

不完全合成桁の差分剛性マトリックス 解析法について

DIFFERENCE STIFFNESS MATRIX METHOD OF INCOMPLETE COMPOSITE GIRDERS

井上稔康* 佐藤浩一** 渡辺 昇***

By Toshiyasu INOUE, Koichi SATO and Noboru WATANABE

This paper presents a practical structural analysis of composite girders with incomplete interaction by two stiffness matrix methods. One is the stiffness matrix method derived from the general solutions of difference equations, and the other is that based on differential equations. Both matrices can be obtained by using Anfang Parameter Method. These stiffness matrix methods are applicable to an analysis of composite girders considering deformations and variable spacings of headed stud connectors and can be extended to an analysis of continuous composite girders with variable cross sections. The validity of the stiffness matrix methods presented herein is examined and checked by numerical calculations.

1. まえがき

異種材料を合成し複合構造物として使用する主な目的は単一材料では得ることのできない望ましい力学特性を作り出すことである¹⁾。橋梁におけるこの種の複合構造物の代表的なものの一つに鋼桁とコンクリート床版とを結合するため頭つきスタッドジベルをある間隔で離散的に配置し、両者を完全に剛に一体とした合成桁がある（完全合成桁）。この場合、鋼桁とコンクリート床版との間にずれ（すべり）が生じない結合としている。結合は一種の変形の拘束であり、拘束力はジベルに作用する力となって現れる。一方、ジベルがなければ、鋼桁とコンクリート床版の間には合成効果がないので単なる重ね梁となる。実際の合成桁に非常に剛なジベル（剛ジベル）を使用する場合でもずれあるいは変形が生じ³⁾、ずれあるいは変形に比例した力が作用することになる（不完全合成桁）。このように実際の合成桁は完全合成桁と重ね梁との中間の挙動を示す不完全合成桁となるはずである。

不完全合成桁の解析は最初 N.M.Newmark²⁾ により行われた。Newmark は次の仮定を用いて釣合い方程式を導いている²⁾。1)鋼、コンクリートの応力とひずみ関係は線形である。2)ジベルに作用する力と変位関係は線形である。3)ジベルは等分に分布している。4)鋼桁とコンクリート床版の変位は同じである。このような条件のもとでコンクリート床版に作用する軸力に関する釣合い方程式を作り、ジベルが等分布に配置されている場合の解を得ている。この理論式^{2),3)}の中でジベルのずれあるいは変形の程

*		(株) 釧路製作所	技術部	(〒060 札幌市中央区北1条西1丁目)
**	工博	北海道大学助教授	工学部土木工学科	(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
***	工博	北海道大学教授	工学部土木工学科	(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

M_v : 完全合成桁の場合の桁の曲げモーメント
 M_{ve} : ジベルの弾性変形を考慮した場合の桁の曲げモーメント
 N_v : 完全合成桁の場合のコンクリート部および鋼桁部に作用する軸力
 N_{ve} : ジベルの弾性変形を考慮した場合のコンクリート部および鋼桁部に作用する軸力
 n : E_s/E_c : 鋼とコンクリートとのヤング係数比
 N : ジベルの本数
 p : 荷重強度
 Q_v : 完全合成桁の場合の桁のせん断力
 Q_{ve} : ジベルの弾性変形を考慮した場合の桁のせん断力
 s : $s = s_c s_s$: 版のコンクリートの重心Cと鋼桁の重心Sとの距離
 s_c : $s_c = A_s/A_v \times s$: 合成断面の中立軸Vと版のコンクリートの重心Cとの距離
 s_s : $s_s = A_c/A_v \times s/n$: 合成断面の中立軸Vと鋼桁の重心Sとの距離
 T_v : 完全合成桁の場合のジベルに作用する水平せん断力
 T_{ve} : ジベルの弾性変形を考慮した場合のジベルに作用する水平せん断力
 y_e : $y_e = y_{ve} - y_v$
 y_v : 完全合成桁の場合の桁のたわみ
 y_{ve} : ジベルの弾性変形を考慮した場合の桁のたわみ
 Δ : 差分演算子

3. 中央差分表示

関数 $y(x)$ の微分は y の変化量として定義され、 x に関して一次微分、二次微分は次式で表示される。

一次微分

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

二次微分

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

更に、高次の場合も同様に定義される。もし Δx が零に近づかず、ある有限の値 (a : 例えばジベルの間隔など) をとるならば、差分表示になる。ここで、中央差分表示を用いれば、次式のようになる⁷⁾。

$$\frac{\Delta y(i)}{\Delta x} = \frac{y(i+1) - y(i-1)}{2a} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta^2 y(i)}{\Delta x^2} = \frac{y(i+1) - 2y(i) + y(i-1)}{a^2} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta^3 y(i)}{\Delta x^3} = \frac{y(i+2) - 2y(i+1) + 2y(i-1) - y(i-2)}{2a^3} \quad (5)$$

$$\frac{\Delta^4 y(i)}{\Delta x^4} = \frac{y(i+2) - 4y(i+1) + 6y(i) - 4y(i-1) + y(i-2)}{a^4} \quad (6)$$

4. 不完全合成桁の微分方程式と差分方程式

仮定は Newmark²⁾ と同じであるが、ジベルは等分に分布している場合ばかりでなく、離散的に間隔は任意であるという点が本論文の特徴である。不完全合成桁のコンクリート部の軸力の総和 N_v に関する微分方程式²⁾ と差分方程式は次のようになる。

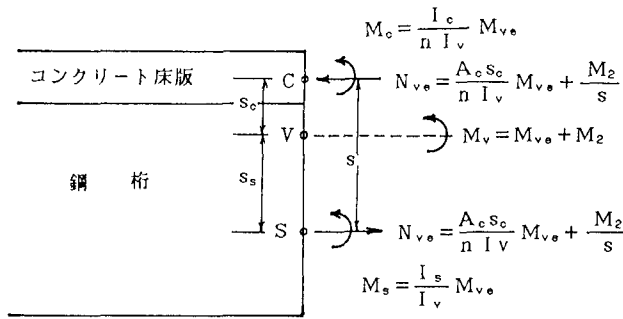


図-2 曲げモーメント M_v が作用する合成桁

$$\frac{d^2 N_{v,e}}{dx^2} - \lambda^2 N_{v,e} = -K \frac{s}{E_c (n I_s + I_c)} M_v \quad (7a)$$

$$\frac{\Delta^2 N_{v,e}}{\Delta x^2} - \lambda^2 N_{v,e} = -K \frac{s}{E_c (n I_s + I_c)} M_v \quad (7b)$$

$$\text{ここで、} \lambda^2 = \frac{n I_v}{n I_s + I_c} \cdot \frac{K}{E_c A_c} \cdot \frac{s}{s_c} \quad (8)$$

式(7a), (7b)の $N_{v,e}$ のかわりに、ジベルの変形を考慮した場合の桁の変形 y_v で表示すれば、次式のようになる⁸⁾。

$$\frac{d^4 y_{v,e}}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_{v,e}}{dx^2} = -\frac{1}{E_c (n I_s + I_c)} \frac{d^2 M_v}{dx^2} - \lambda^2 \frac{d^2 y_v}{dx^2} \quad (9a)$$

$$\frac{\Delta^4 y_{v,e}}{\Delta x^4} - \lambda^2 \frac{\Delta^2 y_{v,e}}{\Delta x^2} = -\frac{1}{E_c (n I_s + I_c)} \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x^2} - \lambda^2 \frac{d^2 y_v}{dx^2} \quad (9b)$$

次に、完全合成桁の場合のたわみが y_v であり、ジベルの変形を考慮した場合のたわみが $y_{v,e}$ であるので、 $y_{v,e}$ と y_v との差を y_e とすれば⁸⁾、 y_v に関しては式(10a₁), (10b₁) が成立する。また、 y_e に関しては式(9a), (9b) と式(10a₁), (10b₁) の差より式(10a₂), (10b₂)となる。

従って、 y_v と y_e に関して次式のような2個の微分方程式および差分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 y_v}{dx^4} = -\frac{1}{E_s I_v} \frac{d^2 M_v}{dx^2} \end{array} \right. \quad (10a_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 y_e}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_e}{dx^2} = -\frac{1}{E_s I_e} \frac{d^2 M_v}{dx^2} \end{array} \right. \quad (10a_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta^4 y_v}{\Delta x^4} = -\frac{1}{E_s I_v} \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x^2} \end{array} \right. \quad (10b_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta^4 y_e}{\Delta x^4} - \lambda^2 \frac{\Delta^2 y_e}{\Delta x^2} = -\frac{1}{E_s I_e} \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x^2} \end{array} \right. \quad (10b_2)$$

$$\text{ここで、} \quad y_{v,e} = y_v + y_e \quad (11)$$

$$I_e = \frac{n I_s + I_c}{A_c s_c s} I_v \quad (12)$$

以上より、ジベルの変形を考慮した場合の合成桁の変形は、 y_v と y_e との代数和で求まる。応力も完全合成桁の場合の応力と y_e の変形に見合う応力との代数和で求まる⁸⁾。従って、不完全合成桁のたわみ、曲げモーメント、軸力、せん断力、ジベルに作用する水平せん断力は次式で求まる。

$$y_{ve} = y_v + y_e \quad (13)$$

$$M_{ve} = M_v + M_e = M_v + \frac{I_v}{I_e} M_{ee} \quad (14)$$

$$N_{ve} = \frac{A_e S_e}{n I_v} (M_v - M_{ee}) \quad (15)$$

$$Q_{ve} = Q_v + \frac{I_v}{I_e} (Q_{ee} - H \frac{dy_e}{dx}) \quad (16)$$

$$T_{ve} = \frac{A_e S_e}{n I_v} (Q_v - Q_{ee} + H \frac{dy_e}{dx}) \quad (17)$$

5. Anfang Parameter 法による剛性マトリックスの誘導

式(10a₁)は完全合成桁の場合のたわみ $y_v(x)$ に関する微分方程式である。式(10a₁)から誘導される剛性マトリックスは通常の桁の剛性マトリックスであるからここでは省略する。

不完全合成桁の場合の剛性マトリックスは微分および差分方程式の一般解から誘導される。

従って、式(10a₂)の一般解と式(10b₂)の一般解とが必要になってくる。

式(10a₂)の一般解は次式で与えられる

$$y_e(x) = A_1 \sinh \lambda x + B_1 \cosh \lambda x + C_1 x + D_1 \quad (18a_2)$$

同様に、式(10b₂)の一般解は次式で与えられる^{9), 10)}

$$y_e(i) = A_2 \sinh \mu i + B_2 \cosh \mu i + C_2 i + D_2 \quad (18b_2)$$

$$\text{ここで、} \lambda^2 = \frac{H}{E_s I_e} \quad (19a) \quad , \quad \mu = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 a^2 \right) \doteq \lambda a \quad (19b)$$

$$H = K \cdot \left(\frac{n I_v}{A_e S_e} \right)^2 \quad (19c)$$

式(18a₂), (18b₂)における定数 A, B, C, D は桁の両端の境界条件によって決定されるものである。

たわみ角 $y'_e(x)$ と $y'_e(i)$ 、曲げモーメント $M_{ee}(x)$ と $M_{ee}(i)$ 、鉛直力 $Q_{ee}(x)$ と $Q_{ee}(i)$ 、はそれぞれ微分および差分（中央差分を用いる）することによって次式で得られる。

$$y'_e(x) = \frac{dy_e(x)}{dx} \quad (20a), \quad y'_e(i) = \frac{\Delta y_e(i)}{\Delta x} \quad (20b)$$

$$M_{ee}(x) = -E_s I_e \frac{d^2 y_e(x)}{dx^2} \quad (21a), \quad M_{ee}(i) = -E_s I_e \frac{\Delta^2 y_e(i)}{\Delta x^2} \quad (21b)$$

$$Q_{ee}(x) = -E_s I_e \frac{d^3 y_e(x)}{dx^3} + H \frac{dy_e(x)}{dx} \quad (22a), \quad Q_{ee}(i) = -E_s I_e \frac{\Delta^3 y_e(i)}{\Delta x^3} + H \frac{\Delta y_e(i)}{\Delta x} \quad (22b)$$

以下、両剛性マトリックスの誘導において、 $y_e, y'_e, M_{ee}, Q_{ee}$ の添字(e, ee)を省略し、最後の剛性マトリックスの表示の際に添字を付ける。

次に、図-3(a)に示すように一様の桁要素を考える。微分および差分方程式においては、節点力ベクトルと節点変位ベクトルの符号は図-3(a)の場合をプラスとしている。

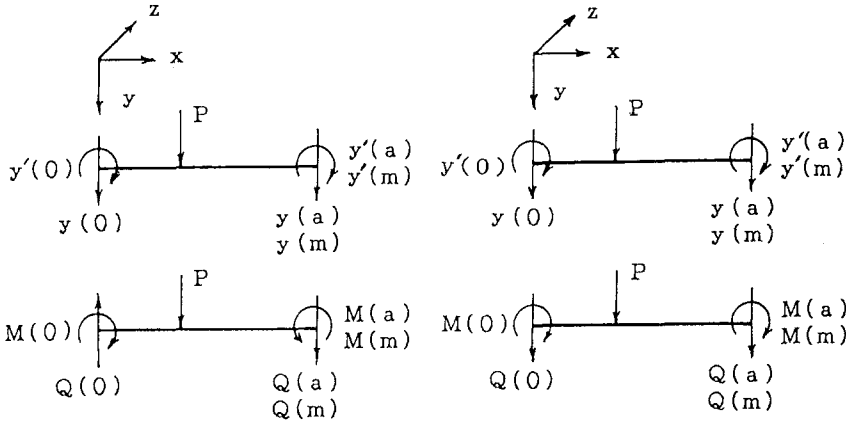


図-3 (a) 微分および差分方程式における
節点変位と節点力の符号

図-3 (b) 剛性マトリックスにおける節点変位
と節点力の符号

式(18a), (20a), (21a)および(22a)において, $x = 0$ とおき, 要素の左端の節点変位ベクトル $y(0)$ と $y'(0)$ 、節点力ベクトル $M(0)$ と $Q(0)$ とを求め、マトリックス表示すれば、

$$\begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \quad (23a)$$

となる。式(23a)のマトリックス表示を、一つの記号を用いて略した表示すれば、次式のようなになる。

$$\{X(0)\} = [H_{01}] \{C_1\} \quad (23a)$$

同様にして、式(18b), (20b), (21b)および(22b)において, $i = 0$ とおき, 要素の左端の節点変位ベクトル $y(0)$ と $y'(0)$ 、節点力ベクトル $M(0)$ と $Q(0)$ とを求め、マトリックス表示すれば、

$$\begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh \mu/a & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H/a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (23b)$$

となる。式(23b)のマトリックス表示を、一つの記号を用いて略した表示すれば、次式のようなになる。

$$\{X(0)\} = [H_{02}] \{C_2\} \quad (23b)$$

また、同様にして、式(18a), (20a), (21a)および(22a)において, $x = a$ とおき, 要素の右端の節点変位ベクトル $y(a)$ と $y'(a)$ 、節点力ベクトル $M(a)$ と $Q(a)$ とを求め、マトリックス表示すれば、

$$\begin{Bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ M(a) \\ Q(a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh \lambda a & \cosh \lambda a & a & 1 \\ \lambda \cdot \cosh \lambda a & \lambda \cdot \sinh \lambda a & 1 & 0 \\ -H \cdot \sinh \lambda a & -H \cdot \cosh \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \quad (24a)$$

となる。式(24a)のマトリックス表示を、一つの記号を用いて略した表示すれば、次式ようになる。

$$\{X(a)\} = [H_{a1}]\{C_1\} \quad (24a)$$

同様に、式(18b), (20b), (21b)および(22b)において、 $i = m$ とおき、要素の右端の節点変位ベクトル $y(m)$ と $y'(m)$ 、節点力ベクトル $M(m)$ と $Q(m)$ とを求め、マトリックス表示すれば、

$$\begin{Bmatrix} y(m) \\ y'(m) \\ M(m) \\ Q(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh \mu m & \cosh \mu m & m & 1 \\ \sinh \mu/a \cdot \cosh \mu m & \sinh \mu/a \cdot \sinh \mu m & 1/a & 0 \\ -H \cdot \sinh \mu m & -H \cdot \cosh \mu m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H/a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (24b)$$

となる。式(24b)のマトリックス表示を、一つの記号を用いて略した表示すれば、次式ようになる。

$$\{X(m)\} = [H_{m2}]\{C_2\} \quad (24b)$$

式(23a)より $[H_{a1}]$ の逆マトリックス $[H_{a1}]^{-1}$ を求め、 $\{C_1\}$ を求めれば、次式ようになる。

$$\{C_1\} = [H_{a1}]^{-1} \{X(0)\} \quad (25a)$$

式(23b)より $[H_{a2}]$ の逆マトリックス $[H_{a2}]^{-1}$ を求め、 $\{C_2\}$ を求めれば、次式ようになる。

$$\{C_2\} = [H_{a2}]^{-1} \{X(0)\} \quad (25b)$$

式(25a)を式(24a)に代入すれば、次式ようになる。

$$\{X(a)\} = [H_{a1}][H_{a1}]^{-1} \{X(0)\} \quad (26a)$$

式(25b)を式(24b)に代入すれば、次式ようになる。

$$\{X(m)\} = [H_{m2}][H_{a2}]^{-1} \{X(0)\} \quad (26b)$$

式(26a)を具体的に表示すれば、次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ M(a) \\ Q(a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/\lambda \cdot \sinh \lambda a & 1/H \cdot (1 - \cosh \lambda a) & 1/(H \cdot \lambda) (\lambda a - \sinh \lambda a) \\ 0 & \cosh \lambda a & -\lambda/H \cdot \sinh \lambda a & 1/H \cdot (1 - \cosh \lambda a) \\ 0 & -H/\lambda \cdot \sinh \lambda a & \cosh \lambda a & 1/\lambda \cdot \sinh \lambda a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (27a)$$

式(26b)を具体的に表示すれば、次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} y(m) \\ y'(m) \\ M(m) \\ Q(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (27b)$$

ここで、
 $b_{11} = 1$, $b_{12} = a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m$, $b_{13} = 1/H \cdot (1 - \cosh \mu m)$,
 $b_{14} = 1/H \cdot a/\sinh \mu \cdot (m \cdot \sinh \mu - \sinh \mu m)$,
 $b_{21} = 0$, $b_{22} = \cosh \mu m$, $b_{23} = -1/H \cdot \sinh \mu/a \cdot \sinh \mu m$,
 $b_{24} = 1/H \cdot (1 - \cosh \mu m)$,
 $b_{31} = 0$, $b_{32} = -H \cdot a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m$, $b_{33} = \cosh \mu m$,
 $b_{34} = a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m$, $b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0$, $b_{44} = 1$

式(27a), (27b) のマトリックスを、次式のような分割マトリックスで表示する。

$$\begin{Bmatrix} X_1(a) \\ X_2(a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} X_1(m) \\ X_2(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{Bmatrix} \quad (27a, b)$$

ここで、式(27a) の場合は

$$X_1(a) = \begin{Bmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{Bmatrix}, \quad X_1(0) = \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{Bmatrix}, \quad X_2(a) = \begin{Bmatrix} M(a) \\ Q(a) \end{Bmatrix}, \quad X_2(0) = \begin{Bmatrix} M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (28a)$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1/\lambda \cdot \sinh \lambda a \\ 0 & \cosh \lambda a \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1/H \cdot (1 - \cosh \lambda a) & 1/(H \cdot \lambda) (\lambda a - \sinh \lambda a) \\ -\lambda/H \cdot \sinh \lambda a & 1/H \cdot (1 - \cosh \lambda a) \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -H/\lambda \cdot \sinh \lambda a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} \cosh \lambda a & 1/\lambda \cdot \sinh \lambda a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29a)$$

である。同様にして、式(27b) の場合は

$$X_1(m) = \begin{Bmatrix} y(m) \\ y'(m) \end{Bmatrix}, \quad X_1(0) = \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{Bmatrix}, \quad X_2(m) = \begin{Bmatrix} M(m) \\ Q(m) \end{Bmatrix}, \quad X_2(0) = \begin{Bmatrix} M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (28b)$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m \\ 0 & \cosh \mu m \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1/H \cdot (1 - \cosh \mu m) & 1/H \cdot a/\sinh \mu \cdot (m \cdot \sinh \mu - \sinh \mu m) \\ -1/H \cdot \sinh \mu / a \cdot \sinh \mu m & 1/H \cdot (1 - \cosh \mu m) \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -H \cdot a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} \cosh \mu m & a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29b)$$

である。式(27a) において、マトリックス演算し、節点力ベクトル $[X_2(0), X_2(a)]^T$ は変位ベクトル $[X_1(0), X_1(a)]^T$ を用いて表示すれば次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} X_2(0) \\ X_2(a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12}^{-1} D_{11} & -D_{12}^{-1} \\ D_{21} - D_{22} D_{12}^{-1} D_{11} & D_{22} D_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ X_1(a) \end{Bmatrix} \quad (30a)$$

ここで、 D_{12}^{-1} は D_{12} の逆マトリックスである。結局、次のようなマトリックス表示を得る。

$$\begin{Bmatrix} Q_{ee}(0) \\ M_{ee}(0) \\ Q_{ee}(a) \\ M_{ee}(a) \end{Bmatrix} = G_1 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \text{sym.} & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_e(0) \\ y_e'(0) \\ y_e(a) \\ y_e'(a) \end{Bmatrix} \quad (31a)$$

$$\text{ここで、} G_1 = H^2 / (2 - 2 \cosh \lambda a + \lambda a \cdot \sinh \lambda a) \quad (32a)$$

式(31a) が微分方程式から誘導した剛性マトリックスである。

同様にして、式(27b) において、マトリックス演算し、節点力ベクトル $[X_2(0), X_2(m)]^T$ は変位ベクトル $[X_1(0), X_1(m)]^T$ を用いて表示すれば次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} X_2(0) \\ X_2(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12}^{-1} D_{11} & -D_{12}^{-1} \\ D_{21} - D_{22} D_{12}^{-1} D_{11} & D_{22} D_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ X_1(m) \end{Bmatrix} \quad (30b)$$

ここで、 D_{12}^{-1} は D_{12} の逆マトリックスである。結局、次のようなマトリックス表示を得る。

$$\begin{Bmatrix} Q_{ee}(0) \\ M_{ee}(0) \\ Q_{ee}(m) \\ M_{ee}(m) \end{Bmatrix} = G_2 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \text{sym.} & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_e(0) \\ y_e'(0) \\ y_e(m) \\ y_e'(m) \end{Bmatrix} \quad (31b)$$

$$\text{ここで、 } G_2 = H^2 / (2 - 2\cosh \mu m + m \cdot \sinh \mu \cdot \sinh \mu m) \quad (32b)$$

式(31a) が差分方程式から誘導した剛性マトリックスである。

式(31)は4行4列の剛性マトリックスであり、対称マトリックスである。

式(31)で用いられる節点力ベクトル(Q_{ee} , M_{ee})および節点変位ベクトル(y_e , y_e')の符号は剛性マトリックスの符号に直しているの、図-3(b)に示すような場合をプラスとする。

式(30a), (30b) は式(31a), (31b) を誘導するためのものであり、コンピュータには式(31a), (31b) の部材要素における剛性マトリックスを用いるので桁落ちの心配はない。ただし、コンピュータでの計算は倍精度で行う。

式(31a), (31b)に略した表示法を適用すれば、

$$f = k u \quad (33)$$

ここで、 f は部材要素における節点力ベクトルであり、 k は部材要素における剛性マトリックスであり、 u は部材要素における変位ベクトルである。微分方程式および差分方程式から誘導した k_{ij} を具体的に対比して表示すれば、表-1 のようになる。

表-1 の両方程式から誘導された剛性マトリックスの要素 k_{ij} を比較することは非常に有意義である。式(19b)の意味するところは λa が小さければ、 $\mu \doteq \lambda a$ となることである。即ち、式(19b)の λa が非常に小さければ、 μ は λa に限りなく近づくことである。従って、表-1において、 $\sinh \mu \doteq \sinh \lambda a \doteq \lambda a$ とおき $m = 1$ とすれば、 $\sinh \mu m$ は $\sinh \lambda a \cdot 1$ となる。即ち、 $\sinh \lambda a$ となる。

結局、 λa が非常に小さければ、 $\lambda a = \mu$ となり、微分方程式の一般解の式(18a₂)と差分方程式の一般解の式(18b₂)は一致することになる。このことから不完全合成桁の場合、微分方程式から誘導される剛性マトリックスは差分方程式から誘導される剛性マトリックスの特別の場合であることがわかる。

表-1 部材要素の剛性マトリックスの具体的表示

k_{ij}	微分方程式から 誘導した k_{ij}	差分方程式から 誘導した k_{ij}
$k_{11}, -k_{13}$ k_{33}	$\frac{1}{H} \lambda \cdot \sinh \lambda a$	$\frac{1}{H} \frac{\sinh \mu}{a} \sinh \mu m$
$k_{12}, -k_{23}$ $k_{14}, -k_{34}$	$\frac{1}{H} (\cosh \lambda a - 1)$	$\frac{1}{H} (\cosh \mu m - 1)$
k_{22}, k_{44}	$\frac{1}{H \lambda} (\lambda a \cdot \cosh \lambda a - \sinh \lambda a)$	$\frac{1}{H} \frac{a}{\sinh \mu} (m \cdot \sinh \mu \cdot \cosh \mu m - \sinh \mu m)$
k_{24}	$\frac{1}{H \lambda} (\sinh \lambda a - \lambda a)$	$\frac{1}{H} \frac{a}{\sinh \mu} (\sinh \mu m - m \cdot \sinh \mu)$

式(33)の剛性マトリックスは部材要素に関するものである。これらを全体座標系における構造全体の剛

性マトリックスに重ね合わせて組み込めばよい。差分方程式から誘導された剛性マトリックスは表-1において $m = 1$ として重ね合わせればよい。その場合、表-1の最後の項 $k_{24} = 0$ となる。 $m = 2$ として全体の剛性マトリックスを組み立てて解析しても同じ結果が得られることを確かめてある。その場合、表-1の最後の項 $k_{24} \neq 0$ である。

構造全体の剛性マトリックスは次式のように表示される。

$$F = KU \quad (34)$$

ここで、 F は節点力ベクトルであり、 U はそれらに対応する節点変位ベクトルである。式(34)の U を2つの部分マトリックス U_a および U_b に分け、 U_a は未知の節点変位で、 U_b は境界条件で与えられる既知の変位とする。同様に、 F を F_a および F_b に分ける。 F_a は U_a に対応するものであり、外荷重を表す。同様に、 F_b は U_b に対応するものであり、未知反力を表す。これらのことを考慮して式(34)を次のように書き改める。

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (35)$$

未知の節点変位と反力は K_{aa} の逆マトリックスをとることによって、もし U_b が零マトリックスならば、即ち、境界条件で変位がすべて零であるときは、次式で求まる。

$$U_a = K_{aa}^{-1} F_a \quad (36)$$

$$F_b = K_{ba} K_{aa}^{-1} F_a \quad (37)$$

今まで述べたことは未知の変位および反力を求める通常の方法であるが¹¹⁾、要素数が多くなった場合、解析するのに逆マトリックスを用いるならば、コンピュータの計算精度に限度がある。

本論文ではパソコンを用いるために、メモリーに制限があるので、一次元配列のスカイライン法と一次元配列のICCG法(不完全コレスキー分解と共役勾配法の併用)を用いて解析した。要素数を少なくした場合には逆マトリックスによる解析とも比較し、3解析とも計算値が一致することを確認した。

6. 数値計算例

図-4のようなスパン $l=3000$ cm とし、図-5のような断面を有する合成桁を両剛性マトリックスを用いて、両端単純支持とし、スパン中央に集中荷重 $P=1$ ton を載荷して、解析した。

断面諸元は、 $s=114.4$ cm、 $A_s=344.2$ cm²、 $A_c=5355$ cm²、 $n=7$ 、 $I_s=1506100$ cm⁴、 $I_c=196796$ cm⁴ とした。ジベル1本あたりのばね定数 K_a および ジベルの間隔 a は種々に変化させた。 N はジベルの本数であり、種々に変化させた。計算は PC-9801VM2 を使い、

MS-FORTRAN で倍精度で行った。計算時間は300 要素で約 20 秒であった。

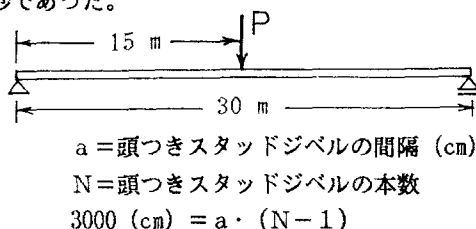


図-4 単純合成桁

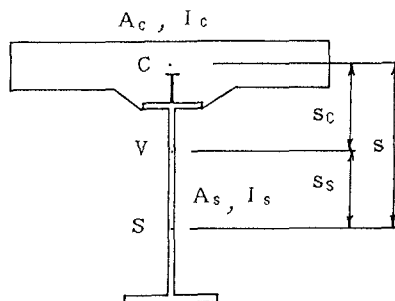


図-5 合成桁の合成断面

6-1 数値計算例1 両剛性マトリックス解析値の比較（ジベルが等間隔の場合）

表－2 は図－4 において、ジベル本数 $N=151$ 本(150要素、 $a=20\text{cm}$)、 $N=301$ 本(300要素、 $a=10\text{cm}$)、 $N=101$ 本(100要素、 $a=30\text{cm}$)の場合の中央点のたわみ、曲げモーメント、軸力を比較して示したものである。数値で比較するため有効数字7桁まで示している。ばね定数は文献^{(12)・(4)}より、かなり小さい値を用いた。微分方程式の解析結果は差分方程式の解析結果と比較して、僅かではあるが、たわみ および 軸力 は小さめの値となり、曲げモーメント は大きめの値となる。また、 K を一定とした場合、即ち、 Ka 、 a が変わっても $K=K/a$ を一定とした場合、微分方程式による解析結果は同じになり、ジベル間隔 a の影響は入ってこない。一方、差分方程式による解析結果は a 、 Ka μ (無次元量)を用い、 a の影響が入るので、異なった結果になる。また、同じ K の場合でも a を小さくすれば、たわみ および 軸力 は減少し、曲げモーメント は増加していく傾向にある。これは微分方程式の解析結果に近づいていくことを示している。換言すれば、 a が大きくなれば（ジベル本数が少なくなれば）、両解析法の解析結果の差が大きくなることを示している。

表－2 両剛性マトリックスの解析結果の比較

			中央点の値					
			たわみ(mm)		曲げモーメント(kg・cm)		軸力(kg)	
$Ka(\text{t/cm})$	$a(\text{cm})$	$K(\text{t/cm}^2)$	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式
6.5	20	0.325	1.0031560	1.0031940	1449964	1449892	2366.047	2366.255
6.5	10	0.65	0.8403011	0.8403077	1257193	1257168	2923.087	2923.160
19.5	30	0.65	0.8403011	0.8403602	1257193	1256966	2923.087	2923.744
$Ka \rightarrow \infty$	$a \rightarrow 0$	$K \rightarrow \infty$	0.5771512	0.5771512	750000	750000	4388.702	4388.702

また、表－2の曲げモーメントと軸力との間に次式の釣合いが成立している。これは、合成断面の中立軸に作用する曲げモーメントが、コンクリート部と鋼桁部の重心にそれぞれ曲げモーメントと軸力に分配されることを示している（図－2参照）。

$$\frac{nI_s + I_c}{nI_v} M_{v0} + (s_c + s_s) \cdot N_{v0} = M_v \quad (38)$$

式(14)の両辺に $(nI_s + I_c)/(nI_v)$ を乗じ、式(15)の両辺に $(s_c + s_s)$ を乗じ、両辺をそれぞれ加え、式(12)を用いれば、式(38)になっている。

6-2 数値計算例2 たわみ、曲げモーメント、軸力（ジベルが不等間隔の場合）

図－6に示すように、スパン $l=3000$ cmの単純合成桁とし、これを大きく3つの部分(7.5m, 15m, 7.5m)に分け、それぞれの部分でジベル間隔を一定とした(CASE1 から CASE4)。CASE5 とCASE6 はさらに支点付近のジベルの間隔を密にした場合である。頭つきスタッドジベルの間隔と要素数は表－3のとおりである。 Ka は 130 t/cm とし、全要素数は 100 要素とした。表－4は CASE1 から CASE6 までの中央点のたわみ、曲げモーメント、軸力の解析結果を比較したものである。この表よりわかることは、ジベルを等間隔にした場合、僅かではあるが、たわみと曲げモーメントの値は小さくなり、軸力の値は大きくなるが、ほとんど差がないことがわかる。

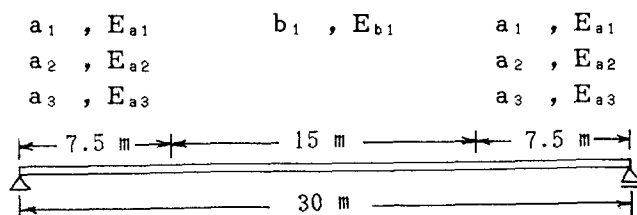


図-6 単純合成桁（ジベルが不等間隔の場合）

図-6および表-3において、 $a_1, a_2,$

a_3, b_1 は頭つきスタッドジベルの間隔 (cm)であり、 $E_{a1}, E_{a2}, E_{a3}, E_{b1}$ はそれぞれの要素数であり、

$$a_1 \times E_{a1} + a_2 \times E_{a2} + a_3 \times E_{a3} = 750 \text{ cm.}$$

$$b_1 \times E_{b1} = 1500 \text{ cm.}$$

$$2 \times (E_{a1} + E_{a2} + E_{a3}) + E_{b1} = 100 \text{ 要素}$$

である。

表-3 頭つきスタッドジベルの間隔と要素数

	a_1 (cm)	E_{a1}	a_2 (cm)	E_{a2}	a_3 (cm)	E_{a3}	b_1 (cm)	E_{b1}
CASE 1	30	25	—	—	—	—	30	50
CASE 2	25	30	—	—	—	—	37.5	40
CASE 3	21.43	35	—	—	—	—	50	30
CASE 4	20.27	37	—	—	—	—	57.69	26
CASE 5	10	20	32.35	17	—	—	57.69	26
CASE 6	10	20	20	10	50	7	57.69	26

表-4 ジベル間隔が異なる場合の解析結果の比較

	中央点の値					
	たわみ(mm)		曲げモーメント(kg・cm)		軸力(kg)	
	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式
CASE 1	0.6287100	0.6287327	947453.3	946871.8	3818.130	3819.810
CASE 2	0.6277083	0.6277502	968207.3	967393.2	3758.158	3760.510
CASE 3	0.6289905	0.6290850	996230.4	994976.3	3677.180	3680.804
CASE 4	0.6302069	0.6303473	1010423.0	1008871.0	3636.169	3640.652
CASE 5	0.6358151	0.6359488	1014894.0	1013345.0	3623.251	3627.728
CASE 6	0.6396054	0.6397417	1018392.0	1016838.0	3613.141	3617.632
完全合成桁	0.5771512		750000.		4388.702	

6-3 数値計算例3 たわみ と (a/l) との関係（ジベルが等間隔の場合）

図-7は縦軸にスパン中央点のたわみをと、横軸に a/l (a はジベルの間隔であり、 l はスパンである)をと、その関係を図示したものである。従来から用いられている微分方程式から誘導された剛性マトリックスの場合は $K=Ka/a$ を一定とすれば、この K を用いるので、 a/l に関係なく、一定値となる。換言すれば、1本あたりのばね定数の大きい Ka を用い、ジベルの間隔 a を大きくした場合でもまた、1本あたりのばね定数の小さい Ka を用い、ジベルの間隔 a を小さくした場合でも、 $K = Ka/a$ が一定ならば、一定値となることである。一方、本論文での提案による差分方程式から誘導された差分剛性マトリックスは Ka と a を用い、例え、 $K=Ka/a$ が一定でも、解析値は異なってくる。図-7よりわかることは、 K が小さくなれば、微分方程式と差分方程式との解析値の差が大きくなる。また、 a/l が大きくなれば、微分方程式と差分方程式との解析値の差が大きくなる。図-8は縦軸に不完全合成桁と完全合成桁の中央点でのたわみの比をと、横軸に a/l をとっている。図-8よりわかることは、 Ka が小さくなれば、また a/l が大きくなれば、微分方程式と差分方程式との解析値の差が大きくなる。 a/l が $1/10$ 以下であれば、両者の解析値にほとんど差がなくなる。

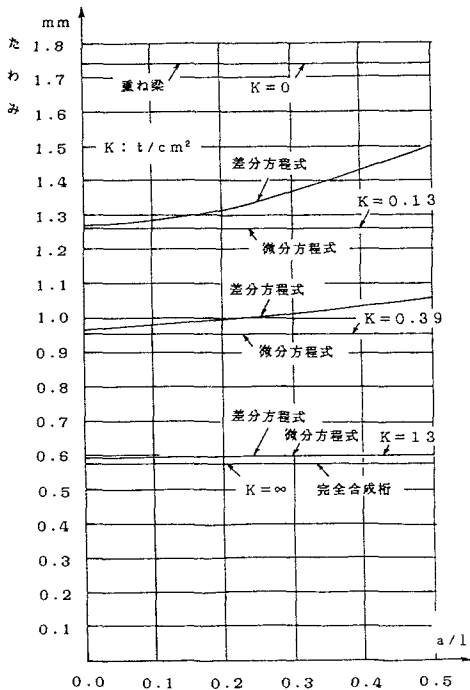


図-7 中央点のたわみと a/l との関係

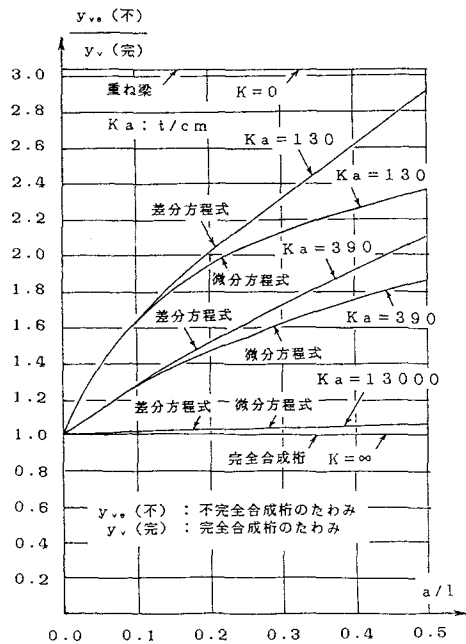


図-8 中央点のたわみの比と a/l との関係

7. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- 1) 従来はジベルのばね定数 $K(\text{kg}/\text{cm}^2)$ を全スパンを通じて一様と仮定して、微分方程式で解析しているが、ジベルの間隔を a として離散した結合と考えて、本論文で示すような差分方程式で解析する方が Newmark の仮定を一つ減らすことができる。
- 2) 微分方程式から誘導した剛性マトリックスと差分方程式から誘導した剛性マトリックスとを比較しながら表示し、両者の関係を理論式と計算例から明らかにした。前者は後者に包含されていることが判明した。
- 3) 微分方程式と差分方程式による解析において、数値計算例で計算値に僅かではあるが、差が生じている。ジベル1本の単位長さあたりのばね定数 $K(\text{t}/\text{cm}^2)$ 、ジベル間隔 $a(\text{cm})$ 、ジベル1本あたりのばね定数 $Ka(\text{t}/\text{cm})$ を同じにして解析した場合、微分方程式の解は差分方程式の解と比較して 僅かではあるが たわみ および 軸力 は小さめの値となり、曲げモーメント は大きめの値となる。
- 4) 微分方程式および差分方程式の解において、 $K(\text{t}/\text{cm}^2)$ および $Ka(\text{t}/\text{cm})$ を大きくすれば（完全合成桁に近づける）、たわみ および 曲げモーメントは減少し、軸力 は増加する。
- 5) Ka を一定にした場合でも、ジベルの間隔 a が変われば（ジベルの本数が変われば）、 $K=Ka/a$ は変わる。即ち、 a を小さくすれば（ジベルの本数を多くすれば）、 K は大きくなり、4) の結果と同じになる。
- 6) K を一定にした場合、即ち、 Ka と a が変わっても、 $K=Ka/a$ を一定とした場合、微分方程式による解は $K(\text{t}/\text{cm}^2)$ および $\lambda(1/\text{cm})$ を用いるので、同じ結果になる。ジベル間隔 a の影響は計

算の中に入ってこない。一方、差分方程式による解は、 a 、 Ka 、 μ （無次元量）を用い、ジベル間隔 a の影響が入るので、異なった結果になる。即ち、同じ K の場合でも a を小さくすれば、たわみ および 軸力 は減少し、曲げモーメント は増加する。また、 a を小さくすれば、微分方程式の解に近づいていく。

- 7) 数値計算例から得られた結果を総合的に見れば、ジベルの間隔 a が大きくなり、ジベルのばね定数が小さくなれば、微分方程式と差分方程式による計算値の差が大きくなることが判明した。即ち、ジベルの間隔とスパンとの比(a/l)およびジベルのばね定数が重要である。比が $1/10$ くらいまでは、両解析法における計算値に差はほとんど生じないことがわかる（ジベルのばね定数にほとんど関係なく）。通常の合成桁においては $1/100$ 以下であり、計算値にほとんど差が生じない。
- 8) 本報告での両剛性マトリックス解析法（微分方程式から誘導した剛性マトリックス解析法と差分方程式から誘導した剛性マトリックス解析法）は連続桁にも適用できる。
- 9) 構造解析にスカイライン法やICCG法などの一次元配列を用いれば、パソコンでもかなり大規模な計算が可能である。本解析では 630 要素まで倍精度で行った。
- 10) 将来、新しい素材が開発され合成桁のように離散的に結合される構造物の解析に本論文で提案する差分方程式から誘導された剛性マトリックス解析法は微分方程式から誘導された剛性マトリックス解析法と同様に有効であると思われる。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989.
- 2) Newmark, N.M., Siess, C.P., Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 3) A.ハウラネック/0.シュタインハルト：鋼橋の理論と計算（橋 善雄、小松定夫共訳）、山海堂、1965.
- 4) 浜田純夫、有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析、土木学会論文報告集、第265号、pp.1-9、1977年 9月.
- 5) 小松定夫、佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について、土木学会論文報告集、第329号、pp.27-37、1983年 1月.
- 6) 佐藤浩一、渡辺昇：差分方程式の剛性マトリックス解析法について、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、pp.87-92、1988.
- 7) PING-CHUN WANG：Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics with Applications to Computers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- 8) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973.
- 9) 福田武雄：差分法、生産技術センター、1977.
- 10) 丸山哲郎：自然科学・工学のための差分方程式序説、現代数学社、1981.
- 11) Harold C. Martin：INTRODUCTION TO MATRIX METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- 12) 中井 博編：プレキャスト床版合成桁橋の設計・施工、森北出版、1988.
- 13) 森 正武：FORTRAN 77 数値計算プログラミング、岩波書店、1987.

(1989年10月2日受付)