix} \overline{G} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \overline{Q} & Q_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (18)$$

つぎの圧縮された基礎方程式を得る。

$$\overline{Q} \overline{r} = 0 \quad (19)$$

ここに

$$\overline{Q} = \overline{I} + [\overline{\Delta K} - \lambda \overline{\Delta M}] \overline{G} \quad (20)$$

である。よって、式(19)の特性方程式は

$$f(\lambda) = \det(\overline{Q}) = 0 \quad (21)$$

となる。ここで、後に必要となる $\overline{Q}$ の λ による一階微分は

$$\overline{Q}' = -\overline{\Delta M} \overline{G} + [\overline{\Delta K} - \lambda \overline{\Delta M}] \overline{G}' \quad (22)$$

であり、 $\overline{G}'$ の i, j 要素 G_{ij}' は

$$G_{ij}' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\lambda_k - \lambda)^2} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (23)$$

により求められる。この時、 $f(\lambda)'$ はトレース理論⁷⁾ によって次式となる。

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \text{trace} [\overline{Q}^{-1} \overline{Q}'] \quad (24)$$

以上の式は全て修正部の次数に限定されている。

3. 有理関数近似による非線形方程式の解法

式(21)の $f(\lambda)$ について、有限要素法による一例を図示化したものが図-1、図-2である。両図共修正箇所は同一とし、図-1は小幅な修正を、図-2は大幅な修正をしている。両方共修正前の固有値の極近傍では急激な変化をし、有理関数特有の性状を示している。また、大幅な修正をした場合は、小幅な修正に比べて関数の動きも大きく解の近傍の勾配は特に大きい。このような関数に対しては、余程解に近い初期値を与えない限り、微係数を使うニュートン・ラフソン系の解法では解を得ることは容易でない。ここで大域的に安定性のある方法で解の存在範囲を求め、この範囲内で変動の大きい関数をよく近似できる有理関数を提案し、これにより解を求め得ることを述べる。

最初に、大域的に各々の根の存在範囲を特定しなければならない。それには修

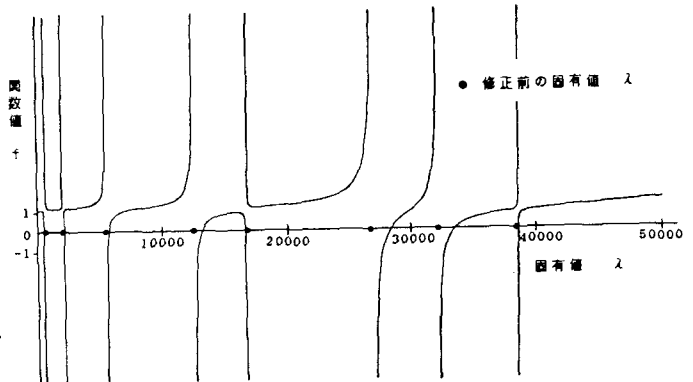


図-1 小幅な修正をした関数値の一例

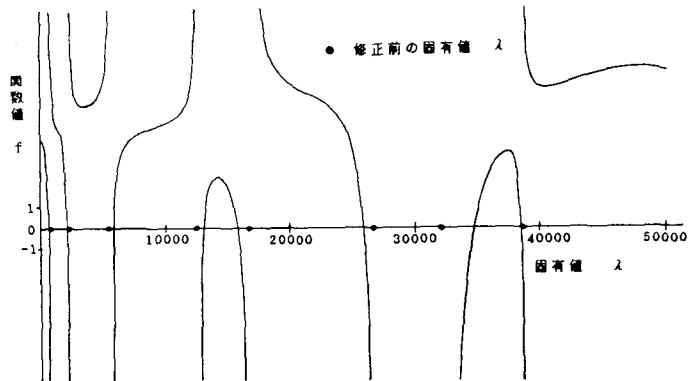


図-2 大幅な修正をした関数値の一例

正前の相隣る固有値間では部分修正系の基礎式は連続関数として存在することを利用することである。この範囲の関数を簡単な曲線式で近似することは困難なので、その領域を適当な方法によって分割し、 $f(\lambda)$ の符号が変化する領域に根が存在するという方法により、各々の根の範囲を特定できる。

固有値と固有値とによって挟まれた領域を考える時、図-1～2から見られるように、その領域の両端は急激な変化をしているが、その他はゆるやかに変化している。両端近辺において根が求まることも多々あるが、変化の大きい所での根の探索は容易ではないので、変化の大きい両端部における分割幅を小さくとらねばならない。以上を考慮して次のような分割法を採用する。例えばある領域（幅 L ）を6分割するものとする、その分割領域の分割長は左より（ $L/8, L/8, L/4, L/4, L/8, L/8$ ）として、中心より左右に対称に3分割する。同様に8分割の場合は、（ $L/16, L/16, L/8, L/4, L/4, L/8, L/16, L/16$ ）として分割する。他の分割個数に対しても同様にして分割を行なうものとする。このような分割により中央部より端部に向かうにつれ、分割領域の幅を小さくすることができ、解の見落としをなくすることができる。上記の方法は本式のような非線形の方程式を取り扱う場合、可能なかぎり演算回数を減らし、演算時間を少なくする上では有効な一法と思われる。近接根に対しては、関数値の他に関数の微分値をも同時に計算し、隣接箇所の関数の微分値の符号の変化を調べて対応できる。3個以上の根については分割個数を増やす必要がある。分割個数については、修正前の固有値を参照して適当に決めなくてはならず、定まった方法はないが、数値実験では少ない分割個数でも解を得ることができた。

次に、根の領域特定後は、以下に述べる有理関数近似式によって修正後の固有値を解く。部分修正基礎式による $f(\lambda)$ を、以下に示す有理関数 $g(\lambda)$ を用いて近似する。

単根を求めるときは次の有理関数を用いる。

$$g(\lambda) = \frac{\lambda - d}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \quad (25)$$

この λ による一階微分は

$$g'(\lambda) = \frac{1 - (2a\lambda + b)g(\lambda)}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \quad (26)$$

となる。式(25)中 $g(\lambda)$ の未知数4個は領域の両端の関数値と微分値を与えて次の4元連立方程式より求められる。

$$(\lambda_L^2 f_L) a + (\lambda_L f_L) b + (f_L) c + d = \lambda_L \quad (27)$$

$$(\lambda_R^2 f_R) a + (\lambda_R f_R) b + (f_R) c + d = \lambda_R \quad (28)$$

$$(2\lambda_L f_L + \lambda_L^2 f'_L) a + (f_L + \lambda_L f'_L) b + (f'_L) c = 1 \quad (29)$$

$$(2\lambda_R f_R + \lambda_R^2 f'_R) a + (f_R + \lambda_R f'_R) b + (f'_R) c = 1 \quad (30)$$

ここに、 λ_L, λ_R はそれぞれ左、右端の変数を、 f_L, f_R は左、右端の関数値を、 f'_L, f'_R はそれぞれ左、右端の関数の微分値を表す。式(27)～(30)の連立方程式の未知数 a, b, c, d を決定することにより、ある段階での近似関数 $g(\lambda)$ を得ることができる。この $g(\lambda) = 0$ の解は式(25)より $\lambda = d$ として得られる。そして、近似固有値 λ_c に対応する $f(\lambda_c)$ を求め、 $f(\lambda_L)$ と $f(\lambda_c)$ あるいは $f(\lambda_c)$ と $f(\lambda_R)$ の符号の変化を調べることにより、変化する側に領域を狭めていく。

以上の操作を繰り返し、 $f(\lambda_c)$ の絶対値あるいは λ の前の近似解との差の絶対値がある収束値以下になった時収束したものとし、その時点の λ_c をその領域の固有値とする。以上の方法により、ほとんど数回程度で収束し所要の解を得ることができる。1～2回で解との相対誤差が $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 以下になるのは急速な収束性を示しているといえよう。

つぎに領域内に2根を有する場合、 $f(\lambda)$ の勾配が0となる位置を求める必要があり、この場合次の有理関数を用いる。

$$g(\lambda) = \frac{\frac{1}{2}\lambda^2 - d\lambda + e}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \quad (31)$$

これの一階微分は

$$g'(\lambda) = \frac{\lambda - d - (2a\lambda + b)g(\lambda)}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \quad (32)$$

となる。上式は、未知数は5個で、領域の両端の関数値と微分値及び領域中間のある関数値を与えることにより5元連立方程式より決定できる。

$$(\lambda_e^2 f_e) a + (\lambda_e f_e) b + (f_e) c + (\lambda_e) d - e = \frac{1}{2} \lambda_e^2 \quad (33)$$

$$(\lambda_e^2 f_e) a + (\lambda_e f_e) b + (f_e) c + (\lambda_e) d - e = \frac{1}{2} \lambda_e^2 \quad (34)$$

$$(\lambda_r^2 f_r) a + (\lambda_r f_r) b + (f_r) c + (\lambda_r) d - e = \frac{1}{2} \lambda_r^2 \quad (35)$$

$$(2\lambda_e f_e + \lambda_e^2 f_e') a + (f_e + \lambda_e f_e') b + (f_e') c + d = \lambda_e \quad (36)$$

$$(2\lambda_r f_r + \lambda_r^2 f_r') a + (f_r + \lambda_r f_r') b + (f_r') c + d = \lambda_r \quad (37)$$

ここに、 λ_e に対応する f_e は領域中間のある関数値であり、繰り返し段階では、上述で求められた $g'(\lambda) = 0$ の点の関数値を用いる。式(33)～(37)の連立方程式の未知数 a, b, c, d, e を決定することにより、ある段階での近似関数 $g(\lambda)$ を得ることができる。この $g'(\lambda) = 0$ の解は式(32)より

$$(ad + b/2)\lambda^2 + (c - 2ae)\lambda - (be + cd) = 0 \quad (38)$$

の根として得られる。そして、その後の手順は単根の場合に準じればよい。

以上より、ほとんどの場合、次々に固有値を求めることが可能となる。固有ベクトルが必要な場合、上記のような算法により固有値を求めた後で、部分修正系の基礎式(19)により $\bar{r}$ ベクトルを求め、式(16)の関係より r が式(13)から求まる。これより正規化⁸⁾した固有ベクトルを求める。

4. 数値計算

部分修正系の固有値解析法について、長方形平面骨組を例にとり数値解析する。一般固有値問題として係数行列を作成すると共に、倍精度演算を行った。対象とする骨組は10層4スパン（総次数150）、20層4スパン（総次数300）および30層4スパン（総次数450）である。修正前の骨組の部材断面は、全ての梁について $40 \times 80 \text{ cm}^2$ 、全ての柱について $80 \times 80 \text{ cm}^2$ であり、層高を4m、スパン長を8mとした。骨組の修正箇所は最下層中央柱のみの場合と、その右隣の柱を含めた両方の場合の2通りとする。

部材は長方形断面とし、修正前の断面の幅を b 、高さを h に、断面積を S_0 、断面2

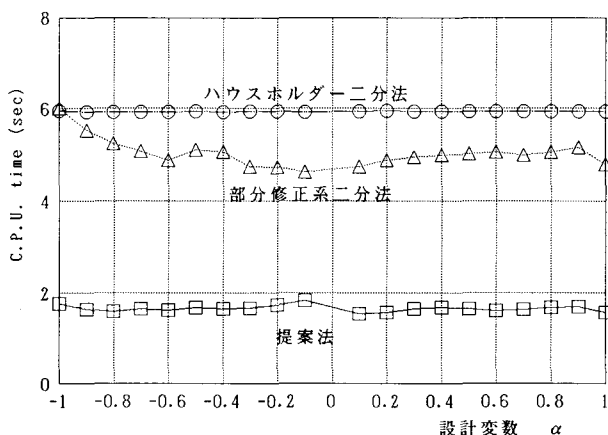


図-3 総次数150，修正部次数3の解析時間

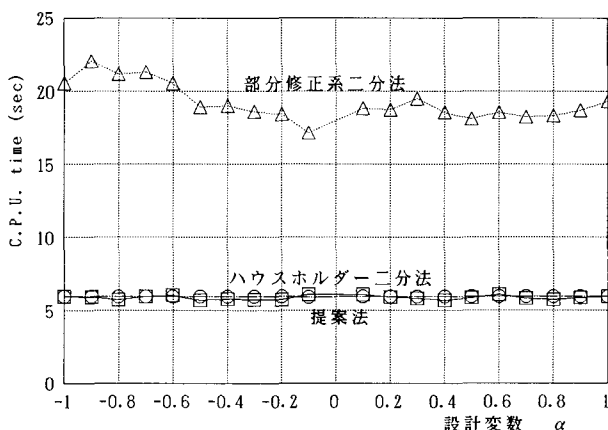


図-4 総次数150，修正部次数6の解析時間

次モーメントを I_0 、修正後の断面積を S 、断面2次モーメントを I とする。また、部材の修正は断面の高さについてのみ行うものとし、設計変数を α とすると S_0 、 S 、 I_0 、 I は

$$S_0 = b h, S = (1 + \alpha) S_0,$$

$$I_0 = b h^3 / 12, I = (1 + \alpha)^3 I_0.$$

のように表われ、修正量 ΔS 、 ΔI は $\Delta S = S - S_0 = \alpha S_0$ 、 $\Delta I = I - I_0 = \{(1 + \alpha)^3 - 1\} I_0$ として表される。

ヤング係数は $E = 2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とした。上記 α は $\alpha = -1$ より 0.1 刻みで $\alpha = +1$ まで変化させ、合計20通りについて解析する。 $\alpha = -1$ の意味は修正する箇所の部材を除くことであり、また $\alpha = +1$ の設計変更は断面の高さを2倍にすることで、断面2次モーメントは8倍増加の大幅な修正である。現実の設計においてはこのような変更はほとんどないと考えられるが、数値解析上の性状を見るために行った。この計算では求める固有値は最小固有値より50個、修正前の固有値と固有値との間の分割個数を6とし、有理関数近似法と二分法の最大繰返し回数を30とした。また、本法による収束値は繰返し回数 $p+1$ における関数値の絶対値

$|f(\lambda_{i^{(p+1)}})|$ を 10^{-10} 以下に、固有値 $\lambda_{i^{(p+1)}}$ の収束相対誤差値 ε は以下のようにした。

$$\varepsilon = \left| \frac{\lambda_{i^{(p+1)}} - \lambda_{i^{(p)}}}{\lambda_{i^{(p+1)}}} \right| \leq 10^{-9} \quad (39)$$

図-3～8は、それぞれ総次数 $n = 150$, $n = 300$, $n = 450$ の次数をもつ系の柱1本修正（修正次数 $m = 3$ ）、柱2本修正（修正部次数 $m = 6$ ）の場合について、最小固有値より50個の固有値を求める時間（秒）を、ハウスホルダー二分法、部分修正系二分法、提案法（部分修正系有理関数近似法）についての演算時間を示している。また、設計変数 α は20通りあり、それぞれについて比較解析している。そして、図-9～10は、修正部次数3および6について、総次数と平均解析時間との関係を示している。

図-3～8よりわかるように、提案法による

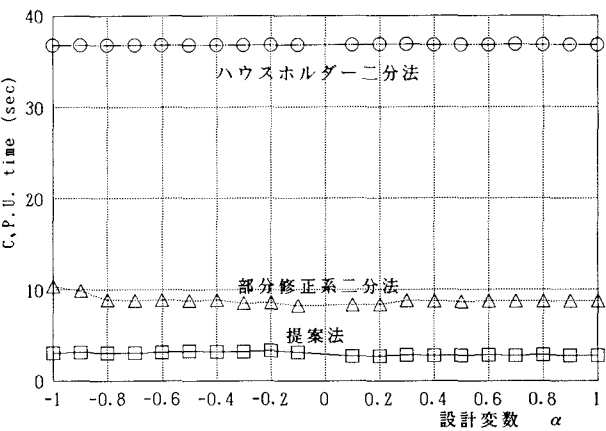


図-5 総次数300, 修正部次数3の解析時間

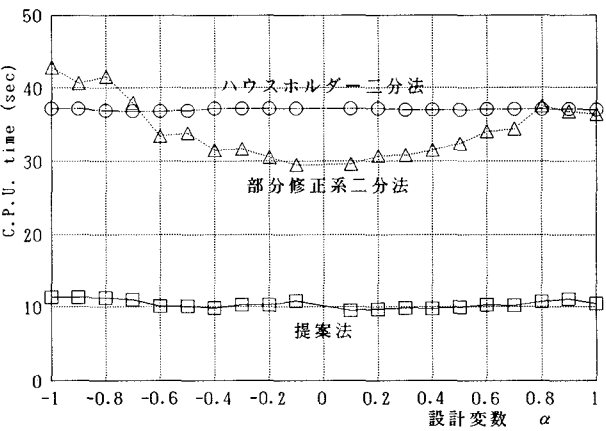


図-6 総次数300, 修正部次数6の解析時間

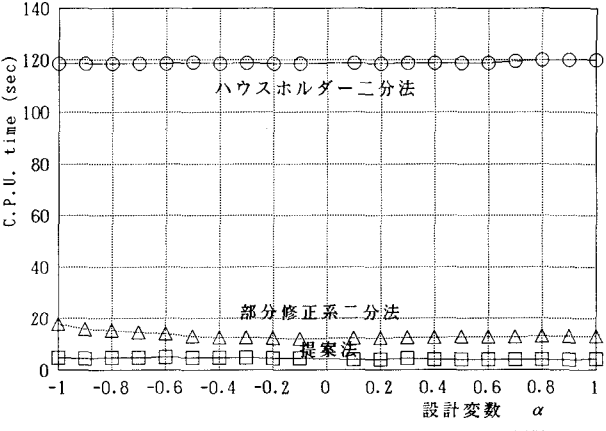


図-7 総次数450, 修正部次数3の解析時間

演算時間は修正量の大小にほとんど関係なく一定している。しかし、部分修正系二分法は、修正量が大きくなるほど演算時間は増える傾向にある。平均時間(図-9~10)で見ると、提案法は $n=150$ 、 $n=300$ および $n=450$ の全ての場合について、ハウスホルダー二分法および部分修正系二分法より早い。また、部分修正系二分法は提案法より $m=3$ の場合約3倍、 $m=6$ の場合約3.3倍かかっている。同一の n における $m=3$ より $m=6$ の増加に対しては、3者共ほとんど同様であり、提案法の場合 約3.6倍、部分修正系二分法の場合約3.9倍となっている。このことは m が増える、つまり修正部の次数が増加すると $\bar{G}$ の計算に時間を費やすことを示しており、修正部は小なることを前提とした解法といえよう。提案法は全体系の次数の増加に伴いハウスホルダー二分法に対する相対演算時間は小さくなる傾向が顕著である。このことは系全体は大次元になる程、提案法の有用性を示していると思われる。なお、計算機はNEC ACOS 830を使用した。

5. おわりに

本論文において、部分修正系の固有方程式に便利な有理関数近似式を適用する方法を提案した。これは変動の大きい関数値をよく追従し、固有値解析計算に際して解を精解に早く収束させる。ここでとりあげた計算モデルは一つの骨組構造系のものであるが、基礎式(式(21))の計算量は、修正前の系の自由度数 n およびその固有値・固有ベクトル、修正部の ΔK 、 ΔM とその自由度数 m によって支配されるもので、計算モデルの種類による変化は特殊な場合を除いて殆どないものと考えられる。したがって、提案法は計算モデルに対する従来の数値計算手法の難易度との関係によって評価されるものである。また修正部の次数が小さく、系全体の次数が大きい程、所期の範囲における固有値を安定かつ早く求められるものであるので、この数値計算例は本法の特徴がよく出たものであるといえる。

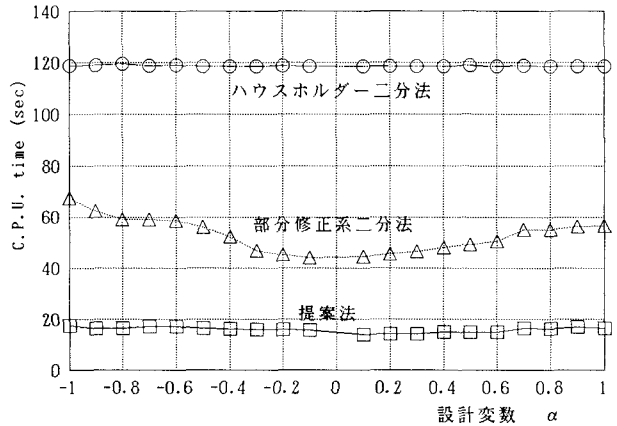


図-8 総次数450, 修正部次数6の解析時間

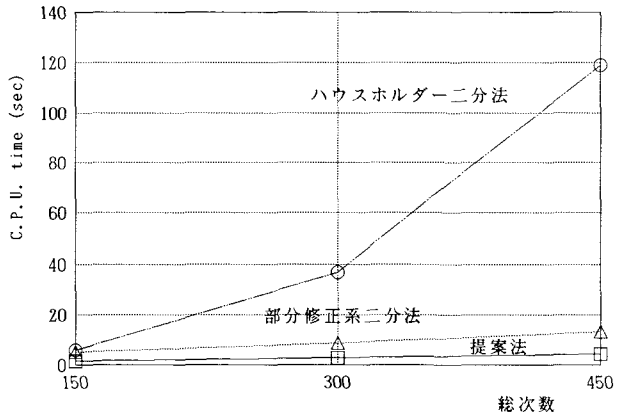


図-9 修正部次数3における総次数と平均解析時間

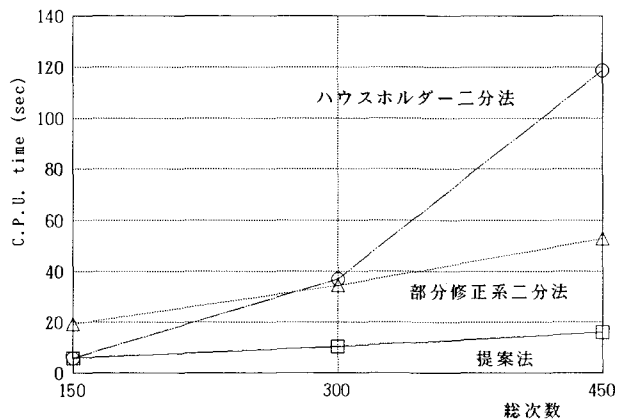


図-10 修正部次数6における総次数と平均解析時間

数値計算例では、ハウスホルダー二分法や部分修正系二分法で解く方法より優れた結果が得られている。また、本例のように小さい方から50個の固有値・固有ベクトルを求めるために例えば一般固有値問題としてよく利用されるサブスペース法で解くと、全ての固有値・固有ベクトルを求めるハウスホルダーQL法より数倍程度の演算時間を要した。

参考文献

1. Hirai, I., Yoshimura, T. and Takamura, K.: On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 6, pp. 441-442, 1973.
2. 中桐滋、恒成敬三、鈴木敬子：実固有値問題の有限要素再解析（振動固有値の場合）、日本機械学会論文集（C編）、52巻、481号、pp. 2313-2317, 1986
3. Fox, R. L. and Kapoor, M. P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, pp. 2426-2429, 1968.
4. Rogers, L. C.: Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA Journal, Vol. 8, No. 5, pp. 943-945, 1970.
5. Kirsch, U.: Approximate Structural Reanalysis for Optimization along a Line, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 18, pp. 635-651, 1982.
6. 菊池文夫、相沢龍彦：部分的に設計変更された構造物の自由振動解析法、日本機械学会論文集（C編）、49巻、447号、pp. 1905-1913, 1983.
7. Lancaster, P.: Lambda Matrix and Vibrating Systems, Pergamon, Inc., pp. 82-83, 98-99, 1966.
8. Hirai, I. and Kashiwagi, M.: Derivatives of Eigenvectors of Locally Modified Structure, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 11, pp. 1769-1773, 1977.

（1990年10月12日受付）