

部分修正系スツルム法による固有値解析

NUMERICAL EIGENSOLUTION BY THE STURM METHOD FOR LOCALLY MODIFIED SYSTEMS

柏木 光博 * 平井 一男 ** Walter D. Pilkey ***

by Mitsuhiro KASHIWAGI, Itio HIRAI

The Sturm sequence property is applicable to eigenvalue analysis of a locally modified system. The derived fundamental equation is expressed by the condensed matrices with the order of the modified parts without reference to the order of the original system, keeping the advantages of the Sturm sequence property. The fundamental equation is essentially exact under the assumption that all the eigenvalues and eigenvectors of the original system are found previously. This paper derives the fundamental equation and shows that the equation is available for finding the eigenvalues of a locally modified system with many adjacent eigenvalues starting from the unmodified system with many multiple and adjacent eigenvalues.

1. 序

スツルム列^{9)~11)}は固有値を確実に求めることのできる便利な方法として周知のものであるが、これを部分修正系(システムB)に対して有効に利用できる基礎式を誘導することができる^{10), 11)}。スツルム列は二分法等によって個々の固有値の存在範囲を位置付けるに際し本質的に安定である。また、数値計算時に生ずる丸め誤差を除けば、理論的には指定された精度で正確に計算できる。基本式は原系(システムA)の次数とは無関係な修正部の次数を持つ圧縮された行列によって表されており、システムBの全次数についての行列式の計算を行う必要はなく、また修正部材の大幅な変動および求めにくい近接した固有値に対しても確実に根を探索できる。この論文では、始めに提案の基礎式を誘導し、これを多重根、近接根を多く有するシステムAに用いて、多くの近接根を持つシステムBの固有値を求めることが可能なことを数値計算例にて示し、またシステムBの自由度数が増加した場合のC. P. U. timeの検討も加えている。

平井等が示した部分修正系の固有値問題の解析法¹⁾は、修正前の固有値および固有ベクトルを利用するが、修正部のマトリクス次数に圧縮された基礎式によって厳密に解析できる。このような圧縮された式によって固有値問題を解析できれば、マトリクスの次数を低く抑えることができるので、時間的に早く計算でき、その効果は大きいと考えられる。上述の基礎式は、有理関数の要素からなる行列式を解く非線形問題である。このような非線形問題を試行錯誤法で解くと非常に多くの計算時間を必要とするし、解いた固有値は何番目

* 工修 九州東海大学助教授 工学部建築学科 (〒862 熊本市大江町渡鹿223)

** 工博 熊本大学教授 工学部土木環境工学科 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)

*** Ph.D Professor, Faculty of Engineering, University of Virginia, Charlottesville, Virginia, USA

にあるのかも定かでない。初期値を十分に正解値に近づけて出発する（そうしないと解がどこに行くか見当がつかない）局所的解析に適した微係数を用いるニュートン・ラフソン法等による解析では、安定した演算を望むことは容易でない。たとえ解の範囲を決めたとしても、逆線形補間法および多項式近似法等の逐次近似法による解法でも安定に解を求めることは困難であり、また仮に解が求められたとしても数個ランダムに得られることもあることを確かめている。そして例えばニュートン・ラフソン法で解くとした場合は、固有値が求まる毎に減次を施し、さらに次の固有値を求めるという手続きを繰り返していくことになる。この減次の操作を行うと丸め誤差が加わるので、与えられた方程式の次数が高くなるに従い、また求める固有値の次数が高くなるに従い累積誤差が増加して元の方程式の根とは異なる結果を得ることがある。このように基礎式をそのまま解くことは解析上非常に困難を伴うことが多い。

この解析では、システム A の全固有値と全固有ベクトルが以前の解析あるいは試験から求められているものとする。この前提のもとではシステム B の正確な解が得られるので、本解析法は近似解とはならない。繰り返し変更されるような最適設計のもとで、システム A の自由度が大きく、相対的に修正部次数が小さく、システム B の固有値を小さい方（あるいは大きい方）からいくらか要求されるような場合に特に有効である。

2. 部分修正系スツルム法

正定値対称な剛性行列 K および質量行列 M を持つ n 次の系（システム A）が、 $K + \Delta K$ および $M + \Delta M$ （システム B）に、それぞれに変更されたとき、システム B の特性方程式は以下のように書ける。

$$|C| \equiv |K + \Delta K - \lambda [M + \Delta M]| = 0 \quad (1)$$

ここに λ はシステム B の固有値であり、 ΔK と ΔM のそれぞれの要素の値の大小は問わない。システム A の固有ベクトルを $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ とすると、 $n \times n$ の固有モード行列は

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (2)$$

のように表され、システム A に対し以下のように対角化されているものとする。

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (3)$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (4)$$

ここに T は転置行列を示し、 I は $n \times n$ の単位行列を、 Λ は $n \times n$ の以下のようなシステム A の固有値の対角行列である。

$$\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (5)$$

ここで、 i 番目の固有ベクトル ϕ_i を以下のように分割する。

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \ell \\ n - \ell \end{matrix} \quad (6)$$

同じようにして $n \times \ell$ の固有モード行列 Φ_L を表すと

$$\begin{aligned} \Phi_L &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\ell] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_\ell \\ \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_\ell \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_L \\ \Phi_L \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \ell \\ n - \ell \end{matrix} \end{aligned} \quad (7)$$

また、 Φ_a と Φ_b を次のように定義する。

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} \Phi_L & 0 \\ 0 & I_\ell \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \ell \\ n - \ell \end{matrix} \quad (8)$$

$$\Phi_b = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} 1\Phi_L & 0 \\ \hline 2\Phi_L & I_2 \end{array} & \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} & \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、 I_2 は $(n-\ell) \times (n-\ell)$ の単位マトリクスであり、 Φ_a と Φ_b は

$$|\Phi_a| = |\Phi_b| \quad (10)$$

なる関係を持つ。 C も同様にして分割すると

$$C = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} C_1 & C_3^T \\ \hline C_3 & C_2 \end{array} & \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} & \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} \end{bmatrix} \quad (11)$$

のように表せる。以上の Φ_a , Φ_b , C より

$$|\Phi_a^T C \Phi_a| = |\Phi_b^T C \Phi_b| \quad (12)$$

なる関係を得る。ある任意の $n \times n$ 行列 T の $\ell \times \ell$ 先頭首座行列 T_ℓ の行列式を $|T|_\ell$ とすると、式(12)の左辺の行列は

$$\Phi_a^T C \Phi_a = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} 1\Phi_L^T C_1 1\Phi_L & 1\Phi_L^T C_3^T \\ \hline C_3 1\Phi_L & C_2 \end{array} & \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} & \begin{array}{c} \ell \\ n-\ell \end{array} \end{bmatrix} \quad (13)$$

よって

$$\begin{aligned} |\Phi_a^T C \Phi_a|_\ell &= |1\Phi_L^T C_1 1\Phi_L| \\ &= |1\Phi_L|^2 |C|_\ell \end{aligned} \quad (14)$$

同様にして式(12)の右辺は

$$\begin{aligned} |\Phi_b^T C \Phi_b|_\ell &= 1\Phi_L^T C_1 1\Phi_L + 2\Phi_L^T C_3 1\Phi_L + 1\Phi_L^T C_3^T 2\Phi_L + 2\Phi_L^T C_2 2\Phi_L \\ &= \begin{bmatrix} 1\Phi_L \\ 2\Phi_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 & C_3^T \\ C_3 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\Phi_L \\ 2\Phi_L \end{bmatrix} \\ &= \Phi_L^T C \Phi_L \end{aligned} \quad (15)$$

となる。式(15)に式(1), (3), (4)を代入すると

$$|\Phi_b^T C \Phi_b|_\ell = |\Lambda_\ell - \lambda I_\ell + \Phi_L^T [\Delta K - \lambda \Delta M] \Phi_L| \quad (16)$$

上式を $n \times n$ の行列で書き直すと

$$\begin{aligned} |\Phi_b^T C \Phi_b|_\ell &= |I + [\Delta K - \lambda \Delta M] \Phi_L [\Lambda_\ell - \lambda I_\ell]^{-1} \Phi_L^T| \cdot |\Lambda_\ell - \lambda I_\ell| \\ &= |Q_\ell| \cdot |\Lambda_\ell - \lambda I_\ell| \quad \ell = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 I_ℓ は $\ell \times \ell$ の単位行列であり

$$Q_\ell = I + [\Delta K - \lambda \Delta M] G_\ell \quad (18)$$

$$\Lambda_\ell = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell] \quad (19)$$

$$G_\ell = \Phi_L [\Lambda_\ell - \lambda I_\ell]^{-1} \Phi_L^T \quad (20)$$

G_ℓ の i, j 要素 $G_{\ell ij}$ は

$$G_{\ell ij} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (21)$$

のようになる。ここに λ_k はシステムAの k 番目の固有値を、 ϕ_{ik} と ϕ_{jk} はシステムAの固有ベクトル ϕ_k の i 番目および j 番目の要素をそれぞれに表している。

いま、考えている修正は部分的だから、 ΔK と ΔM はその要素のすべてが0であるような行と列を含んでいる。これらの行と列を ΔK と ΔM から除くと、 $\overline{\Delta K}$ と $\overline{\Delta M}$ （修正部次数 m ）のような縮小行列を得る。これらを用いると、 ΔK と ΔM は

$$\Delta K = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \overline{\Delta K} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\Delta M = \begin{bmatrix} \overline{\Delta M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \quad (23)$$

のように再配列できる。同様に G_k と Q_k も

$$G_k = \begin{bmatrix} \overline{G}_k & G_{k,t} \\ G_{k,t} & G_{k,s} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \quad (24)$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_k & Q_t \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \quad (25)$$

となる。このようにして式(17)は

$$|\Phi^T C \Phi|_k = |\overline{Q}_k| \prod_{k=1}^k (\lambda_k - \lambda) \quad k=1, 2, \dots, n \quad (26)$$

のようになる。ここに

$$\overline{Q}_k = \overline{I} + [\overline{\Delta K} - \lambda \overline{\Delta M}] \overline{G}_k \quad (27)$$

$k=n$ の場合、式(27)は以下のような参考文献(1)の特性方程式と同一になる。

$$|\overline{I} + [\overline{\Delta K} - \lambda \overline{\Delta M}] \overline{G}_n| = 0 \quad (28)$$

式(14)と(26)とから、ある領域における λ の変化に対する式(26)の符号の変化の数は $|C|$ のそれに等しい。このことは、スツルム列特性により、ある区間における固有値の個数を計算できることになる。式(26)によってスツルム列をシステムBの全次数について計算することは時間を要するので、一つ一つの固有値の領域を計算した後は、式(28)によって、符号の変化を見ながら二分法などで λ を求めていく方が望ましい。

3. 数値解析

図1に示すような1節点に3自由度を有する剛接合平面骨組を例にとり、一部材の大幅な修正を、および求めにくい近接した固有値を有する小幅な修正をした系に対して数値解析する。一般固有値問題として係数マトリクスを作成すると共に、倍精度演算を行った。対象とする骨組は10層10スパン（総次数 $n=243$ ）である。修正前の骨組の部材断面は、全部材について $40 \times 40 \text{ cm}^2$ であり、層高を4m、スパン長を4mとした。支点は全て固定とした。修正前の固有値、固有ベクトルについては、ハウスホルダーQL法により求めた。解析結果（表-1）によると、近接根と重根が多い例題となっている。骨組の修正箇所は最下層中央柱のみとする。部材は長方形断面とし、修正前の断面の幅： b 、高さ： h 、断面積： A_0 、断面2次モーメント： I_0 、修正後の断面積： A 、断面2次モーメント： I とする。また、修正は断面の高さについてのみ行うものとし、設計変数を α とすると A_0 、 I_0 、 A 、 I は

$$A_0 = b \cdot h, \quad I_0 = b h^3 / 12, \quad A = (1 + \alpha) A_0, \quad I = (1 + \alpha)^3 I_0$$

のように表され、修正量 ΔA 、 ΔI は

$$\Delta A = A - A_0 = \alpha A_0, \quad \Delta I = I - I_0 = \{(1 + \alpha)^3 - 1\} I_0$$

として表される。部材の単位体積当りの重量を $\gamma = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$ 、ヤング係数は $E = 2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とした。上記 α については -1 と 0.1 の2通りについて解析する。 $\alpha = -1$ の意味は修正する箇所の部材を除く修正である。また、 $\alpha = 0.1$ は小幅な修正である。収束値については、 $p+1$ 段階繰返し時における q 番目の固有値 $\lambda_q^{(p+1)}$ と p 段階繰返し時の固有値 $\lambda_q^{(p)}$ との相対誤差値が、下記のように ε 以下になったとき収束したものとした。

$$\left| \frac{\lambda_q^{(p+1)} - \lambda_q^{(p)}}{\lambda_q^{(p+1)}} \right| \leq \varepsilon = 1 \times 10^{-9} \quad (29)$$

表1に解析結果を1次から45次の固有値について示している。修正前の固有値は、システムAが上下左右に
 対称であることより重根（1と2，5と6，9と10，13と14，17と18，20と21，25と26，27と28，36と37，38と3
 9，42と43，44と45）や近接根（特に23と24，30と31，32と33）が数多くみられる。 $\alpha = -1$ （修正量大）の場合、
 固有値が大きく変化しているのは、1, 13, 17, 27, 29, 30, 32次に見られ、特に1次の固有値の変化は大きい。そ
 の他は、それほど変化していない。近接根は、38と39，42と43にみられる。このような変動に対し部分修正
 系スツルム法は的確に解を探索している。 $\alpha = -0.1$ （修正量小）の場合、全体に固有値は変化していない。
 しかし、修正量が小さいために近接根が数多くみられる。特に、30と31，38と39，42と43は近く、またシス
 テムAの固有値に対しても極く近い。このような近接根に対しても部分修正系スツルム法は的確に解を探索
 している。

図2～図7は、図1の例題を10層10スパン（ $n=243$ ）を含み11層11スパン（ $n=386$ ）および12層12スパン
 （ $n=507$ ）に拡張し、求める固有値の個数（10, 20, 30, 40, 50個）とC.P.U. timeの関係を、 $\alpha = -1$ 、 $\alpha = -0.1$
 の両方について示している。同じ自由度に対しては、 $\alpha = -1$ より $\alpha = -0.1$ の時がC.P.U. timeは大きくなっ
 ている。このことは、近接根による演算回数の増加を示している。システムBの固有値はハウスホルダー二
 分法によって解析している。この方法はハウスホルダー法による3重対角化に時間を要するので、求める固
 有値の個数に対する演算時間勾配は小さい。提案法は3重対角化を必要としないので、ハウスホルダー二分
 法より速く計算されている。特に求める固有値の個数が少ない場合、速くなっている。また、全自由度の増
 加に対しては、その効果は顕著である。 $\alpha = -1$ の場合と $\alpha = -0.1$ の場合の、修正量による変化はほとんどな
 い。

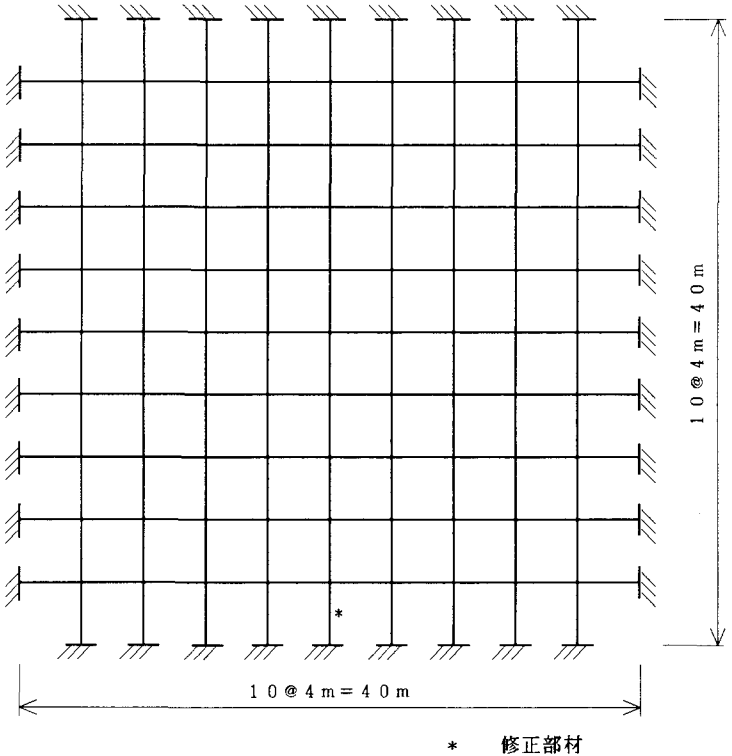


図1. 数値計算用平面骨組

固 有 値 番 号	システム A		システム B			
	Householder-QL法	Householder二分法	$\alpha = -1$		$\alpha = -0.1$	
			Householder二分法	提案法	Householder二分法	提案法
1	26675.4727058	12865.1631494	12865.1630718	26547.3704315	26547.3704315	
2	26675.4727058	26681.4348785	26681.4348759	26675.7181476	26675.7181465	
3	27240.0998111	27252.6466264	27252.6466151	27240.0936380	27240.0936343	
4	27540.7123501	27551.5614971	27551.5614932	27541.3454181	27541.3454166	
5	28668.4068737	27625.9927525	27625.9927525	28553.9246544	28553.9246544	
6	28668.4068737	28724.8280139	28724.8279815	28669.9605328	28669.9605211	
7	30589.6870138	30608.6222138	30608.6222094	30591.7873586	30591.7873511	
8	30647.8542671	30726.7967499	30726.7967727	30646.5580218	30646.5580044	
9	33344.9517004	31575.0234686	31575.0234686	33227.8985730	33227.8985729	
10	33344.9517004	33495.8494292	33495.8492853	33344.4347029	33344.4346614	
11	36880.8700920	36887.1802775	36887.1802515	36873.3446259	36873.3445802	
12	36907.0705177	37088.8315871	37088.8313523	36908.5300663	36908.5300471	
13	41113.7561973	38705.5077753	38705.5077702	40990.5833076	40990.5833076	
14	41113.7561973	41314.6178809	41314.6175352	41103.3508655	41103.3507875	
15	45470.6387855	45472.8449774	45472.8449675	45463.8594249	45463.8593596	
16	45480.5077725	45626.4161226	45626.4157900	45474.9932589	45474.9932552	
17	48943.3082058	46775.7398386	46775.7398408	48816.1069382	48816.1069383	
18	48943.3082058	48997.8673892	48997.8672453	48938.0563943	48938.0563672	
19	57330.1913591	57216.4925356	57216.4921333	57302.2085702	57302.2085142	
20	63037.5060233	62644.9472519	62644.9458547	62934.3840082	62934.3837997	
21	63037.5060233	63036.7743108	63036.7743108	63037.4829369	63037.4829370	
22	69073.5639029	69068.3578179	69068.3578178	69073.4575477	69073.4575477	
23	72690.2137391	71887.3510520	71887.3780822	72459.0473414	72459.0468630	
24	72690.3108884	72690.2396260	72690.2396260	72690.2308094	72690.2308094	
25	79295.1282260	78955.6250695	78955.6237296	79189.3505487	79189.3503287	
26	79295.1282260	79056.3337304	79056.3337516	79294.7924554	79294.7924554	
27	86402.3947851	79916.7336129	79916.7336438	86109.9351307	86109.9345053	
28	86402.3947851	85533.7398069	85533.7364084	86402.3028522	86402.3028522	
29	90504.0905719	86407.3049359	86407.3049359	90313.3345416	90313.3341668	
30	93831.7111259	90030.4255429	90030.4240473	93831.4401982	93831.4401982	
31	93832.9908211	93831.7549529	93831.7549529	93831.9368415	93831.9368415	
32	104089.7183116	93856.1235552	93856.1235552	103698.9741558	103698.9732444	
33	104090.4674872	103092.0241084	103092.0193593	104090.3212982	104090.3212981	
34	104717.6078562	104090.7223909	104090.7223902	104315.5597102	104315.5597100	
35	106351.2548009	105764.6754235	105764.6754236	106230.0389290	106230.0384708	
36	106479.5644768	106007.8616407	106007.8602876	106259.0307275	106259.0307280	
37	106479.5644768	106477.7445864	106477.7445864	106478.8049523	106478.8049523	
38	106602.1541956	106600.0131177	106600.0131177	106601.1204468	106601.1204462	
39	106602.1541956	106600.9981804	106600.9981793	106601.6163537	106601.6163537	
40	107171.6037864	106921.2019504	106921.2019503	107142.5311294	107142.5311294	
41	109397.0602690	107579.7834250	107579.7834252	109005.8401769	109005.8401772	
42	110177.5419620	110167.5907653	110167.5907019	110169.9016651	110169.9016484	
43	110177.5419620	110177.5419344	110177.5419344	110177.5419522	110177.5419522	
44	112565.8152819	112148.9123699	112148.9123691	112466.0417145	112466.0415138	
45	112565.8152819	112353.0592464	112353.0584718	112563.0168899	112563.0168899	

重根

近接根

表 1. 固有値解析結果 (1次~45次)

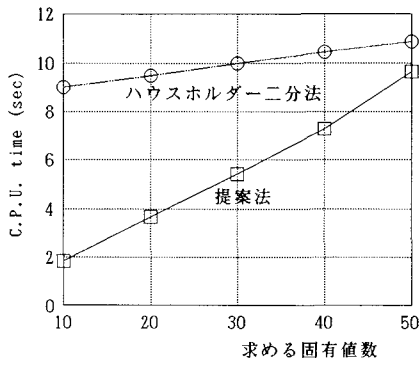


図 2. 求める固有値数と C.P.U. time
($n=243$, $\alpha=-1$)

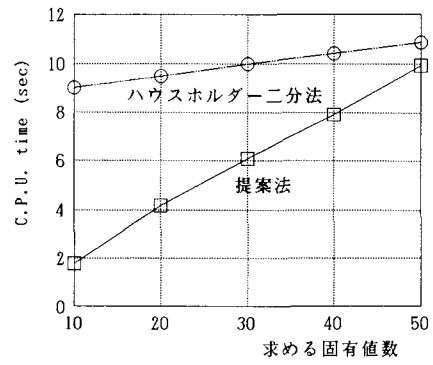


図 5. 求める固有値数と C.P.U. time
($n=243$, $\alpha=-0.1$)

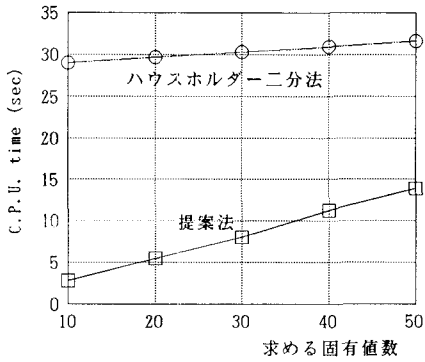


図 3. 求める固有値数と C.P.U. time
($n=363$, $\alpha=-1$)

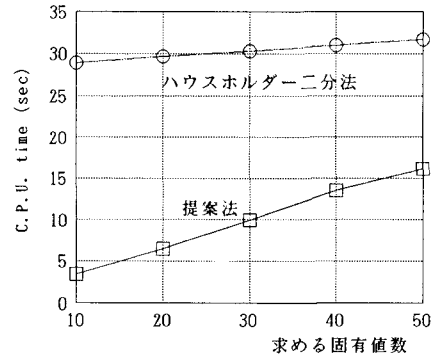


図 6. 求める固有値数と C.P.U. time
($n=363$, $\alpha=-0.1$)

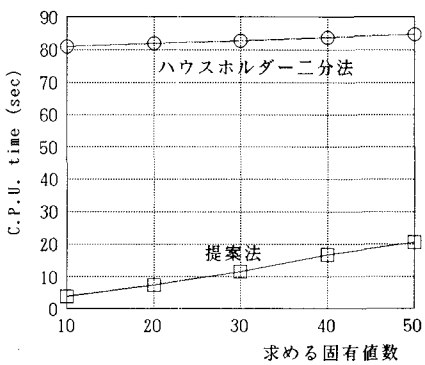


図 4. 求める固有値数と C.P.U. time
($n=507$, $\alpha=-1$)

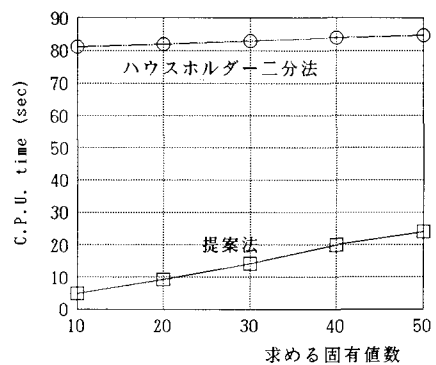


図 7. 求める固有値数と C.P.U. time
($n=507$, $\alpha=-0.1$)

4. 結び

提案された方法はスツルム列特性に基づいた解析法であり、修正部の行列次数の大きさの基本式から成っている。そしてスツルム列の特性を失うことなく、原系の行列次数とは無関係に圧縮された行列次数による式として示されている。式(21)は不連続な関数であり、システムAの固有値の近傍では plus 無限大から minus 無限大へと変化する。このような変化の大きい関数を trial and error method^{1)~4)}で解くのは容易でない。よって、このようなスツルム列があれば、式(28)によってそれぞれの固有値の存在領域を確実に決定でき、不連続な箇所の極近傍の解も提案法は精度よく求めることができる。数値計算例により要求される固有値を抜かすことなく安定して求めることが理解できよう。図2～図7に示された C.P.U. time は、今回は簡単な方法として二分法を式(28)に対して利用しているが、より効果的な方法(例えば有理関数近似法⁹⁾)を利用することにより演算時間の短縮化を計れるものと思われる。また C.P.U. time は求める固有値の数および要求される精度によっても影響を受けるので、再解析を行う際に、修正箇所の数や修正部の次数およびシステムAの自由度数について検討し使われるべきであろう。

今後の課題として、部分空間の固有値問題(例えばサブスペース法)に見られるように、いくつかの固有値・固有ベクトルの情報をもとに、いくつかの固有値を求める場合についての応用があげられる。

参考文献

1. Hirai, I., Yoshimura, T. and Takamura, K., : On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 6, pp. 441-442, 1973.
2. Wang, B. P., Palazzolo, A. B. and Pilkey, W. D., : Reanalysis, Modal Synthesis, and Dynamic Design, in State-of-the-Art Surveys of Finite Element Methods (Eds Noor, A. and Pilkey, W. D.), ASME, 1983.
3. Wang, B. P. and Pilkey, W. D., : Efficient Reanalysis of Locally Modified Structures, Proc. First Chautauqua on Finite Element Modeling, Schaeffer Analysis, 1980.
4. Kitis, L., Pilkey, W. D. and Hirai, I., : Reanalysis, Chapt. 2, Part 4, in Finite Element Handbook, Edited by Kardestuncer, H., Norrie, D. H., Atluri, S., Pilkey, W. D., and Brezzi, F., McGraw-Hill, New York, pp. 4.109-4.120, 1987.
5. 戸川隼人 : 有限要素法による振動解析, サイエンス社, 1984.
6. Wilkinson, J. H., : The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, pp. 300-302, 1965.
7. Golub, G. H. and Van Loan, C. F., : Matrix Computation, John Hopkins, pp. 305-308, 1983.
8. 村田建朗, 小国力, 唐木幸比古 : スーパーコンピューター, 丸善出版, 1985.
9. 柏木光博, 平井一男, 大脇信一 : 有理関数近似による部分修正系の固有値解析, 情報処理学会第39回(平成元年後期)全国大会, pp. 123-124, 1989.
10. 柏木光博, 平井一男, 大脇信一, W. D. Pilkey : スツルム列特性に基づく安定した部分修正系の固有値解析, 日本綱構造協会, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 14, pp. 221-226, 1990.
11. Kashiwagi, M., Hirai, I., Ohwaki, S., and Pilkey, W. D., : Stable Eigensolution of Locally Modified Systems Based on the Sturm Sequence Property, Finite Element in Analysis and Design (to be published).

(1990年10月12日受付)