

弾性固有値解を用いた有効長さ手法による 鋼アーチ系橋梁の弾塑性面外座屈強度の算定

ESTIMATION OF OUT-OF-PLANE BUCKLING STRENGTH OF STEEL ARCH BRIDGES
BY AN EFFECTIVE LENGTH METHOD

崎元 達郎* 坂田 力** 小堀 俊之***

by Tatsuro SAKIMOTO, Tsutomu SAKATA, and Toshiyuki KOBORI

A practical method to estimate or check the elastoplastic out-of-plane buckling strength of steel arch bridges is investigated. First, the effective length of the arch bridge is determined by using the eigenvalue for the elastic buckling. Then, substituting the slenderness parameter computed from thus determined effective length into a column strength formula, one can obtain the ultimate compressive stress for the arch bridge. This method is called as an effective length procedure.

The results of the effective length procedure are compared with the results of the ultimate strength analysis by a sophisticated computer program of finite element method. It is found that the procedure gives fairly good predictions for the buckling strength of numerical models for through-type, half-through type and deck type arch bridges. The effective length procedure seems to be one of the promising methods for the practical stability design of arch bridges.

1. まえがき

現行の道路橋示方書（以下道示と略す）のアーチ橋に対する面外座屈の照査規定は、以下のように要約することができる。

- 1) いくつかのライズー支間比の単材アーチについて、弾性座屈に対する固有値 γ を与え、有効座屈長さ $l' = \pi l_0 / \sqrt{\gamma} = \beta_z \cdot l_0$ (l_0 = アーチ支間長) を求める。
- 2) アーチの形式（上路式，中路式，下路式）の違いによる荷重の作用方向の変化の影響を考慮する補正係数 ϕ を上記の有効座屈長さに乗じる。 $l_e = \phi \beta_z l_0$ 。
- 3) 補正して得られる有効座屈長さ l_e を用いて計算した細長比を直柱の基準強度式に代入して、許容軸方向圧縮応力度 σ_{oa} を求める。

* 工博 熊本大学教授 工学部土木環境工学科 (860 熊本市黒髪2丁目39-1)

** 学博 熊本大学助手 自然科学研究科 (860 熊本市黒髪2丁目39-1)

*** 工修 セントラル・コンピュータ・サービス㈱ (105 東京都港区虎ノ門4-3-13)

4) 水平反力Hをアーチ部材の平均断面積 A_g で除して得られる作用応力度の代表値が、上記軸方向圧縮応力度 σ_{os} の0.85 (安全率1.7を2.0に割増すための係数 $=1.7/2.0$) 倍より小さいことを照査する。すなわち、 $H/A_g \leq 0.85 \sigma_{os}$

実橋に近い数値モデルについて、上記の道示の方法によって求めた強度と有限変位弾塑性解析法¹⁾によって求めた強度を比較した著者らの研究²⁾³⁾⁴⁾によると、道示の方法による結果は、特に橋門開口部を有する下路式及び中路式アーチ橋に対して非常に過大な強度(危険側の算定)を与えることが明らかになった。

本研究の目的は、道示の手法(弾性固有値解を用いた有効長さ手法)そのものが悪いのか、道示を与えている単材アーチに対する弾性座屈に対する固有値解の値 γ が複雑な実橋に適用できないのかを明らかにすることである。そこで、実橋に近いアーチ橋の数値モデルについて、構造系全体の弾性座屈に対する固有値解を求めて道示と同じ有効長さ手法を適用し、別途計算された有限変位弾塑性解析の結果と比較して、有効長さ手法の妥当性と適用性を検討した。

2. 弾性固有値解を用いたアーチ橋の面外座屈強度の算定法

マトリクス構造解析により分岐座屈問題を考える場合、その固有方程式は微小変位の剛性マトリクスを K_o 、有限変位の影響を考慮する初期応力マトリクスを K_{go} とすると、次式で与えられる。

$$|K_o + \alpha K_{go}| = 0 \quad (1)$$

ここで $||$ は行列式を、 α は固有値を示す。

今、構造物に基準荷重 P_o を作用させた時の代表部材の軸力を N_o とし、分岐座屈までの挙動を線形と仮定すると、弾性座屈時の部材軸力 N_{or} は、

$$N_{or} = \alpha N_o \quad (2)$$

で与えられる。

一方、対象構造物の代表部材と同一の断面を有する両端ヒンジ柱の座屈軸力 $N_{or,E}$ は、オイラーの式より、

$$N_{or,E} = \pi^2 EI / l_o^2 \quad (3)$$

で与えられる。ここで EI は代表部材の曲げ剛性、 l_o は両端ヒンジ柱の長さである。

ここで、式(2)と式(3)を等置して l_o を求めると、アーチ橋の代表部材に生じているのと同じ大きさの軸力で座屈する両端ヒンジ柱の長さ、すなわちアーチ橋を両端ヒンジ柱に置き換えたと考えた場合の等価柱の長さ(=有効長さ)が次式により求められる。

$$l_o = \pi \sqrt{EI / \alpha N_o} \quad (4)$$

さらに、式(4)を用いて細長比パラメーター λ_y が次式により計算される。

$$\lambda_y = (l_o / \pi r_y) \sqrt{\sigma_y / E} = \sqrt{A \sigma_y / \alpha N_o} \quad (5)$$

上式で、 σ_y は鋼材の降伏応力度、 r_y 及び A は代表部材断面の断面2次半径及び断面積である。

ここでさらに、基準軸力 N_o を降伏軸力 $N_y (= A \sigma_y)$ とすれば、細長比パラメーターは簡単に次式で表わせる。

$$\lambda_y = \sqrt{1 / \alpha} \quad (6)$$

この λ_y を道示で規定される直柱の基準強度式に代入することにより、終局応力度 $\sigma = \sigma_u / \sigma_y$ が求められる。ここで、アーチ橋の終局強度を、終局時の荷重に対して線形計算で得られる代表部材の軸力 N_u より計算される終局応力度 $\sigma_{Nu} = N_u / A$ で定義することにして、 σ_{Nu} と上記の終局応力度 σ_u がほぼ一致すれば、 σ_u をアーチ橋の終局応力度(強度) σ_{Nu} と考えることができる。

以下においては、有限変位弾塑性解析法を用いて求めたアーチ橋の数値モデルの終局強度と上記の方法でも求めた終局応力度(σ_u)を比較することにより、この方法の適用性を検討する。

ところで、構造物の有効長さは、荷重条件や代表断面を変化させると変わることが指摘されている⁵⁾が、本論文の以下の計算では、荷重条件はアーチ橋の面外座屈に最も厳しいと考えられる等分布荷重満載に固定し、代表断面も支点断面に固定して、議論を進めることにする。

3. 有限変位弾塑性解析法によるアーチ橋の面外座屈強度の算定

定式化の詳細は文献1)に、解析法や解析例については文献2)に示しているので、ここでは概要のみ述べる。

まず、式(1)で用いたのと同じ剛性マトリクス K_0 、 K_g に塑性化の影響を考慮するための剛性マトリクス K_p を加えると、つり合い方程式は次式で与えられる。¹⁾

$$[K_0 + K_p + K_g] U = P - (T \bar{f} - \bar{P}) \quad (7)$$

ここに、 U は節点変位の増分、 P は節点荷重の増分、 T は座標変換マトリクス、 $\bar{f}$ と $\bar{P}$ は前荷重段階までの断面力と節点荷重である。定式化には、von Mises の降伏条件と Prandtl-Reuss の応力-ひずみ関係を用い、塑性化した断面のねじりについてはせん断流一定の仮定を用いている。

数値計算では、断面を分割して、残留応力や塑性化を考慮し、各々の荷重段階での剛性マトリクスを評価しつつ、増分つり合い式(7)を解く。荷重は増分的に与え、各荷重段階で塑性化と区分線形化による誤差($T \bar{f} - \bar{P}$)を消去するためにニュートンラフソン法による収束計算を行う。最終状態近くの変位が急増する状態で、マトリクスが特異になった(変位が無限大になり崩壊する)と判断して、終局強度とする。具体的には、終局時の等分布荷重 p_u に対して、線形計算で得られる支点軸力 N_u または水平反力 H_u より計算される終局応力度 $\sigma_{Nu} = N_u / A$ または $\sigma_{Hu} = H_u / A$ を終局強度の代表値とする。

4. 解析モデル

解析モデルは図-1に示すような実橋に近い骨組形を有する下路式、中路式、上路式アーチ橋とする。下路式及び中路式アーチ橋のモデルは、支間長 l 、ライズ-支間比 f/l 、アーチリブの断面積 A_a を一定とし、アーチリブ間隔 a 、面外曲げ剛性比 I および補剛率 β を変化させた。ここで、 I は2本のアーチリブを一体と考えたときの面外曲げ剛性 $E I_{ay}$ に対する道路桁全体の面外曲げ剛性 $E I_{gy}$ の比($I = I_{gy} / I_{ay}$)であり、補剛率 β はアーチリブ全長 L に対する横構によって補剛されたアーチリブ部分の長さ L_1 の比($\beta = L_1 / L$)である。アーチリブの支点条件は、アーチの面内での回転に対しては、両端ヒンジとし、アーチ面外への回転に対しては固定としている。また、中路式アーチにおいては、アーチリブと補剛桁はその交点で結合していない。下路式及び中路式アーチの断面寸法等を図-2に示す。

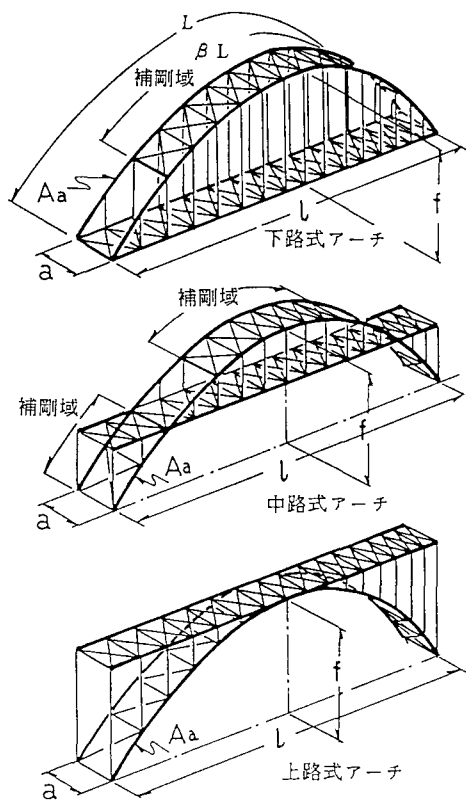
上路式アーチ橋のモデルは、アーチリブと道路桁をクラウン部で剛結したモデルで、アーチリブ間隔 a およびライズ-支間比 f/l を一定とし、支間長 l および面外曲げ剛性比 I を変化させた。上路式アーチ橋の断面寸法等を図-3に示す。なお、各モデルの横構部材は、特には示していないが、全体系の崩壊まで部材として座屈しない程度の箱型断面とした。

弾塑性解析を行う上で、断面寸法を具体的に与えざるを得ないが、いずれにしても強度は応力度の形で評価するので、アーチリブの断面積は任意に与えても影響は少ないと考え、通常の設計で得られる最小値に近い値を用いている。以上の数値モデルの構造諸元をまとめて表-1に示す。

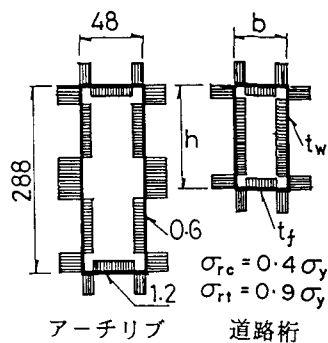
5. 数値解析結果と考察

図-4に、代表的なモデルの面外座屈変位モード図を示す。弾性固有値解析の結果と有限変位弾塑性解析の結果は、細部では若干異なる場合も生じるが、おおむねよく対応した変位モードを示している。

以下の図においては、横軸に細長比パラメーター λ_y をとり、縦軸に終局強度 σ_{Nu} / σ_y または σ_{Hu} / σ_y をとって、数値モデルの強度を評価する。各々の数値モデルについて、道示の直接適用または



図－1 解析モデルの骨組構成



道路桁断面寸法
(下路・中路式アーチ橋)

I	h	b	tf	tw
0.1	10.0	10.0	1.31	1.31
0.3	76.0	38.0	0.92	0.46
1.0	80.0	40.0	1.96	1.96
3.0	80.0	40.0	6.40	6.40

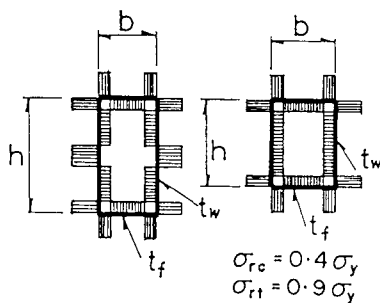
(単位 cm)

図－2 下路式および中路式アーチ橋の断面寸法と残留応力分布

アーチリブ断面寸法
(上路式アーチ橋)

ℓ (m)	h	b	tf	tw
100	120.0	40.0	1.0	1.0
200	168.0	56.0	1.4	1.4
300	204.0	68.0	1.7	1.7

(単位 cm)



アーチリブ 道路桁

道路桁断面寸法
(上路式アーチ橋)

I	ℓ (m)	h	b	tf	tw
0.1	100	29.6	14.8	0.37	0.37
	200	41.6	20.8	0.52	0.52
	300	50.4	25.2	0.63	0.63
0.3	100	51.2	25.6	0.64	0.64
	200	71.2	35.6	0.89	0.89
	300	86.4	43.2	1.08	1.08
0.5	100	65.6	32.8	0.82	0.82
	200	92.0	46.0	1.15	1.15
	300	111.4	55.7	1.39	1.39
1.0	100	92.8	46.4	1.16	1.16
	200	129.8	64.9	1.62	1.62
	300	157.6	78.8	1.97	1.97

(単位 cm)

図－3 上路式アーチ橋の断面寸法と残留応力分布

表-1 解析モデルの構造諸元

	下路式	中路式	上路式
支間長 ℓ (m)	150	150	100, 200, 300
ライズ f (m)	22.5	22.5	20, 40, 60
f / ℓ	0.15	0.25	0.20
主構間隔 a (m)	20, 10, 5	20, 10, 5	5.2
剛性比 $\bar{I}$	0.1~3.0	0.1~3.0	0.1~1.0
補剛比 β	0.48~0.86	0.64~0.88	1.0
断面積 A_a (m ²)	448	448	298.8~903.1

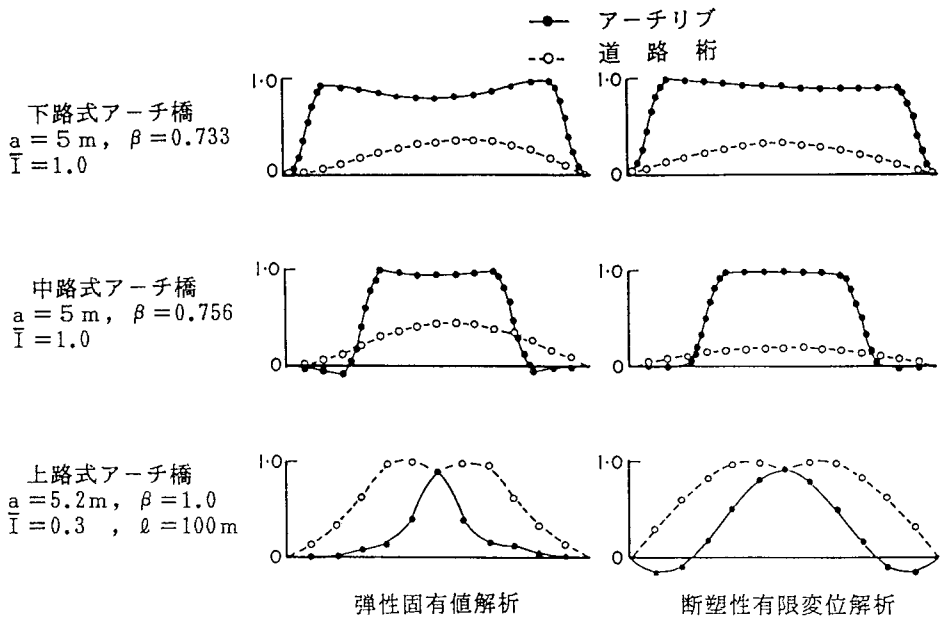


図-4 面外座屈変位モード

本文の方法の適用によって得られた細長比パラメータ λ_y の位置の縦座標として、有限変位弾塑性解析の結果得られた終局強度の値をプロットして示す。すなわち、ひとつの数値モデルについては、縦軸の値（強度）は等しく、横軸の値（評価された細長比）が道示の方法と本文の方法とでは異なることになる。なお、図中の実線は柱の基準強度曲線であり、道示では、評価された細長比に対するこの曲線の縦座標値でアーチ橋の面外座屈に対する終局強度を算定することを規定していることになる。

図-5は、下路式アーチ橋の数値モデルに対して、道示の方法により細長比パラメータを評価した結果を示している。この図より、照査法の不確かさ等に対して考慮されている安全率の割増し2.0/1.7を考慮しても、明らかに相当危険側の評価をすることになる。これは、示方書では、橋門開口部がある構造に対しても2本のアーチリブを一体断面として扱うために、細長比を小さく評価することが主な原因である。また、当然ながら示方書では、補剛域の影響が考慮されないので、 β が小さいほど危険度は大きくなるのが分かる。

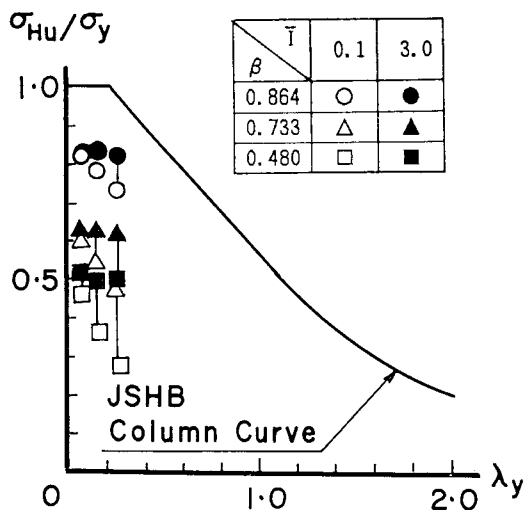


図-5 道路橋示方書による整理
(下路式アーチ)

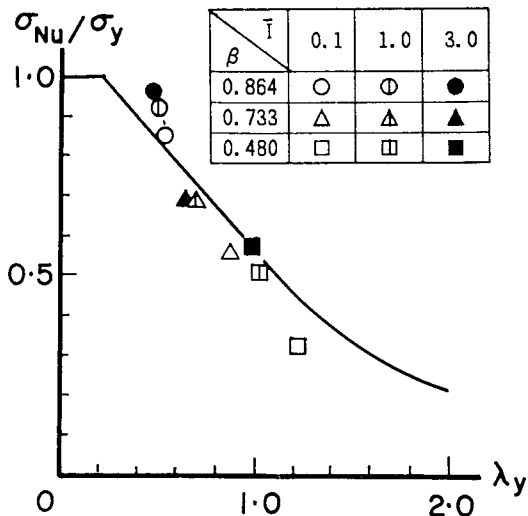


図-6 弾性固有値解析による整理
(下路式アーチ、主構間隔 5 m)

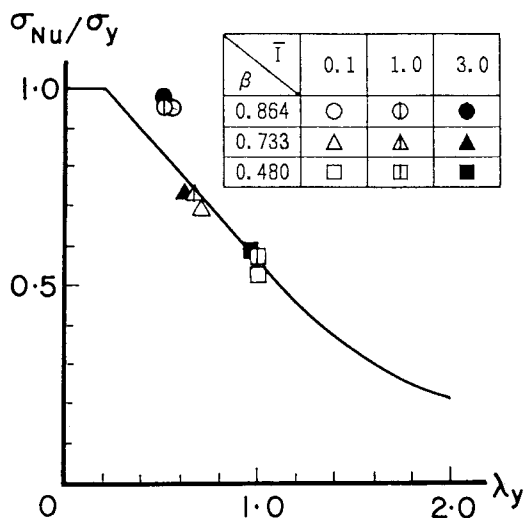


図-7 弾性固有値解析による整理
(下路式アーチ、主構間隔 20 m)

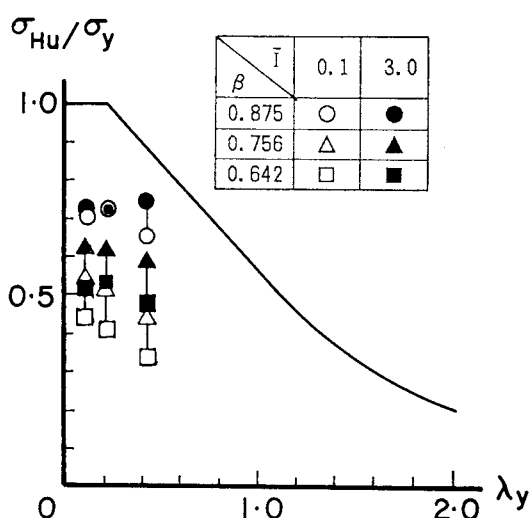


図-8 道路橋示方書による整理
(中路式アーチ)

図-6, 7 は、同じ数値モデルの有効長さを本論文の方法で評価して、終局強度をプロットしたものである。主構間隔 a 、補剛域 β 、面外曲げ剛性比 $\bar{I}$ の実用的な変化の範囲に対して、充分良い算定ができることが分かる。

図-8, 9, 10 は、下路式と同じく開口部を設ける必要のある中路式アーチ橋に対する結果である。図-8 に示す道示による評価の結果は再び危険側であり、図-9, 10 に示す本論文の方法による評価の結果は、主構間隔 a 、補剛域 β 、面外曲げ剛性比 $\bar{I}$ の実用的変化の範囲に対して、十分に良い近似値を示している。

図-11, 12 は橋門開口部を設ける必要の無い上路式アーチ橋の数値モデルに対する結果である。

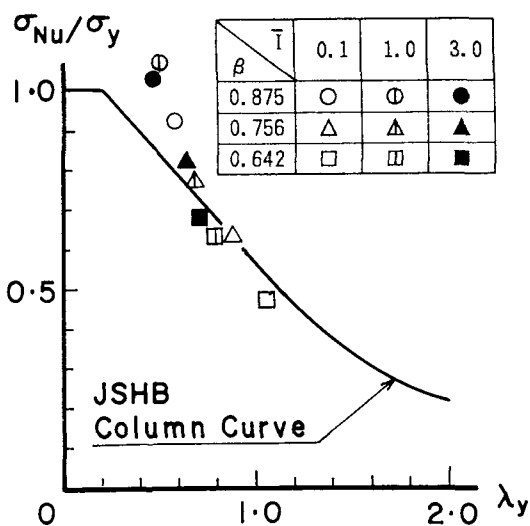


図-9 弾性固有値解析による整理
(中路式アーチ、主構間隔 5 m)

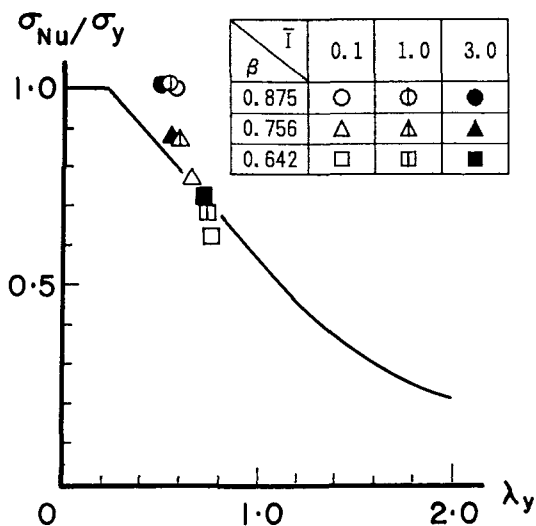


図-10 弾性固有値解析による整理
(中路式アーチ、主構間隔 20 m)

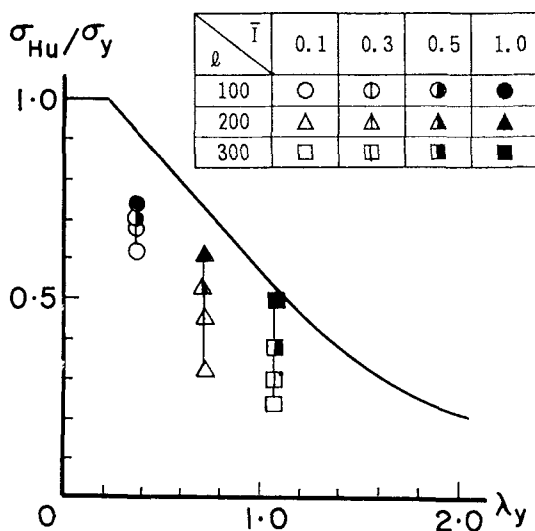


図-11 道路橋示方書による整理
(上路式アーチ、主構間隔 5.2 m)

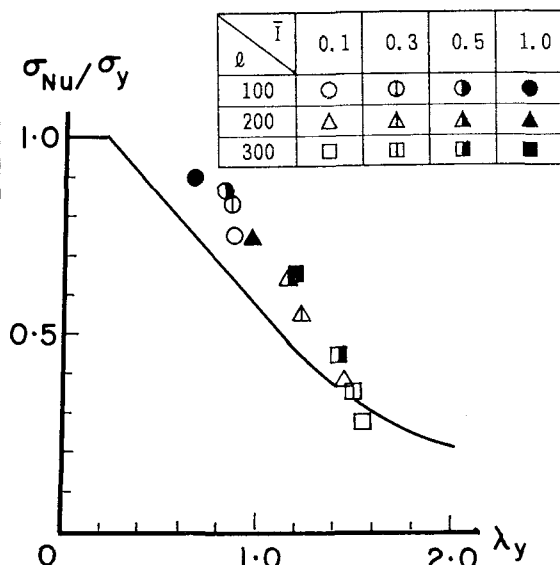


図-12 弾性固有値解析による整理
(上路式アーチ、主構間隔 5.2 m)

図-11に示す道示による評価の結果は、道路桁の面外曲げ剛性（面外曲げ剛性比 $\bar{I}$ ）が大きい場合には、傾向として実線で示す直柱の基準強度曲線に近づくが、総じて危険側となる。これは、道示では、道路桁の面外曲げ剛性を無限大とし、横構で結ばれた2本のアーチリブ全体をひとつの断面と考えた一本のアーチリブのみの構造に対する固有値を用いているので、道路桁の曲げ剛性が小さくなるほど道路桁がアーチの面外変位を拘束する効果を過大に評価することになることと、アーチリブと横構からなる骨組の水平面外曲げに伴うせん断に対するせん断柔性が考慮されていないことが、主な原因であると考えられる。

図-12は、同じ数値モデルに対する本論文の方法による評価結果である。若干安全側であるが、支間の变化、面外曲げ剛性比の変化にかかわらず、良好な評価を与えている。

6. 結論

実橋に近い骨組構造に実橋が取り得る範囲の諸元を与えて作り出した数値モデルに対して、有限変位弾塑性解析を行い面外座屈で崩壊する場合の耐力を求めた。

次にこれらの数値モデルの有効座屈長さを、道路橋示方書を直接適用する場合と、構造系そのものの弾性座屈に対する固有値を求めて同様の手法を適用する場合の二種類の方法で計算して、数値モデルの面外座屈強度を評価し、直柱の基準強度曲線との比較を行った。

その結果、道路橋示方書の直接適用は危険側の算定値を与え、構造系そのものの固有値を求めて行う場合は、比較的良好な強度評価を与えることが明らかになった。

ここで用いた数値モデルは、実橋として断面決定したのではなく等断面リブを有するものであり、橋門部の断面補強その他のディテールにおいては、必ずしも実橋そのものを表現したモデルとなっていない部分もあるが、構造系全体の弾性座屈に対する固有値を用いれば、道路橋示方書及び本論文で示した有効長さ手法そのものは、鋼アーチ系橋梁の面外座屈照査法として、有望な実用的方法のひとつであることが明らかになった。

ここで用いた数値モデルの類型に属するアーチ系橋梁については、著者らは、すでに、文献2) 3) 4) において、弾塑性有限変位解析により得られた終局強度に基づいて導出した有効長さ公式によっても、電卓程度の計算で精度よく面外座屈強度が算定できることを示したが、本論文の方法は、電子計算機の使用を必要とするが、手法としての一般性があるので、ここで取り扱った類型以外のアーチ系橋梁の面外座屈強度に対しても大きくはずれない近似値を与えることが期待されるという利点がある。

本研究では、アーチリブの格点間等を有効長さにとって梁-柱として、アーチリブ断面を決定した後に、アーチ構造全体の面外座屈を照査する方法について述べた。文献5) 6) では、この手法を発展させて、個々の部材に対して有効長さを定義し、断面決定そのものを行う方法が、変断面柱や簡単なラーメン構造について検討されている。複雑なアーチ橋についてもこのような方法で断面決定をすることができるかは興味のあるところで、今後の課題としたい。

参考文献

- 1) Komatsu, S. and Sakimoto, T.: Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross Sections, Proc. JSCE, No. 252, Aug. 1976, pp. 143-157.
- 2) 崎元達郎, 鶴田栄一, 坂田力: 下路式および中路式アーチ橋の弾塑性面外座屈強度, 構造工学論文集 Vol. 34A, 1988年3月, pp. 243-254.
- 3) Sakimoto, T. Sakata, T. and Tsuruta, E.: Elasto-Plastic Out-of-Plane Buckling Strength of Trough Type and Half-Trough Type Arch Bridges, Structural Engineering / Earthquake Engineering, Vol. 6, No. 2, Oct. 1989, pp. 307s-318s.
- 4) 崎元達郎, 坂田 力, 古賀一臣, 岡本剛治: 上路式アーチ橋の面外座屈強度, 構造工学論文集 Vol. 37A, 1991年3月
- 5) Nishino, F. and Hasegawa, A.: A Practical Design for Compression Members and Frames Using Eigen-Value Analysis, Preliminary Report of International Colloquium on stability of Metal Structures, Paris 16-17 Nov. 1983, pp. 497-504
- 6) 西野文雄, 三木千寿, 鈴木 篤: 道路橋示方書Ⅱ 構橋編改定の背景と運用 第8回 1 3章ラーメン構造, 橋梁と基礎 1981年10月, pp. 10-13.

(1990年10月12日受付)