

膨張膜の非線形解析について

NONLINEAR ANALYSIS OF INFLATED HYPER-ELASTIC MEMBRANES

水澤富作* ジョン W. レナード**

By Tomisaku Mizusawa and John W. Leonard

This paper deals with the nonlinear analysis of inflated hyper elastic membranes using an isoparametric membrane element. The nonlinearities arising from large displacements, from nonlinear stress-strain relationships and from nonconservative loadings are considered. The total Lagrangian description and the principle of virtual work are used to formulate the equilibrium equations. The viscous relaxation technique is also applied to calculate the equilibrium configuration of membranes.

Numerical examples are included to demonstrate the validity and capability of the present method.

1. はじめに

膜構造はケーブルと共にテンション構造と呼ばれ、大型の利用空間を作り出すドームやテント、飛行船、消波用及びエネルギー備蓄用海洋構造物など仮設構造や常設構造として広く用いられている。膨張膜は、曲げや圧縮に抵抗する曲面構造と異なり、封じ込められた空気や流体による圧力により安定した構造形状が作り出される。このような膜は、その形状を保つため、または曲げ荷重により生じる応力を低減するために、ケーブルで補強される場合も多くみられる。膜構造では、その厚さが非常に薄く、曲げや圧縮剛性が無視され、面内引張り応力と面内せん断応力のみで抵抗する構造物である。また、圧力の導入前とその後での形状がかなり異なり、また外力の作用によってもその形状が著しく変形する場合もある。

このような膜構造の解析過程は、一般に2つに分けられる¹⁾。すなわち、i) 初期圧力の導入による初期つり合い形状を求める形状決定問題、ii) 得られたつり合い形状での静的及び動的問題である。また、膜の構造解析では、次のような非線形性を考慮しなければならない。

- (1) 幾何学的非線形性 (有限変位問題),
- (2) 超弾性材料などの材料学的非線形性 (有限ひずみ問題),
- (3) 導入される内圧などのような形状依存の非線形外力 (非保存力問題),
- (4) 圧縮応力による面内剛性の低下 (Wrinke問題) などが挙げられる。

一方、このような膜構造問題は、古くから解析的手法や種々の数値解析法により解かれてきている²⁻⁴⁾。

* 工博 大同工業大学助教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40)

** Ph.D. オレゴン州立大学教授 工学部土木工学科 (Corvallis, Oregon 97331, U.S.A.)

Rivlinら⁵⁾による弾性及び超弾性膜問題の解析的研究、またOdenらの三角形要素による研究⁶⁾、VermaとLeonardら⁷⁾によるSuper-parametric要素モデルを用いたシェル膜の解析やCharrierら⁸⁾による三角形要素を用いたNeo-Hookean弾性材より成る円形膜や楕円膜の大変形解析が挙げられる。これらの研究では、高次の非線形方程式を解くために、Newton-Raphson法や増分・反復法が用いられている。

本研究では、有限要素法を用いて、膨張膜の非線形解析について検討している。3次元有限変位弾性理論、Total Lagrangian表現、Greenのひずみテンソル・Kirchhoffの応力テンソル及び仮想仕事の原理に基づき、任意形状のIsoparametric膜要素の非線形基礎方程式を導いている。また、得られた非線形方程式を解くために、Viscous Relaxation法を用いている。

本手法の有用性を示すために、種々の荷重を受ける膨張膜やケーブルで補強された膜を解き、解の精度や力学的特性について解析している。また、膨張膜の自由振動解析についても検討している。

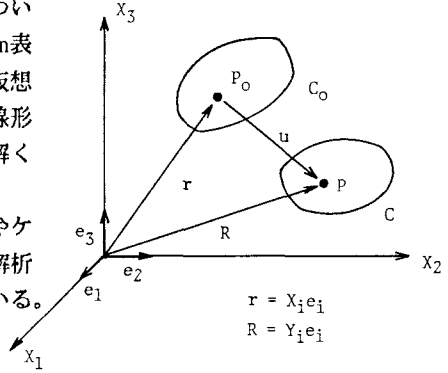


Fig. 1 Undeformed and deformed configurations of a body

2. 式の定式化

3次元有限変位弾性理論⁹⁾と仮想仕事の原理に基づき、膜要素の基礎方程式を導いている。ここで、次の解析仮定を設ける。

- (1) 膜の厚さは非常に薄く、曲げ剛性は無視する。
- (2) 膜の中央面に垂直な応力成分は無視し、平面応力状態を仮定する。
- (3) 変形前の中立面に垂直な断面は変形後もその面に垂直である。
- (4) 面内引張り応力のみに抵抗し、面内圧縮応力には抵抗しない。
- (5) 変位とひずみの大きさには制限を設けない。
- (6) 超弾性材料も考慮する。
- (7) 無応力での膜の初期形状を、変形後の形状における応力とひずみの表現に用いる (Total Lagrangian表現)。
- (8) テンソル表現と曲線座標を用いる。

以上の解析仮定に基づき、はじめに3次元物体の変位とひずみテンソルについて示し、膜の中央面に縮退して、膜要素の変位、ひずみおよび応力の関係式を導く。

2.1 3次元物体の変位とひずみ

全体座標系として、基底ベクトル e_1, e_2, e_3 を持つ直交座標系 (X_1, X_2, X_3) が、Fig. 1に示されている。いま、時刻 t_0 での3次元物体の初期形状を C_0 とし、外力の作用により時刻 t での変形後の形状を C とする。また、 C_0 上の任意の点 P_0 が C 上の P に変位するものとする。この物体を曲線座標系 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) で表せば、 C 上の点 P は、 C_0 上の P_0 の座標と同じ値で表せる。 P_0 と P の位置ベクトルを全体座標系で r と R で表せば、次式で与えられる。

$$r = X_i e_i, \quad R = Y_i e_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots(1)$$

ここで、 X_i と Y_i は、 P_0 と P の直交座標系での座標値を示す。また、 P_0 から P に変位した場合の変位ベクトル u は、次のように与えられる。

$$u = u_i e_i, \quad R = r + u \quad \dots(2)$$

ただし、 $r = r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 、 $R = R(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ 、 $u = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ である。これらの関数は、微分可能であるので、曲線座標に接する共変基底ベクトルは、 C_0 、 C 上で、それぞれ次式で定義される。

$$g_i = r_{,i} = \partial r / \partial \xi^i, \quad G_i = R_{,i} = \partial R / \partial \xi^i \quad \dots(3)$$

したがって、 $dr = d\xi^i g_i$ 、 $dR = d\xi^i G_i$ であるので、 ds_0 と ds を、 dr と dR の大きさであると定義すると、次式で与えられる。

$$ds_0^2 = dr \cdot dr = g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad ds^2 = dR \cdot dR = G_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad \dots(4)$$

ただし、 $g_{ij} = g_i \cdot g_j$ 、 $G_{ij} = G_i \cdot G_j$ であり、それぞれ C_0 と C での共変メトリックテンソルをなす。

また、Greenのひずみテンソル、 γ_{ij} は、次式で定義される。

$$\gamma_{ij} = (1/2)(G_{ij} - g_{ij}) \quad \dots(5)$$

共変メトリックテンソルより求められる3つのひずみ不変量は、

$$I_1 = g^{ij} G_{ij}, \quad I_2 = G^{ij} g_{ij} I_3 = G/g; \quad i, j=1,2,3 \quad \dots(6)$$

で与えられる。ここで、 $G = \det |G_{ij}|$ 、 $g = \det |g_{ij}|$ である。 g^{ij} 、 G^{ij} は、反変メトリックテンソルであり、それぞれKroneckerの δ 関数を用いて、次式で定義される。

$$g^{ki} g_{kj} = \delta^i_j, \quad G^{ki} G_{kj} = \delta^i_j, \quad \text{ただし、} \delta^i_j = \begin{cases} 1 & ; i=j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad \dots(7)$$

2.2 膜の形状、応力とひずみ

薄い膜要素の変形前の形状 C_0 上の中央面での位置ベクトルは、2変数により次式で定義される。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\xi_1, \xi_2) \quad \dots(8)$$

従って、任意の点での位置ベクトルは、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{a}_3 \quad \dots(9)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{a}_3$ は、中央面に垂直な単位ベクトルである。したがって、 C_0 上での共変基底ベクトル $\mathbf{g}_q$ は、

$$\mathbf{g}_q = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^q = \mathbf{r}'_{,q} + \xi_3 \mathbf{a}_{3,q}; \quad q=1,2 \quad \dots(10)$$

で与えられる。中央面上では、 $\xi_3=0$ より、次のようになる。

$$\mathbf{g}_q = \mathbf{r}'_{,q} = \mathbf{a}_q; \quad q=1,2 \quad \dots(11)$$

同様に、変形後の形状 C での膜の中央面の形状は、 $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'(\xi_1, \xi_2)$ で定義されるので、 C 上の任意の点では、次のように示される。

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}'(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{A}_3 \quad \dots(12)$$

ここで、 $\mathbf{A}_3$ は中央面に垂直なベクトルであり、その大きさは、膜の厚さの変化を表す。また、 C_0 上での共変基底ベクトルは、 $\mathbf{G}_q = \mathbf{R}_{,q} = \mathbf{R}'_{,q} + \xi_3 \mathbf{A}_{3,q}$ で与えられるので、中央面では $\xi_3=0$ より、

$$\mathbf{G}_q = \mathbf{R}'_{,q} = \mathbf{A}_q; \quad q=1,2 \quad \dots(13)$$

になる。 C_0 の中立面での共変テンソル要素は、次式で与えられる。

$$g_{qr} = \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{a}_r = a_{qr}, \quad g_{33} = \mathbf{a}_{33} = 1, \quad g_{q3} = 0; \quad q,r=1,2 \quad \dots(14)$$

ここで、変形前の膜の厚さを h_0 、変形後の厚さを h とすると、膜の厚さの伸び比 λ は、 $\lambda = h/h_0$ で定義される。したがって、 C 上での共変テンソル要素は、

$$G_{qr} = \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{A}_r = A_{qr}, \quad G_{33} = \mathbf{A}_{33} = \lambda^2, \quad G_{q3} = 0; \quad q,r=1,2 \quad \dots(15)$$

で与えられる。また、Greenのひずみテンソル γ_{qr} は、

$$\gamma_{qr} = (1/2)(G_{qr} - g_{qr}); \quad q,r=1,2 \quad \dots(16)$$

より求められる。さらに、共変テンソルより導かれるひずみの不変量は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} I_1 &= g^{qr} G_{qr} = \lambda^2 + a^{qr} A_{qr} \\ I_2 &= G^{qr} g_{qr} I_3 = \lambda^2 (A/a) a_{qr} A^{qr} + \lambda^4 (A/a) \\ I_3 &= G/g = \lambda^2 (A/a) \end{aligned} \quad \dots(17)$$

ここで、 $q,r=1,2$ 、 $a = \det |a_{qr}|$ 、 $A = \det |A_{qr}|$ であり、 a^{qr} と A^{qr} は、それぞれ次式で定義される。

$$a^{sq} a_{sr} = \delta^q_r, \quad A^{sq} A_{sr} = \delta^q_r; \quad s=1,2 \quad \dots(18)$$

次に、Greenのひずみテンソル、 γ_{st} とKirchhoffの応力テンソル(2nd Piola-Kirchhoff stress tensor), τ^{qr} を用いて線形弾性材料の構成式を示すと、次式で与えられる¹⁵⁾。

$$\tau^{qr} = C^{qrst} \gamma_{st} \quad \dots(19)$$

ただし、材料定数テンソルは、次式で定義される。

$$C^{qrst} = E \nu / (1 + \nu) / (1 - 2\nu) a^{qr} a^{st} + E / 2 / (1 + \nu) (a^{qs} a^{rt} + a^{qt} a^{rs}); q, r, s, t = 1, 2 \quad \dots(20)$$

ここで、Eは弾性係数、 ν はPoisson比である。一方、Mooney-Rivlin材のような超弾性材の応力テンソルは、ひずみエネルギー関数より、

$$\tau^{qr} = 2a^{qr} [C1 + C2\lambda^2] + 2A^{qr} \{C2A/a \cdot \lambda^2 [C1 + C2(I_1 - \lambda^2)]\} \quad \dots(21)$$

で与えられる⁵⁾。ただし、 $a = \det |a_{qr}|$, $A = \det |A_{qr}|$ であり、 $\lambda = h_0/h$ は厚さの伸び比、 I_1 はひずみ不変量である。C1とC2はMooney-Rivlin材の材料定数である。

2. 3 膜に作用する表面力の表示

膜に作用する圧力のような表面力は、物体が有限変形する場合に、その大きさと作用方向が変化し、非線形性を伴う非保存外力である。したがって、変形後の形状Cに作用する外力を、変形前のC₀での値で表す必要がある。C上の膜に作用する表面力、fは、次のように表わされる。

$$f = p^i A_i ds \quad \dots(22)$$

ここで、 p^i はC上の単位面積当りに作用する力の成分であり、 A_i は共変基底ベクトルであり、 ds はC上の微小要素を示す。もし、外力の大きさと方向を一定にしたまま、C₀上に作用させると、

$$f = t_{0i} e_i ds_0 \quad \dots(23)$$

で表される。 t_{0i} はC₀上での単位面積当りの力の直交成分であり、 e_i は基底ベクトルである。

したがって、上の2式を等置し、両辺で e_k を用いた内積をとれば、

$$t_{0k} = (ds/ds_0) p^i (A_i \cdot e_k) \quad \dots(24)$$

が得られる。ただし、 $ds/ds_0 = \sqrt{A/a}$ である。ここで、膜要素の中央面に常に垂直に作用する圧力を、 $p^i = p(\xi_1, \xi_2)$ とすれば、C₀で作用する圧力の直交成分は、式(24)より、

$$t_{0k} = \sqrt{A/a} p (A_3 \cdot e_k) = (p/\sqrt{a}) [(A_1 \times A_2) \cdot e_k]; k=1, 2, 3 \quad \dots(25)$$

で与えられる。ただし、 e_k は直交座標系での単位ベクトル、 $A_3 = A_1 \times A_2 / |A_1 \times A_2|$ は、単位垂直ベクトルである。

2. 4 Isoparametric膜要素

ここでは、高次の補間関数を用いたIsoparametric膜要素の運動方程式を、仮想仕事の原理より導く。

Isoparametric要素概念より、座標関数と変位関数に同じ形状関数、 $M^I(\xi_1, \xi_2)$ を用いれば、

$$X_i(\xi_1, \xi_2) = M^I(\xi_1, \xi_2) X_i^I, u_i(\xi_1, \xi_2) = M^I(\xi_1, \xi_2) u_i^I; I=1, \dots, N \quad \dots(27)$$

で与えられる。ここで、 X_i, u_i は、直交座標系での要素の節点座標と節点変位を示し、 ξ_1, ξ_2 は、要素の自然座標系である。Nは要素の節点数である。したがって、Hamiltonの原理を用いれば、要素の仮想運動方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \int_{s_0} \int (1/2) \tau^{qr} \delta \gamma_{qr} h_0 ds_0 + \int_{s_0} \int \rho_0 u_i \delta u_i h_0 ds_0 - \int_{s_0} \int \rho_0 b_{0i} \delta u_i h_0 ds_0 \\ - \int_{s_0} \int t_{0i} \delta u_i ds_0 = 0; q, r=1, 2; i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad \dots(28)$$

ここで、 s_0 は膜要素の中央面での初期面積である。

したがって、式(27)を用いて、2. 2で定義した基本式に代入すれば、C₀とC上での基底ベクトル a_q, A_q は、それぞれ次式のようになる。

$$a_q = (X_i e_i)_{,q} = M^I_{,q} X_i^I e_i, A_q = [(X_i + u_i) e_i]_{,q} = M^I_{,q} (X_i^I + u_i^I) e_i \quad \dots(29)$$

また、式(11)と(13)で示した共変テンソル要素 a_{qr} と A_{qr} は、次式で与えられる。

$$a_{qr}=(M^I_{,q}X^J_{,i})(M^J_{,r}X^I_{,i}), A_{qr}=[M^I_{,q}(X^I_{,i}+u^I_{,i})][M^J_{,r}(X^J_{,i}+u^J_{,i})] \quad \dots(30)$$

ひずみテンソル γ_{qr} は、次のよう表される。

$$\gamma_{qr}=(1/2)(M^I_{,q}M^J_{,r}X^I_{,i}u^J_{,i} + M^I_{,q}M^J_{,r}X^J_{,i}u^I_{,i} + M^I_{,q}M^J_{,r}u^I_{,i}u^J_{,i}) \quad \dots(31)$$

したがって、仮想ひずみ、 $\delta\gamma_{qr}$ は、次式で表される。

$$\delta\gamma_{qr}=(\partial\gamma_{qr}/\partial u^I_{,i})\delta u^I_{,i}=(1/2)(M^J_{,q}M^I_{,r} + M^I_{,q}M^J_{,r})(X^J_{,i}+u^J_{,i})\delta u^I_{,i} \quad \dots(32)$$

また、 $\delta u_i=M^I\delta u^I_{,i}$ 、 $\dot{u}_i=M^I\dot{u}^I_{,i}$ 及び $ds_0=\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2$ を式(28)代入することにより、膜要素の運動方程式が、次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/2)\tau^{qr}(M^J_{,q}M^I_{,r} + M^I_{,q}M^J_{,r})(X^J_{,i} + u^J_{,i})h_0\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2 \\ & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_0 h_0 M^I M^J u^J_{,i} \sqrt{a}d\xi_1d\xi_2 - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_0 b_{0i} h_0 M^I \sqrt{a}d\xi_1d\xi_2 \\ & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t_{0i} M^I \sqrt{a}d\xi_1d\xi_2 = 0 \end{aligned} \quad \dots(33)$$

ここで、第1項は内力の仕事、第2項は慣性力の仕事であり、また、第3項及び4項は、それぞれ物体力(b_{0i})と表面力(t_{0i})による仕事である。 h_0 は初期厚さ、 ρ_0 は密度である。また、 t_{0i} は、式(25)より、エドングトンのイプシロン、 ϵ_{ijk} を用いれば、

$$\begin{aligned} t_{0i} &= (p/\sqrt{a})[(A_1 \times A_2) \cdot e_k] \\ &= (p/\sqrt{a})\epsilon_{ijk}M^I_{,i}M^J_{,j}[X^I_{,i}X^J_{,j} + X^I_{,i}u^J_{,j} + u^J_{,i}X^I_{,j} + u^I_{,i}u^J_{,j}] \end{aligned} \quad \dots(34)$$

で定式化され、 C_0 の単位面積で表されたC上での圧力の直交成分を示し、膜要素の変形後の形状(変位や方向)に依存する非線形外力である。したがって、式(33)を増分・反復法¹⁵⁾により定式化すると、膜要素の幾何学的非線形性、超弾性や非保存力を含めた運動方程式が、時刻 $t+\Delta t$ における $n+1$ 回反復で次のように表される。

$$[M^{IJ}]_{ij}^{t+\Delta t} \{\dot{u}^J\}_{n+1}^{t+\Delta t} + [K_T^{IJ}]_{ij}^{t+\Delta t} \{\Delta u^J\}_j = \{P^I\}_{n+1}^{t+\Delta t} - \{F^I\}_n^{t+\Delta t} \quad \dots(35)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [M^{IJ}]_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M^I M^J \delta^I_{,i} \rho_0 h_0 \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2, \\ [K_T^{IJ}]_{ij}^{t+\Delta t} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/2)^{t+\Delta t} \tau^{qr}(M^J_{,q}M^I_{,r} + M^I_{,q}M^J_{,r})\delta^I_{,i} + (1/4)(M^K_{,q}M^I_{,r} + M^K_{,q}M^J_{,r}) \\ & \times (X^K_{,i} + {}^{t+\Delta t}u^K_{,i})C^{qrst}(M^L_{,s}M^J_{,t} + M^L_{,t}M^J_{,s})(X^L_{,i} + {}^{t+\Delta t}u^L_{,i})h_0\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2, \\ \{P^I\}_{n+1}^{t+\Delta t} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^{t+\Delta t}b_{0i}M^I\rho_0h_0\sqrt{a}d\xi_1d\xi_2 + \\ & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(1/\sqrt{a})\epsilon_{ijk}M^I_{,i}M^J_{,j}(X^I_{,i}X^J_{,j} + {}^{t+\Delta t}u^J_{,j}X^I_{,i} + {}^{t+\Delta t}u^I_{,i}X^J_{,j} + {}^{t+\Delta t}u^I_{,i}{}^{t+\Delta t}u^J_{,j})d\xi_1d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\{^{t+\Delta t}P\} = \int_{n+1}^1 \int_{-1}^1 (1/2)^{t+\Delta t} \tau^{qr} (M^j_{,q} M^l_{,r} + M^l_{,q} M^j_{,r}) (X^j_i + ^{t+\Delta t}u^j_i) h_0 \sqrt{ad} \xi_1 d\xi_2$$

である。また、 $[M]$ は質量マトリクス、 $[K_T]$ は、接線剛性マトリックス、 $\{\ddot{u}\}$ は加速度ベクトルであり、 $\{\Delta u\}$ は増分変位ベクトルである。 $\{P\}$ と $\{F\}$ はそれぞれ外力ベクトルと内力ベクトルである。ケーブルで補強された膜問題では、著者ら¹⁰⁾ がケーブル解析に用いた Isoparametric ケーブル要素を用いて、式(35)に重ね合わせることで容易に定式化することができる。

式(35)において、慣性項を無視すれば、静的問題となり、また、右辺の項を無視すれば、線形化された固有値問題になる。次に、膨張膜の静的非線形解析法について述べる。

2.5 Viscous Relaxation法

膨張膜は、空気や流体の圧力により生じる初期張力を与えることにより構造の剛性が与えられるので、初期張力の与えられていない初期形状は、数値的に不安定である。幾何学的非線形問題として取り扱われる膜の初期つり合い形状を求めるために、これまでに種々の解析方法が提案されている。本研究では、任意形状の膜の初期つり合い形状を求めるために、Viscous Relaxation法¹¹⁾ を適用する。この方法は、静的つり合い方程式に仮想的な減衰項を付け加えた方程式を Newton-Raphson 法で解く手法である。また、この手法は、準動的解析法の一手法であり、Newton-Raphson 法の一般化された方法でもある。

いま、本問題の非線形剛性方程式を増分式で示すと、次式で与えられる。

$$\{^k K_T\} \{\Delta u\} = \{^{k+1}P\} - \{^k F\} \quad \dots(36)$$

ここで、 $\{^{k+1}P\}$ = 外力ベクトル、 $\{^k F\}$ = 内力ベクトル、 $k+1$ は $(k+1)$ 次荷重増分ステップを示す。 $\{\Delta u\} = \{^{k+1}u\} - \{^k u\}$ である。式(36)に、仮想的な減衰項を付加し、また $k+1$ を $t+\Delta t$ に置き換えると次式が得られる。

$$[{}^t C] \{^{t+\Delta t} \dot{u}\} + [{}^t K_T] \{\Delta u\} = \{^{t+\Delta t}P\} - \{^t F\} \quad \dots(37)$$

ここで、 $[{}^t C]$ は、仮想減衰マトリックスである。 $\{^{t+\Delta t} \dot{u}\} = \{\Delta u\} / \Delta t$ であるので、式(37)は、次のようにも表せる。

$$[(1/\Delta t) [{}^t C] + [{}^t K_T]] \{\Delta u\} = \{^{t+\Delta t}P\} - \{^t F\} \quad \dots(38)$$

ただし、 Δt は仮想時間増分を示す。したがって、式(37)を数値積分し、減衰効果が消失したときに、静的解が求められる。ただし、初期値として任意に仮定された変位が用いられる。さらに、解の収束性を高めるために、 $[{}^t C] = C(t) [I]$ と置き、減衰係数 $C(t)$ を次式のように各時間ステップで変化させている。

$$^{t+\Delta t}C = ^{t+\Delta t}\mu^\circ C, \quad ^{t+\Delta t}\mu^\circ = \mu^\circ \gamma \sqrt{\sum ({}^t u_i - {}^{t-\Delta t} u_i)^2 / \sum ({}^t u_i)^2} \quad \dots(39)$$

ここで、 $[I]$ = 単位マトリックス、また初期減衰係数、 $^\circ\mu$ 、減衰加速係数、 γ 、及び減衰マトリックス係数、 $^\circ C$ はそれぞれ任意に仮定される¹²⁾。

3 数値計算例及び考察

3.1 膨張膜の静的非線形解析

本手法の有用性を示すために、円筒膨張膜の初期つり合い形状について、厳密解や他の数値解との比較検討を行う。要素特性マトリ

ックスを求める場合、面内剛性の過大評価を避けるために低減積分を考慮している。本手法の精度を確認するために、Timoshenko¹³⁾ が Galerkin 法を用いて近似解を求めている等分布荷重を受ける周辺固定正方形弾性膜を 8 節点要素で 16 分割して解析を行った。これらの近似解と良く一致した結果が得られている。

次に、Fig. 2 に示すような高次要素と低次要素を用いて、一様な内圧、 P で膨張させられた超弾性材より

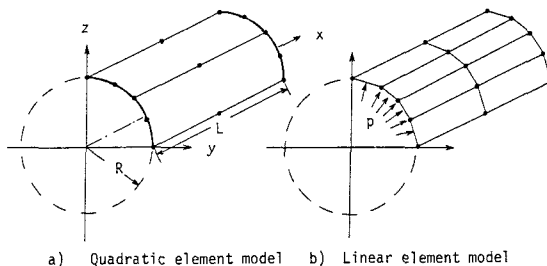


Fig. 2 Cylindrical shell element models

成る円筒膜の初期つり合い形状や応力性状について解析を行った。ただし、境界条件として、長手方向の変位を拘束するが、円周方向には自由に膨張できるものとする。この円筒膜の長さは、 $L=30\text{ft}$ (9 m)、半径、 $R_0=10\text{ft}$ (3 m)、初期膜厚、 $h_0=0.01\text{ft}$ (3 mm)とし、Mooney-Rivlin材の定数は、 $C_1=2,300\text{psf}$ (110 kN/m²)、 $C_2=280\text{psf}$ (13kN/m²)である。さらに、対称性を考慮して、1/4のみを8つの4節点要素よ2つの8節点要素で離散化した。Fig. 3は、初期圧力、 P と半径膨張比、 $\Delta R/R$ の関係について示されている。また、Fig. 4と5には、そのときの円周方向と軸方向の面内引張力 N_r, N_L が示してある。Greenら⁹⁾により示されている厳密解との比較も示してある。これより、Greenらの厳密解とよく一致しており、また高次要素が少ない要素数でよい結果を示している。これらの図より、膨張変形と円周方向の応力が圧力の増大とともに 顕著な非線形性状を示している。なお、本数値計算例におけるViscous Relaxation法の適用にあたり、 $\gamma=1.0$ 、 $^{\circ}\mu=1.0$ 、 $^{\circ}C=10.0$ を用いているが、内圧の大きな問題に対しては、6回の時間ステップと 2-3回の反復計算

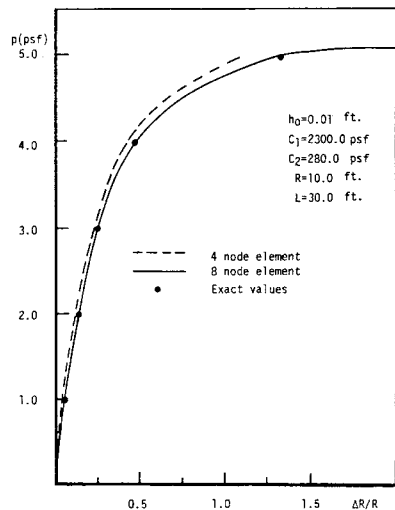


Fig. 3 Comparison of deformation of inflated cylindrical shell using different finite element models

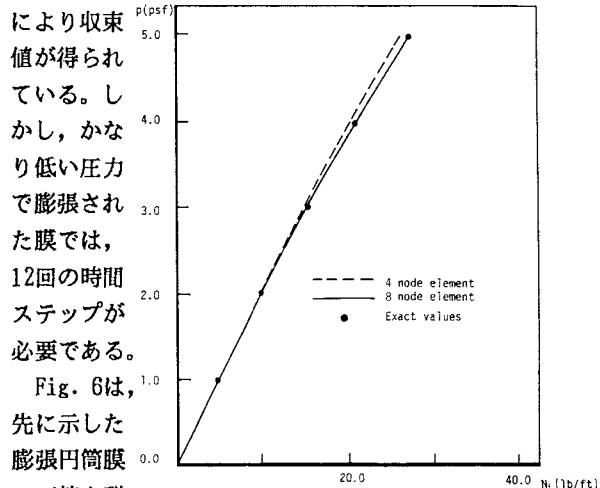


Fig. 5 Comparison of longitudinal stress resultants for cylindrical shell

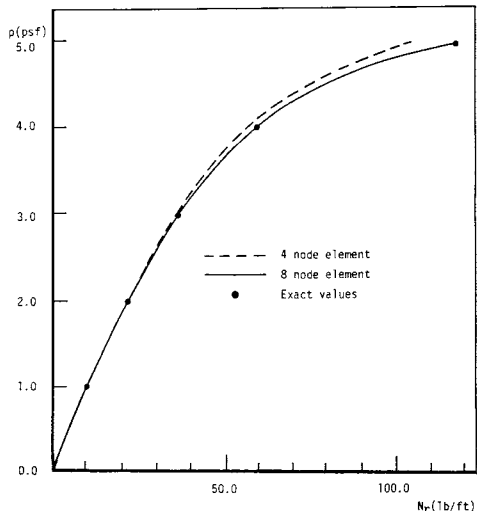


Fig. 4 Comparison of radial stress resultants for cylindrical shell

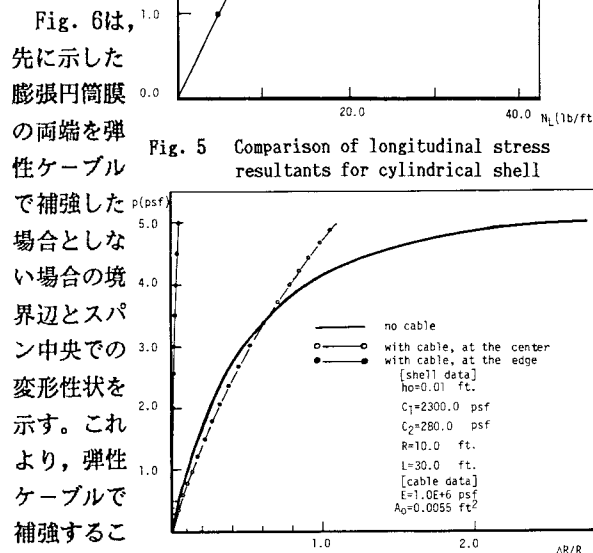


Fig. 6 Deformation of cylindrical shell with the edge cables subjected to inner pressure, p

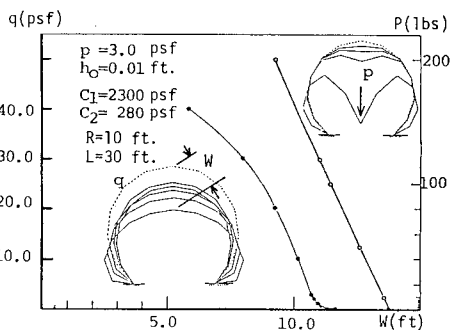


Fig. 7 Deformation of membrane shell to gravity load, q and concentrated load, P

をかなり小さくすることができる。Fig. 7は、内圧、 $P=3.0$ psfで膨らませた円筒状の超弾性膜に自重、 q や集中荷重、 P 。が作用した場合の初期つり合い形状からの頂点での鉛直変位-荷重曲線を示している。荷重の大きさに比例して変形する集中荷重に対して、自重が作用する場合には、顕著な非線形形状が見られる。

3. 2 膨張膜の自由振動解析

膨張円筒膜の振動数に与える内圧の影響について解析を行う。この問題は、先に検討した内圧による初期つり合い形状に対する微小振幅振動を取り扱うもので、式(32)の右辺の項を無視し、接線剛性マトリックスを用いる線形化された運動方程式の固有値問題である。はじめに、平面膜の振動解析を行い、Isoparametric膜要素の精度について検討を行い、また、2、3の膨張円筒膜の振動特性について示す。

Table 1では、一様な面内張力、 p を受ける正方形弾性膜の振動数を、4節点要素と8節点要素により解析し、その値を厳密解¹⁴⁾と比較している。これより、高次のIsoparametric要素を用いれば、少ない要素数で精度の高い結果が示されている。Fig. 8では、超弾性材より成る膨張半円筒膜の振動数に与える内圧、 p の影響が示してある。ここで、 $h_0=0.01$ ft, $R_0=10.0$ ft, $L=30.0$ ft, $\rho=1.0$, $C_1=2300$ psf, $C_2=280$ psfである。これより、内圧を増大させると、振動数が増大するが、ある値以上になるとその影響が小さくなっていく。また、2次モードと3次モードでは、 $p=4.0$ psfでモードの交差が生じている。さらに、底で線支持された円筒膜の振動モードに与える内圧の影響について検討してみた。内圧、 p が0.5 psfと4.0 psfの場合について解析した結果が、Table 2に示されている。また、これらのモード形状がFig. 10に示してある。これより、内圧の大きさにより、長手方向のねじりモードとその逆対称モードの生じ方にも変化が見られる。

Table 1. Comparison of natural frequencies of square membranes; $a=40.0$ in., $h_0=0.1$ in., $E=3.0E+7$ psi, $\nu=0.3$, $\rho=7.5E-4$ lb $\cdot$ s²/in⁴, $p=10.0$ lb/in.

FE models	Modes				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
4 Quadratic	40.78	65.83	65.83	107.5	109.1
9 Quadratic	40.59	64.76	64.76	82.98	91.65
18 Linear	41.61	69.75	69.75	89.44	106.9
25 Linear	41.23	67.75	67.75	88.49	102.6
Exact[14]	40.55	64.13	64.13	81.12	90.69

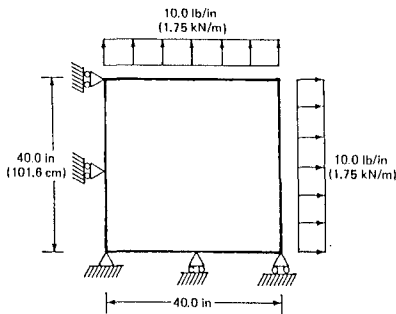


Table 2. First five natural frequencies(rad/sec) of circular cylindrical membrane due to the different inflated pressure, p

p (psf)	Modes				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
0.5	1.513	1.560	2.968	4.469	4.479
4.0	3.677	3.684	6.940	7.437	7.531

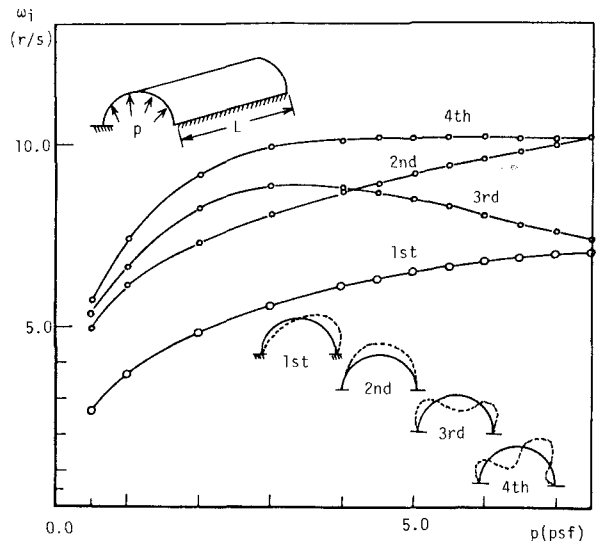


Fig. 8 Frequencies of hyperelastic semi-cylindrical membrane under different inner pressure, p ; $h_0=0.01$ ft, $R_0=10.0$ ft, $L=30.0$ ft, $C_1=2399$ psf, $C_2=280$ psf and $\rho=1.0$ lb $\cdot$ s²/ft²

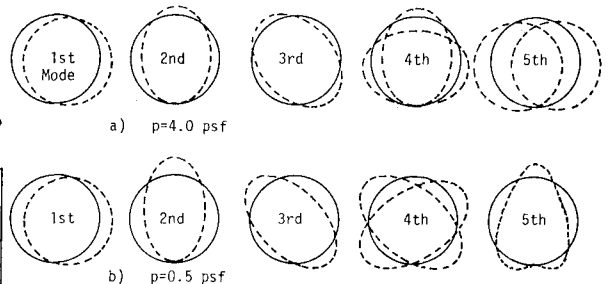


Fig. 9 The effect of inflated pressure, p on mode shapes at edges of cylindrical shells

4. あとがき

本論文では、Isoparametric膜要素を用いて、超弾性材よりなる膨張膜の静的非線形解析と自由振動解析について述べ、膨張円筒膜を例にとり、2, 3の数値解析を行い、解析精度や力学特性について検討してみた。ここで得られた主な結果を示すと、次のようである。

- (1) 高次要素を用いれば、少ない要素数で精度の高い結果が得られる。
- (2) Viscous Relaxation法を用いることにより、低圧力から高圧力により膨張された膜の初期つり合形状や任意の荷重を受ける膨張膜の静的問題を解くことができる。
- (3) 補強ケーブルを用いれば、膨張膜の変形をかなり拘束することができる。
- (4) 膨張膜の振動数や振動モードは、導入される圧力により影響を受ける。

今後、海中での膜構造の動的応答解析について検討して行きたい。なお、本研究の一部は、文部省科研費及び大同工業大学研究援助金の援助を受けている。数値計算には、本学情報処理センター、HITAC 640/20を用いた。

参考文献

- 1) Leonard, J.W.: Tension Structures. McGraw-Hill, 1987.
- 2) Yang, W.H. and Feng, W.W.: On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes. Journal of Applied Mechanics, vol. 37, pp. 1002-1011, 1970.
- 3) Hughes, T.J.R. and Carnoy, E.: Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. pp. 193-208, 1980.
- 4) Hart-Smith, L.J. and Crisp, J.D.C.: Large elastic deformations of thin rubber membranes. Int. J. Engng Sci., vol. 5, pp. 1-24, 1967.
- 5) Oden, J.T.: Finite elements of nonlinear continua. McGraw-Hill, 1972.
- 6) Oden, J.T. and Sato, T.: Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method. Int. J. Solids and Structures, vol. 3, pp. 471-488, 1967.
- 7) Verma, V.K. and Leonard, J.W.: Nonlinear behavior of cable-reinforced membranes. ASCE, Vol. 104, pp. 735-749, 1978.
- 8) Charrier, J.M., Shrivastava, S. and Wu, R.: Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming-non-axisymmetric problems. J. Strain Analysis, Vol. 24, pp. 55-74, 1989.
- 9) Green, A.E. and Adkins, J.E.: Large elastic deformations. Clarendon Press, 1954.
- 10) 水澤富作, 前島正彦, 事口寿男: 海洋ケーブルの動的非線形挙動について. 第9回海洋工学シンポジウム、日本造船学会, pp. 309-316, 1989.
- 11) Webster, R.L.: On the static analysis of structures with strong geometric nonlinearity. Compt. Struct. vol. 11, pp. 137-145, 1980.
- 12) 水澤富作, Leonard, J.W.: 膜構造の静的非線形解析について. 土木学会第44回年次学術講演会概要集, I-3, pp. 58-59, 1989.
- 13) Timoshenko, S.J. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York, 1959.
- 14) Courant, R. and Hilbert, D.: Methods of mathematical physics, vol. II. Interscience, New York, 1962.
- 15) Bathe, K.J.: Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, 1982.

(1990年10月12日受付)