

ケーブル・桁系の線形・非線形連成振動に関する解析と実験

Analysis and experiment on dynamics of a cable-girder system with emphasis on linear and nonlinear coupling

ペンヌン ワーニシヤイ¹⁾、藤野陽三²⁾、パチェコ ベニート³⁾、岡本章司¹⁾

By Pennung WARNITCHAI, Yozo FUJINO, Benito M. PACHECO and Shoji OKAMOTO

Dynamics of a girder suspended by a single cable is studied. The concept of generalized coordinates is employed to describe the motions. Governing equations of motion which account for finite motion of cable are obtained. The equations possess linear and nonlinear (auto-parametric) coupling terms, the types of which are common in general cable-stayed bridges. Analytical solutions are obtained by perturbation technique. An experiment —harmonic force response of a cable-girder model— is conducted and it shows many types of non-linear oscillations, which are found to be well predicted by the analytical solutions.

1. はじめに

ケーブル、桁そして塔という特性の異なる構造要素を機能的に組み合わせた斜張橋は、構造動力学的にも極めて興味深い。

最近の傾向としてケーブルのマルチ化、スパンの長大化があり、その結果ケーブルの動きが卓越した振動モード、固有振動数の数が増え、またケーブルが長くなるため全体的にその値が低くなる（文献1）。このような状態では、ケーブル振動の固有振動数のどれかが、桁、塔の変形を主体とする全体振動モードの固有振動数と近くなる、あるいはその比が整数倍となる現象が生じる。このとき、当然のことながら構造要素間の線形・非線形連成（カップリング）が重要な問題として浮かび上がってくる。

本論文では、斜張橋の構成としては最も基本的な、1本のケーブルで支持された桁を対象モデルとする。まず、振動モードをあらかじめ規定した上でケーブルの幾何学的非線形性を考慮した、ケーブル・桁系の運動方程式の定式化を示す。次に、小型模型を用いた強制振動実験を行い、理論の妥当性を明らかにする。今後、斜張橋のケーブル・桁（塔）系の線形・非線形連成振動を考えていく上でのベースを与えようとするのが本論文の目的である。

ケーブルは引張力のみを受ける効率のよい部材であるが、それだけに軽く、構造減衰も低い。よって、小さい動的外力・変位によって大きな振動が生じうる。ケーブルの振動は目立ち易く、またケーブル定着部の疲労問題にもつながりうるので注意を要する。ケーブル振動はケーブルそのものに作用する外力によっても

1) 東京大学大学院 土木工学専攻 (〒113 文京区本郷7-3-1)

2) Ph.D 3) 工博 東京大学工学部助教授

生じうるが（たとえば風による渦励振）、前述のように桁・塔との連成によっても生じうる。たとえば、ある斜張橋では舗装面の凹凸のため車が走行すると橋桁が振動し、それに起因してケーブルに大きな振動が生ずるという。これもケーブル・桁系の連成振動の一例である。

著者らがケーブル・桁系の連成振動に興味をもった切っ掛けとなったのは、人の歩行により生じたある斜張橋の横たわみ振動現象に接する機会があったからである。多数の歩行者（鉛直加振振動数2 Hz前後、水平方向の力のレベルは低いがその振動数は約1 Hz（文献2））により桁の鉛直振動（鉛直たわみ3次モードの固有振動数 f_0 ≈約2 Hz）が生じるとともに、それよりかなり大きい振幅で何本かのケーブル（固有振動数 f_c ≈約1 Hz）の面外振動（1次モード）と桁の横たわみ振動（面外たわみ1次モードの固有振動数 f_H ≈約1 Hz）が観察された。歩道橋の鉛直たわみ振動についてはこれまでもいくつか報告がなされているが、横たわみ振動についての報告例は文献2にごく簡単に触れられているものの、詳しいことは何も記述されていない。詳細についてはここで述べることはできないが、この振動には、人の歩行により橋の振動が生じそれが歩行者の歩行特性に影響を与えるという複雑な相互作用があるように見受けられ、この点から構造動力学上興味深い問題と考えている。

いずれにせよ $f_0 \approx 2 f_c \approx 2 f_H$ であることから著者らがこの振動の原因として考えたことは（1）歩行者の鉛直力（～2 Hz）が桁の鉛直振動（～2 Hz）を励起し、それがケーブルのパラメトリック励振（～1 Hz）を起こし、さらに桁の横たわみ振動（～1 Hz）につながった（2）人の歩行力の水平分力（～1 Hz）がケーブル・桁の横たわみ振動を励起した の2つであった。本研究を行なっていく上で、この原因を明らかにしたいというのがあり、本論文で扱っているケーブル・桁系のモデル、実験模型もその歩道橋の動特性を考慮したものとなっている。

桁（はり）は無論、ケーブル単体としての線形、非線形、あるいはパラメータ振動についても多くの研究がなされている（たとえば文献3～6）。しかし、ケーブルと桁との連成振動に関する解析的、実験的研究は多くない（文献7～10）。これらはいずれも主として線形の範囲を扱っている。なお、文献7、10ではケーブル・桁系の連成振動において非線形性を考慮することの重要性を指摘している。

本研究の特徴は、ケーブルの幾何学的非線形性を考慮し、ケーブル・桁系のモードを限定して、一般化変位で表わした非線形連成運動方程式を定式化している点、入念に設計された模型を用いての振動実験を行い線形・非線形連成振動に関し理論の妥当性を確認している点にあると考えている。

2. 定式化

ここでは図1に示す1本のケーブルで支持された桁（はり）を考える。

ケーブルについては

- （1）完全可とう性
- （2）質量（ μ_c ：単位長さ当り）、断面積 A_c は一様に分布
- （3）線形弾性体

とする。さらに対象とするのが斜張橋の鋼ケーブルなので

- （4）静的張力はケーブル自重に比べ2 オーダー

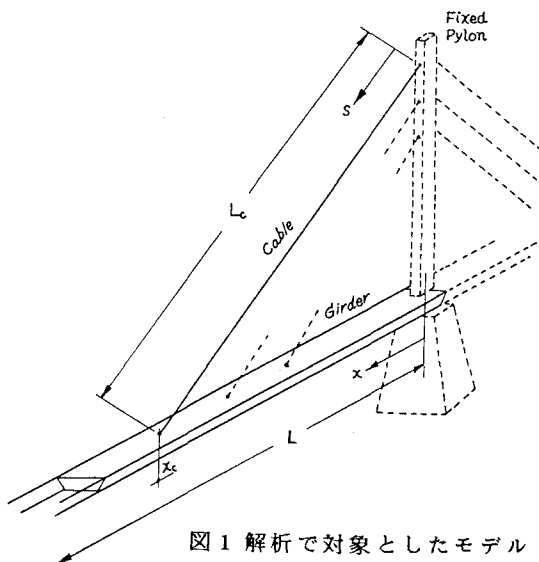


図1 解析で対象としたモデル

大きい

(5) 静的状態でのケーブル伸び量 u_0 とケーブル長 L_c の比 u_0/L_c は 10^{-3} のオーダーと小さい条件が一般に満たされる。したがって、弦としての扱いが近似的に可能であり、以下の定式化ではこの仮定を用いる。(5) より軸方向の振動数は面外(軸直交)方向のそれよりかなり高くなる。ここで対象とするのは低次の面外(軸直交)モードであるので軸方向の慣性力は無視できることになる。さらにこのことより、動的付加張力はスパン方向に一樣とみなしてよく、また軸方向の振動は面外(軸直交)方向の振動に比べ小さく無視できることになる(文献4、10)。これらのことを後の定式化のところで使うことになる。

ケーブル・桁系の振動を考えるに当たっては一般化変位を導入して定式化の簡略化をはかる。ここでは、桁の鉛直、水平、そしてケーブルの面外水平振動に着目した3つの一般化変位を考える。なお、ケーブルの面内鉛直振動を対象から外したのは振動の生じた前述の斜張橋ではケーブルが水平ワイヤで結ばれ、面内振動が生じないためである。ケーブルの面内振動、さらにケーブルのサグを考慮した定式化については別の機会に発表する。

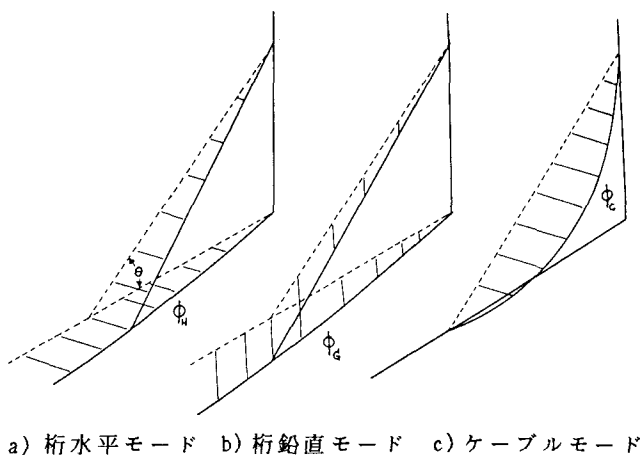


図2 モードの定義

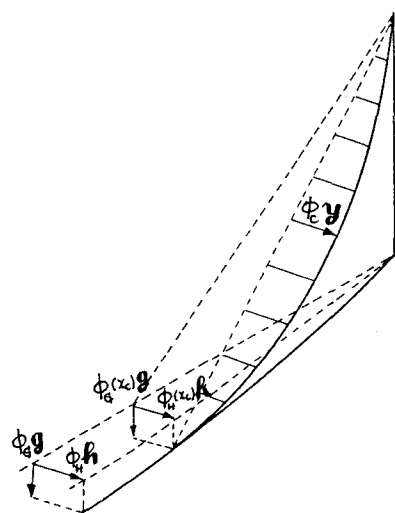


図3 ケーブル・桁系の動的変形

桁の水平変位 $u(x, t)$ 、鉛直変位 $v(x, t)$ 、ケーブルの水平変位 $u_C(s, t)$ 、鉛直変位 $v_C(s, t)$ を一般化変位 $h(t)$ 、 $g(t)$ 、 $y(t)$ を用いてつぎのようにあらわす。なお、 x は桁軸線座標、 s はケーブル(弦)軸線座標である(図1)。

$$u(x, t) = \phi_H(x) h(t) \quad (1)$$

$$v(x, t) = \phi_G(x) g(t) \quad (2)$$

$$u_C(s, t) = \phi_C(s) y(t) + \phi_H(x_C) h(t) \cdot s/L_C \quad (3)$$

$$v_C(s, t) = \phi_G(x_C) g(t) \cos \theta \cdot s/L_C \quad (4)$$

ここで θ はケーブルと桁のなす角、 L_C はケーブル長である。

本研究では ϕ_H 、 ϕ_G は各々、ケーブルの質量を無視したケーブル・桁系から求まる水平、鉛直固有振動モードとする(図2a、b)。式(3)の右辺第2項、式(4)の右辺は、桁のケーブル支持点の動きによるケーブルの準静的(quasi-static)変位である。また式(3)の ϕ_C としては両端固定の弦の固有モードを考えている(図2c)。即ち、式(3)の ϕ_C は

$$\phi_C(s) = \sin(n\pi s/L_C) \quad (5)$$

である。nはモード次数である。

式、(1)～(4)の $h(t)$ 、 $g(t)$ 、 $y(t)$ は各々、桁の鉛直運動、桁の水平運動、ケーブルの水平運動に着目した一般化変位である。

次に、弾性ポテンシャルを一般化変位で表わし、ラグランジェの方程式を用いて運動方程式を求める。

ここでは静的つりあい位置をポテンシャルの基準とする。この問題では静的つりあい位置においては静的応力と静的外力が作用しているが、これらの影響は弾性ポテンシャルの定義を変えることにより考慮することができる(文献11)。

文献11に従うと、ケーブルの弾性ポテンシャルは先に述べたケーブルに対する仮定を用いて

$$U_c = \frac{1}{2} T_0 \int_0^{L_c} \left\{ \left(\frac{\partial u_c}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_c}{\partial s} \right)^2 \right\} ds + \frac{1}{2} E_c A_c L_c e^2 \quad (6)$$

と求められる。右辺第一項は静的応力/外力によるポテンシャルの増分である。 T_0 は初期張力であり、 E_c はケーブルの伸び定数、第2項は静的つりあい位置からのひずみの増分 $e(t)$ によるエネルギーである。ひずみ $e(t)$ は前述の仮定よりケーブル軸にわたって一様に分布し、次式で近似される(図3)。

$$e(t) = \frac{1}{L_c} \left\{ \phi_c(x_c) g \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \int_0^{L_c} \left\{ \left(\frac{\partial u_c}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_c}{\partial s} \right)^2 \right\} ds \right\} \quad (7)$$

この非線形ひずみ-変位関係はケーブルの有限変位を考慮したことにより生ずるものである。

桁においては静的応力の効果は2次的であり、無視する。したがって水平、鉛直変位に伴うひずみエネルギー U_H 、 U_G は

$$U_H = \frac{1}{2} \int_0^L E I_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \int_0^L E I_H \left(\frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (8)$$

$$U_G = \frac{1}{2} \int_0^L E I_G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{g}^2 \int_0^L E I_G \left(\frac{\partial^2 \phi_G}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (9)$$

で与えられる。ここで I_H 、 I_G は各々水平、鉛直曲げ変形に対する断面2次モーメント、 L は桁の長さである。

ケーブル、桁の水平、鉛直運動による運動エネルギー T_C 、 T_H 、 T_G は各々

$$T_C = \frac{1}{2} \mu_c \int_0^{L_c} \left\{ \left(\frac{\partial u_c}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_c}{\partial t} \right)^2 \right\} ds \quad (10)$$

$$T_H = \frac{1}{2} \int_0^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{h}^2 \int_0^L \mu \phi_H^2 dx \quad (11)$$

$$T_G = \frac{1}{2} \int_0^L \mu \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \dot{g}^2 \int_0^L \mu \phi_G^2 dx \quad (12)$$

である。 μ は桁の単位長さあたりの質量である。静的つりあい位置を基準としたときのケーブル・桁系の総ポテンシャルエネルギー U_T 、総運動エネルギー T_T は

$$U_T = U_c + U_H + U_G \quad (13)$$

$$T_T = T_C + T_H + T_G \quad (14)$$

となる。桁に作用する鉛直(面内)分布外力を $P_G(x, t)$ 、水平(面外)分布外力を $P_H(x, t)$ とし、ラグランジェの方程式を適用すると

$$\begin{aligned}
M_c \ddot{y} + \phi_{hc} P_0 \ddot{h} + K_c \left\{ 1 + \frac{1}{2L_c} u_0 (\phi_{gc}^2 f_0 g^2 + \phi_{hc}^2 h^2 + k_0 y^2) + \phi_{gc} \frac{n_0}{L_c} g \right\} y &= 0 \\
M_H \ddot{h} + \phi_{hc} P_0 \ddot{y} + K_H h + \phi_{hc}^2 \frac{E_c A_c}{L_c^2} \left\{ \frac{1}{2L_c} (\phi_{gc}^2 f_0 g^2 + \phi_{hc}^2 h^2 + k_0 y^2) + \phi_{gc} \frac{n_0}{L_c} g \right\} h &= \int_0^L P_h(x, t) \phi_h dx \\
M_g \ddot{g} + K_g g + \phi_{gc}^2 f_0 \frac{E_c A_c}{2L_c^2} \left\{ 3\phi_{gc} n_0 g + \phi_{gc}^2 f_0 g^2 + \frac{\phi_{hc}^2}{L_c} h^2 + \frac{k_0}{L_c} y^2 \right\} g + \phi_{gc} n_0 \frac{E_c A_c}{2L_c^2} (\phi_{hc}^2 h^2 + k_0 y^2) &= \int_0^L P_g(x, t) \phi_g dx
\end{aligned}$$

(15a, b, c)

ここで

$$\begin{aligned}
\phi_{hc} &= \phi_h(x_c), \quad \phi_{gc} = \phi_g(x_c), \quad n_0 = \sin \theta, \quad f_0 = \cos^2 \theta, \quad k_0 = \pi^2 \pi^2 / 2, \quad u_0 = T_0 L_c / E_c A_c \\
P_0 &= \frac{M_c L_c}{\pi \pi} (-1)^{n+1}, \quad M_c = \frac{M_c L_c}{2}, \quad M_H = \int_0^L \mu \phi_h^2 dx + \phi_{hc}^2 \frac{M_c L_c}{3}, \quad M_g = \int_0^L \mu \phi_g^2 dx + \phi_{gc}^2 \frac{M_c L_c}{3} \cdot f_0 \\
K_c &= \frac{\pi^2 \pi^2}{2} \frac{I_c}{L_c}, \quad K_H = \int_0^L E I_H \left(\frac{\partial^2 \phi_h}{\partial x^2} \right)^2 dx + \phi_{hc}^2 \frac{I_c}{L_c}, \quad K_g = \int_0^L E I_g \left(\frac{\partial^2 \phi_g}{\partial x^2} \right)^2 dx + \phi_{gc}^2 \left(f_0 \frac{I_c}{L_c} + n_0^2 \frac{E_c A_c}{L_c} \right)
\end{aligned}$$

無次元化した形で式(15)を書くと、

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{y}} + \tilde{y} + \left(\frac{c-1}{\pi \pi} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \phi_{hc} \right) \ddot{\tilde{h}} + (\phi_{gc} n_0) \tilde{g} \ddot{\tilde{y}} + \left(\frac{\pi^2 \pi^2}{2} \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{y}^3 + \left(\frac{1}{2} \phi_{hc}^2 \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{h}^2 \ddot{\tilde{y}} + \left(\frac{1}{2} \phi_{gc}^2 f_0 \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{g}^2 \ddot{\tilde{y}} &= 0 \\
\ddot{\tilde{h}} + \left(\frac{\omega_c}{\omega_c} \right)^2 \ddot{\tilde{h}} + \left(\frac{c-1}{\pi \pi} \cdot \phi_{hc} \cdot \frac{M_c L_c}{M_H} \right) \ddot{\tilde{y}} + \left(\frac{n_0}{\pi^2 \pi^2} \phi_{hc}^2 \phi_{gc} \frac{M_c L_c}{M_H} \right) \tilde{g} \ddot{\tilde{h}} + \left(\frac{f_0}{2 \pi^2 \pi^2} \phi_{hc}^2 \phi_{gc}^2 \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{g}^2 \ddot{\tilde{h}} \\
+ \left(\frac{1}{4} \phi_{hc}^2 \frac{M_c L_c}{M_H} \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{y}^2 \ddot{\tilde{h}} + \left(\frac{1}{2 \pi^2 \pi^2} \phi_{hc}^4 \frac{M_c L_c}{M_H} \cdot \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{h}^3 &= \frac{1}{M_H \omega_c^2 u_0} \cdot \int_0^L P_h(x, t) \phi_h dx \\
\ddot{\tilde{g}} + \left(\frac{\omega_g}{\omega_c} \right)^2 \ddot{\tilde{g}} + \left(\frac{3 f_0 n_0}{2 \pi^2 \pi^2} \phi_{gc}^2 \frac{M_c L_c}{M_g} \right) \tilde{g}^2 + \left(\frac{f_0^2}{4 \pi^2 \pi^2} \phi_{gc}^2 \frac{M_c L_c}{M_g} \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{g}^3 + \left(\frac{f_0}{2 \pi^2 \pi^2} \phi_{hc}^2 \phi_{gc}^2 \frac{M_c L_c}{M_g} \cdot \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{h}^2 \ddot{\tilde{g}} \\
+ \left(\frac{1}{4} \phi_{gc}^2 f_0 \frac{M_c L_c}{M_g} \frac{u_0}{L_c} \right) \tilde{y}^2 \ddot{\tilde{g}} + \left(\frac{n_0}{2 \pi^2 \pi^2} \phi_{hc}^2 \phi_{gc} \frac{M_c L_c}{M_g} \right) \tilde{h}^2 + \left(\frac{1}{4} \phi_{gc}^2 n_0 \frac{M_c L_c}{M_g} \right) \tilde{y}^2 &= \frac{1}{M_g \omega_c^2 u_0} \cdot \int_0^L P_g(x, t) \phi_g dx
\end{aligned}$$

(16a, b, c)

ここで

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= y/u_0, \quad \tilde{h} = h/u_0, \quad \tilde{g} = g/u_0 \quad \text{and} \quad \tau = \omega_c t \\
(\ddot{})' &= \frac{d^2()}{d\tau^2} = \omega_c^2 \frac{d^2()}{dt^2}, \quad \omega_c^2 = K_c/M_c, \quad \omega_H^2 = K_H/M_H \quad \text{and} \quad \omega_g^2 = K_g/M_g
\end{aligned}$$

式(16a, b, c)には3次の非線形項まで含まれている。ここでさらに次の条件を加えて式(16a, b, c)の非線形項の中で重要でないものを落とすこととする。

- (a) ケーブルの質量 $\mu_c L_c$ は桁の質量 M_g, M_H (一般化質量) に比べ、十分小さい。
 - (a) は斜張橋一般に通ずることであるが、さらに
 - (b) 本研究で対象とする動的現象は桁との連成によって桁よりも大きい振動がケーブルに生じる場合である。すなわち、 $\tilde{y}$ ($=y/u_0$) は $\tilde{g}$ ($=g/u_0$)、 $\tilde{h}$ ($=h/u_0$) に比べ大きい
- これらならびにすでに述べた $u_0 \ll L_c$ の仮定より、式(16a, b, c)の $\tilde{g}\tilde{y}$ 、 $\tilde{y}^3$ 、 $\tilde{y}^2$ の項のみ残し、

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{y}} + 2\xi_c \dot{\tilde{y}} + \tilde{y} + \alpha_1 \ddot{\tilde{h}} + \alpha_2 \tilde{g} \tilde{y} + \alpha_3 \tilde{y}^3 &= 0 \\
\ddot{\tilde{h}} + 2\xi_H \omega_c \dot{\tilde{h}} + \left(\frac{\omega_c}{\omega_H}\right)^2 \tilde{h} + \alpha_4 \tilde{y} &= F_H(\tau) \\
\ddot{\tilde{g}} + 2\xi_g \omega_c \dot{\tilde{g}} + \left(\frac{\omega_c}{\omega_g}\right)^2 \tilde{g} + \alpha_5 \tilde{y}^2 &= F_g(\tau) \quad (17a, b, c)
\end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha_1 \sim \alpha_3$ 、 α_4 、 α_5 は式(16a, b, c)の各項の係数である。また、 $F_H(t)$ 、 $F_g(t)$ は桁に作用する動的水平外力、鉛直外力である。なお、式(17a, b, c)には粘性減衰を加えてある。

式(17a, b, c)において、ケーブルの動きを主体とした運動方程式である式(17a)の $\tilde{y}^3$ はケーブルの伸びによって生ずる剛性の変化に対応する項である。式(17a)の $\ddot{\tilde{h}}$ と式(17b)の $\tilde{y}$ は桁の水平振動とケーブルの水平振動との線形連成項であり $\omega_c \approx \omega_H$ のときには重要な意味をもってくる。式(17a)の $\tilde{g}\tilde{y}$ と式(17c)の $\tilde{y}^2$ の項はオートパラメトリック(非線形)連成項とよばれるもので、 $\omega_g \approx 2\omega_c/m$ ($m=1, 2, 3, \dots$)、とくに $\omega_g \approx 2\omega_c$ のときに重要な意味をもってくる。

ところで、1. で述べた歩道橋では、桁の鉛直、水平、何本かの実際に振動したケーブルの固有振動数には

$$\omega_g \approx 2\omega_c \approx 2\omega_H \quad (18)$$

があり、線形共振、パラメトリック共振の双方が起こりうる状況にあるといえる。

3. 摂動法による定常応答解

式(17)に示した非線形運動方程式において水平加振力のみが作用する場合、鉛直加振力のみが作用する場合

$$\text{(ケース A)} \quad F_H(\tau) = F_1 \cos(\Omega_1 \tau), \quad F_g(\tau) = 0 \quad (19)$$

$$\text{(ケース B)} \quad F_H(\tau) = 0, \quad F_g(\tau) = F_2 \cos(\Omega_2 \tau) \quad (20)$$

の2つに分けて摂動法により解析的に解く。(解法については文献12に詳しい)

摂動パラメータ ε を導入し、式(17)においては線形連成項、オートパラメトリック項、ならびに減衰項を ε オーダー、式(19)、(20)の外力も ε オーダーと考える。応答 $\tilde{y}$ 、 $\tilde{h}$ 、 $\tilde{g}$ についても ε で展開する。

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(\tau) &= y_1(t_0, t_1) + \varepsilon y_2(t_0, t_1) + \dots \\
\tilde{h}(\tau) &= h_1(t_0, t_1) + \varepsilon h_2(t_0, t_1) + \dots \\
\tilde{g}(\tau) &= g_1(t_0, t_1) + \varepsilon g_2(t_0, t_1) + \dots \quad (21a, b, c)
\end{aligned}$$

ここで $t_0 = \tau$ 、 $t_1 = \varepsilon \tau$ (マルチプルタイムスケール)である。式(21)を式(17)に代入し、 y_1 、 h_1 、 g_1 の解として正弦波応答を想定し、その振幅 a_i と位相 β_i に関する微分方程式を導き、定常解の条件である $da_i/dt_1 = d\beta_i/dt_1 = 0$ を課し、 a_i 、 β_i に関する連立代数方程式に帰着させ、 a_i 、 β_i の解を求める。各々のケースについて

- case A : (1) $y_1 \neq 0$, $h_1 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ の非線形解
case B : (2) $y_1 = 0$, $h_1 = 0$, $g_1 \neq 0$ の線形解 と
(3) $y_1 \neq 0$, $h_1 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ の非線形解

なる解を求めることができる。求められた解の安定、不安定の判定は、(1) (3) については振幅と位相に関する微分方程式を解のまわりに線形化し、そのまわりでの微小攪乱の複素固有値から判定できる (Linearized complex eigenvalue method)。 (2) の解についてはゼロの解を含むので複素固有値が使えない。そこでstrained parameter法 (文献10) を適用し、 ε オーダーの (摂動) 運動方程式を線形化して、線形解の安定領域を求める。

ここで扱った運動方程式、式 (17) では、解そしてその安定、不安定の判定も解析的な形で行なうことができた。解の形は煩雑なので略すが (詳しくは文献13)、次章の実験結果のところで結果のみを示すこととする。

4. 模型を用いたケーブル・桁系の振動実験

4. 1 模型と実験条件

用いた模型 (図4) はケーブル・桁系としては最も基本的なものであり、図1に示した解析モデルと基本的に同一である。模型の桁長 l が2 mの小型模型である。

模型の設計においては、はじめに述べた歩道橋 (T. bridge) の動的特性に関するパラメータを極力再現するように努めている (表1)。

ただし、ケーブルは1本のみ、桁は片持ちばりであり、実橋とは支持条件が異なる。桁とケーブルの動的連成現象の特性、非線形理論との整合性を見るのがここでの実験の主旨であり、歩行者によるその橋の振動を再現するのが目的ではないのでこの差異は本質的問題とはならない。

桁の鉛直モード ϕ_g としては2次モード、同じく水平モード ϕ_H としては1次モード、ケーブルモード ϕ_c は1次モード ($n=1$) を実験の対象とし、各々の固有振動数 f_g, f_H, f_c が $f_g \approx 2f_H \approx 2f_c$ となるようにしてある。なお、 ϕ_g として2次モー

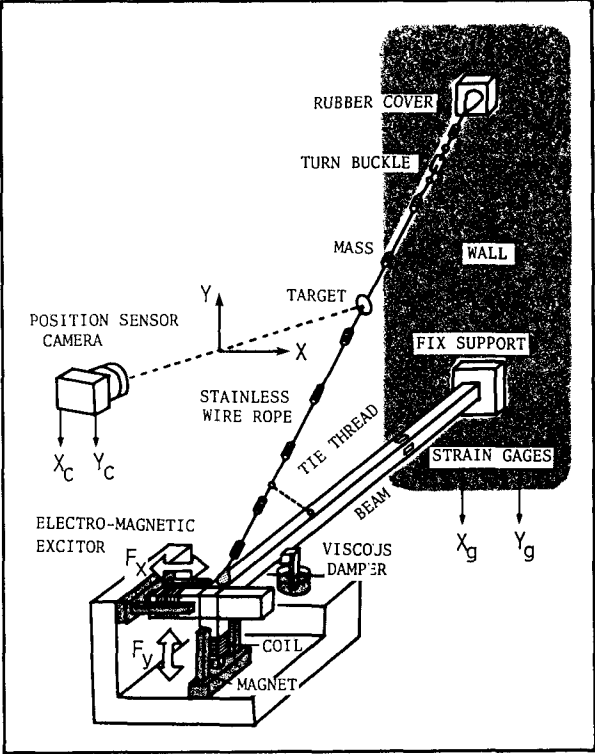


図4 実験に用いたケーブル・桁系の模型

表1 模型の諸元 (無次元パラメータで表示)

DIMENSIONLESS PARAMETERS	MODEL	T. BRIDGE
(A) Natural frequency ratios ω_d/ω_H ω_c/ω_H	2.11 0.85-1.06	2.17 0.85-1.27
(B) Critical damping ratios ξ_c ξ_H ξ_d	0.1 % 0.3 % 0.2 %	0.1-0.2 % 0.3 % 0.3 %
(C) Mass ratios μ_{cl}/M_H μ_{cl}/M_d	2.6×10^{-2} 2.6×10^{-2}	$0.6-1.6 \times 10^{-2}$ $0.4-1.2 \times 10^{-2}$
(D) Geometrical factors ρ_c ρ_{ac} n_0	1.0 1.0 0.45	0.8-1.0 0.6-1.0 0.6-0.8
(E) Modal number of cable n	1	1
(F) Pre-strain of cable U_0/l_c	$3.6-5.7 \times 10^{-3}$	$0.7-2.5 \times 10^{-3}$
(G) Ratio of cable weight to tension $\mu_{cl}g/\tau_0$ (g : gravity acceleration)	$1.1-1.8 \times 10^{-2}$	$1.7-4.3 \times 10^{-2}$

ドとしたのは想定した歩道橋と模型のパラメーターの相似則を考えたとき、一次モードでは条件を満たす模型の作成が極めて困難であったからである。

ケーブルはステンレスワイヤを用い、張力はターンバッフルで調整した。また、ケーブル振動の減衰を調整するために一方のはしにはゴムのカバーをした。桁はそりなどが生じないようにするためにSS41材を冷間加工したのを使い、支持点では減衰が大きくなるようにするために壁に溶接した。またケーブル、桁の重量はおもりをつけて調整した。

表1に示す ϕ_G 、 ϕ_H 、 ϕ_C の固有振動数、減衰定数は自由振動実験より求めた。これらの ϕ は一部を拘束した状態でのモードであり、実験においては振動特性に不必要な変化が生じないように桁、もしくはケーブルの動きを拘束した。

加振は桁の自由端部を水平、もしくは鉛直に手製のコイル式の電磁加振器により加振した。

桁の変位はひずみゲージにより、ケーブルの変位は光学式変位計により計測した。ケーブルの鉛直面内振動は細い糸により拘束した(図4)。この拘束によるケーブルの水平振動数への影響は小さいが、減衰には若干の影響があったと思われる。それでも減衰 δ_C は表1に示すとおり、0.1%と十分小さい。

4.2 実験結果と考察

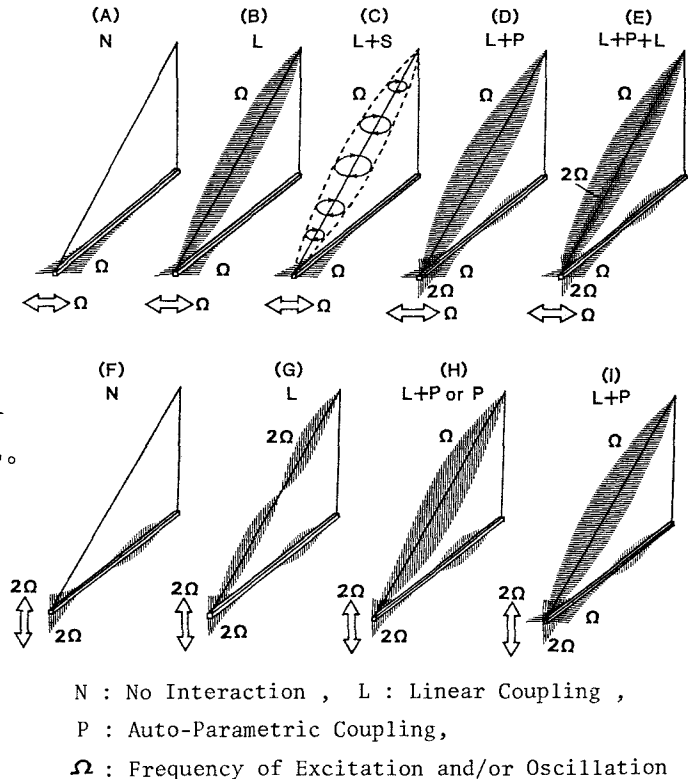
種々のケースの実験を水平加振、鉛直加振のもとで行なった。ケーブルの鉛直変位を拘束しない場合も含めて実験でみられた動的応答のパターンを分類したのが図5である。A~Eは水平加振、F~Iは鉛直加振にみられた応答パターンである。

以下に述べる実験結果はケーブルの鉛直変位を拘束したケースのみに限定する。したがってパターンC、E、H(E、Hはケーブルが 2Ω に鉛直に振動するケース)、Gは除外されることになる。

また模型条件としては、 $f_C=9.86\text{Hz}$ 、 $f_H=9.38\text{Hz}$ 、 $f_G=19.75\text{Hz}$ 、対数減衰率は $\delta_C=0.009$ 、 $\delta_H=0.017$ 、 $\delta_G=0.010$ のときのものである。さらにケーブルの静的初期伸び量 u_0 は $u_0=0.0126\text{m}$ 、ケーブル長 $L_C=2.20\text{m}$ である。

$f_C=9.86\text{Hz}$ なのでかりに桁端部に0.65Nの正弦波外力を作用させると $M_H=M_G=6.0\text{kg}$ 、 $\phi_H(L)=\phi_G(L)=1$ より式(16b,c)の一般外力はともに $0.65\sin(\Omega t)/(6.0 \times (2\pi \times 9.86)^2 \times 0.0126$

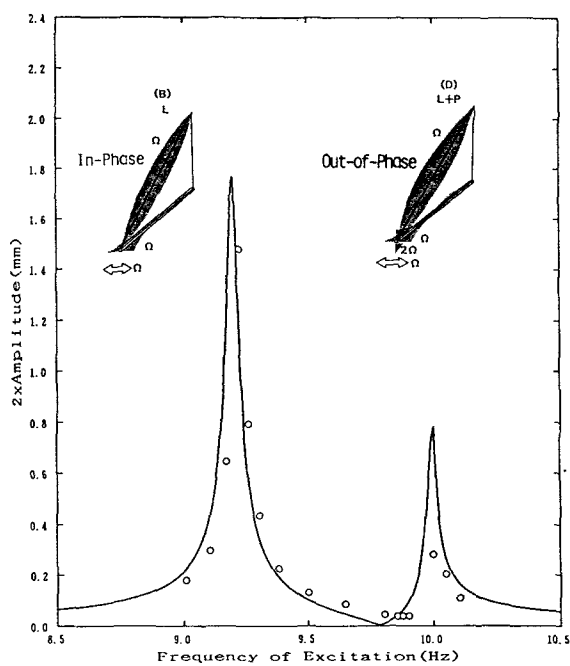
$=0.65\sin(\Omega t)/290$ となる。以下に示す応答図では、実振幅、実外力のスケールで示してあるが、上記の値および表1の関係より無次元量との対応が可能となる。



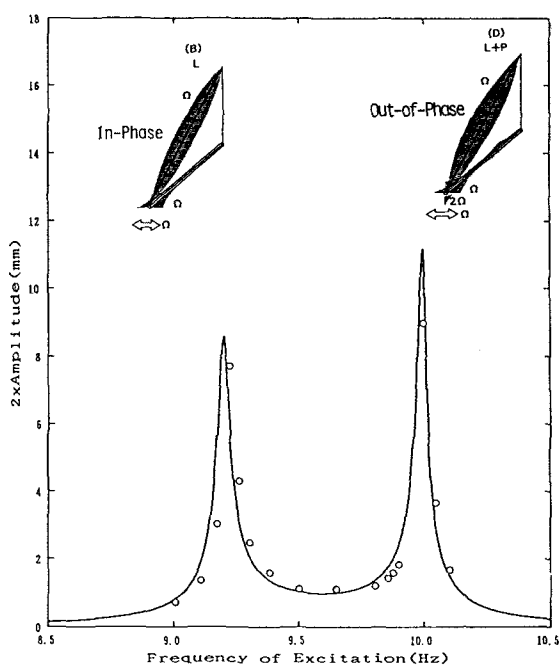
N : No Interaction , L : Linear Coupling ,
P : Auto-Parametric Coupling,
 Ω : Frequency of Excitation and/or Oscillation

図5 振動実験でみられた応答のパターン

(1) 水平加振について 図6 a、b、cに示すのは実験結果の一例である。加振力は0.13Nの正弦波外力で

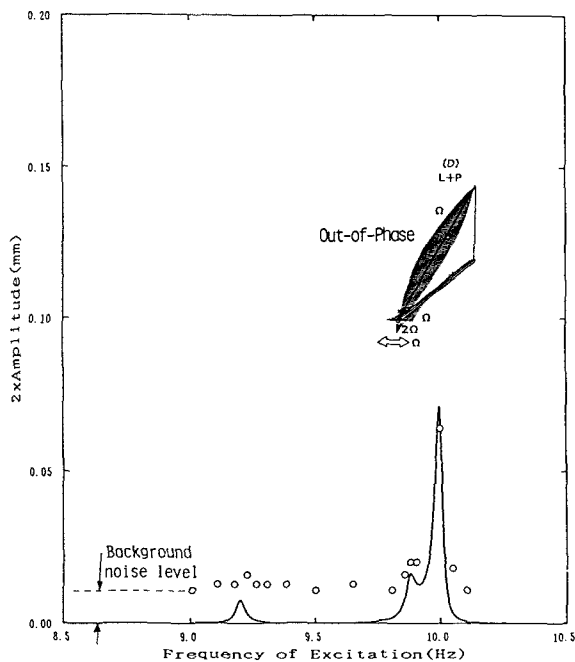


a) 桁の水平振幅（自由端位置）



b) ケーブルの振幅（スパン中央）

図6 水平加振による応答（横軸は加振振動数，加振力 = 0.13 N）



c) 桁の鉛直振幅（自由端位置）

図6

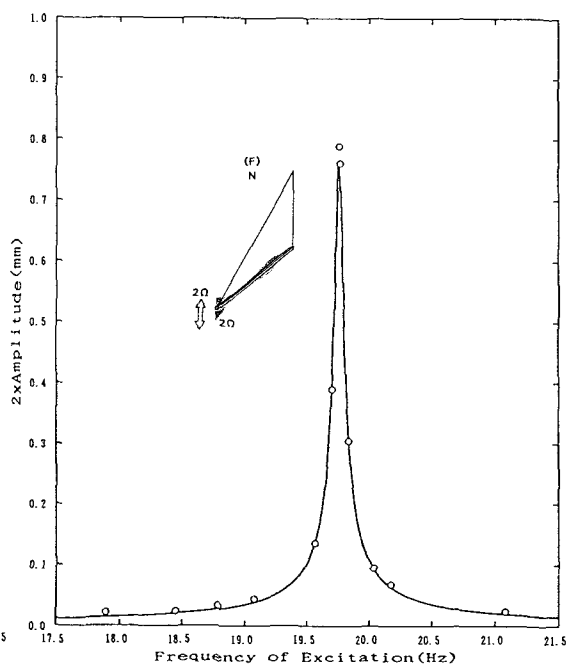
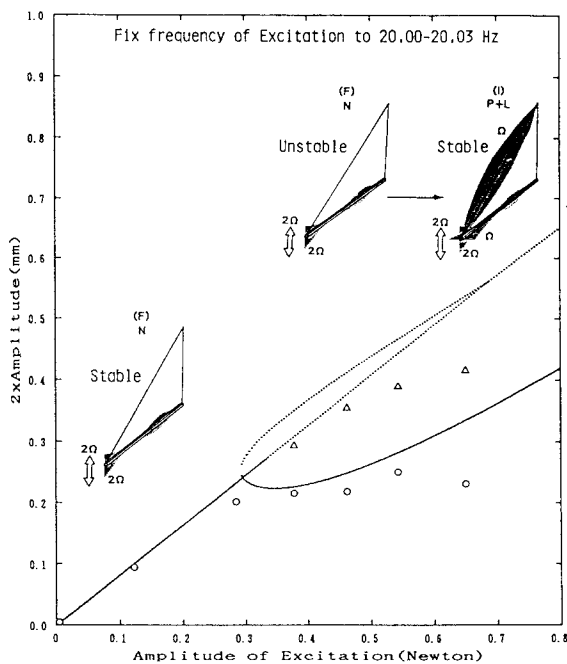
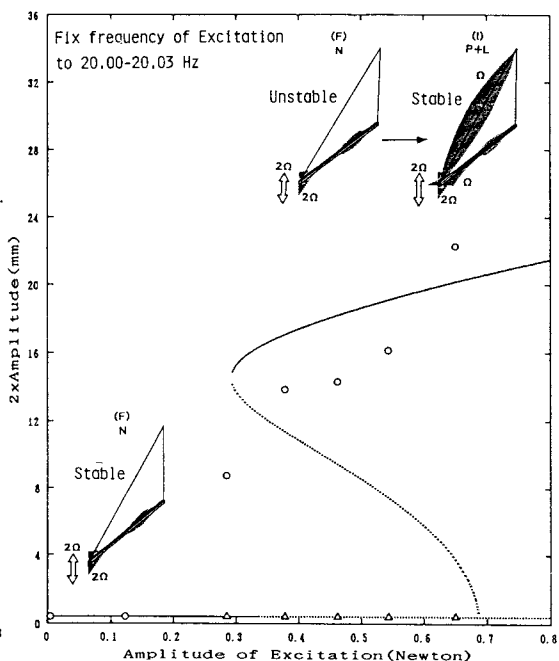


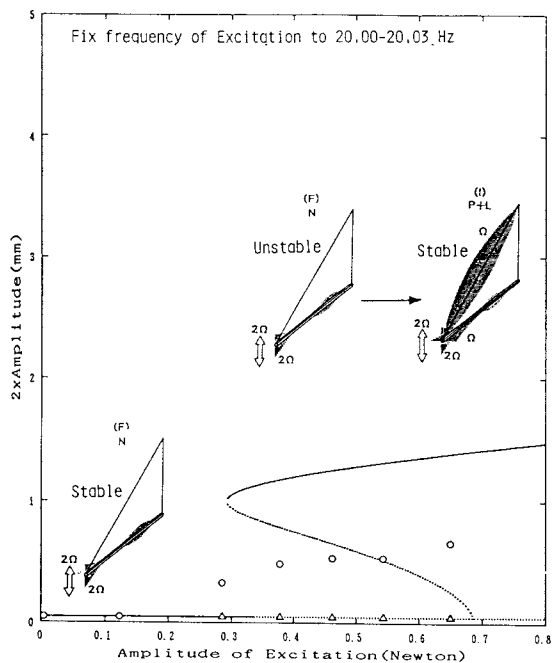
図7 小さい鉛直加振力による
桁の鉛直振幅（自由端位置）
（横軸は加振振動数，加振力 ≈ 0.13 N）



a) 桁の鉛直振幅（自由端位置）



b) ケーブルの水平振幅（スパン中央）



c) 桁の水平振幅（自由端位置）

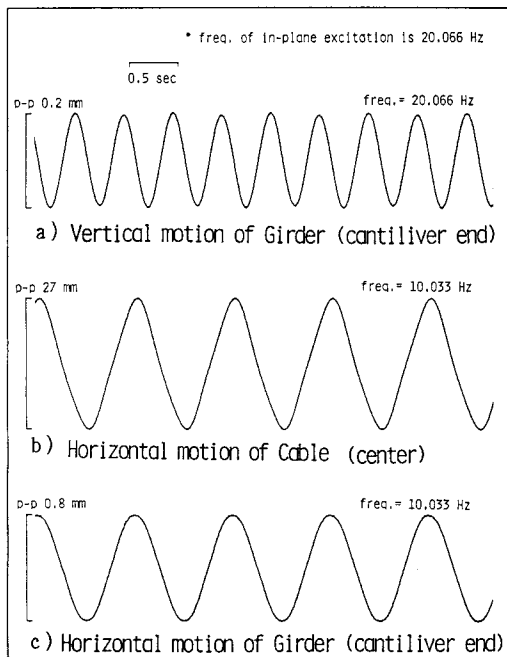


図9 実験でみられたパターン I
(オートパラメトリック励振)
の時刻歴応答例
(鉛直加振, 加振力 = 0.65 N,
加振振動数 = 20.066 Hz)

図8 加振力を変化させた鉛直加振
(横軸は加振力, 加振振動数は一定
(20.00 ~ 20.03 Hz))

ある。いずれの図も、横軸は加振振動数 Ω 、たて軸は倍振幅である。図において○印は実験値であり、実線は3. に述べた運動方程式(式(20))に実験条件を代入して求められた予測値である。

桁とケーブルの水平変位は線形連成の関係にあり(式(17))、共振点が2つ存在し(9.2Hz、10Hz付近)、そこでの応答が大きくなる(図6 a、b)。各々のピークではパターンB、パターンDが生じている。パターンBはケーブルの水平運動が桁の水平運動と同位相であるのに対し、パターンDでは逆位相となっている。また、加振振動数 Ω が10Hz付近のときには図6 cに示すように桁に2 Ω の鉛直振動が生じる(パターンD)。これは式(17)の第3式における y^2 (y :ケーブルのモード振幅)の項により桁に2 Ω の力が作用し2 Ω が桁の鉛直固有振動数 f_g (この場合は19.75Hz)に近いために励起されるものである。

図6 a、b、cに示されているように、実験値と予測値の整合は $\Omega = 10\text{Hz}$ 付近の桁の水平変位を除いてきわめてよいといえよう。 $\Omega = 10\text{Hz}$ 付近の実験値において、桁の水平変位があまり大きくならないのは模型条件によると考えている。すなわち、本来桁の重心、ケーブルの桁取り付け点を桁の回転中心に一致させる予定であったが、計算間違いにより重心、ケーブル取り付け点がやや上にきてしまった。そのためこのモードでは桁が水平変位するときねじれが若干連成しており、このことが実験値と予測値の差につながったと考えている。桁のねじれの効果は解析には入っていない。

なお、当然のことながら、図6 a、bに示した共振応答特性は、線形共振によるものであり、外力の振幅にかかわらず生じるものである。

(2) 鉛直加振について 図7に、加振力を0.13Nにしたときの桁の鉛直応答を示す。このときにはケーブルそれ自身、桁鉛直方向の振動は観察されておらず、連成の影響が出ていない場合であり(パターンF)、3. で述べた解の中での線形解に相当する。

図8 a、b、cには外力振動数を20.0Hzにした状態で、外力振幅(横軸)を増加させたときの定常倍振幅(縦軸)を示している。

図8 a、b、cに示す実線、点線は運動方程式から求めた予測値であり、実線は安定解、点線は不安定解を示す。なお、図8 a、b、cの原点からのびる直線が線形解($g(t) \neq 0, y(t) = 0, h(t) = 0$)(パターンF)であり、他のは非線形解($g(t) \neq 0, y(t) \neq 0, h(t) \neq 0$)(パターンI)である。○印、△印は実験値であり、○印は安定な応答、△印は過渡的には存在するが安定ではなく、時間が経つと存在しなくなる応答(不安定な解)の意味である。なお、図8 b、c、の $y=0, h=0$ に対応する実験値は本来横軸上にプロットすべきであるが、図がわかりにくくなるため若干横軸より上に記した。これらの実験値はゼロと考えていただきたい。

外力振幅を増大させるとはじめは桁の鉛直振動振幅が飛躍的に増えるが、0.3Nを越えたあたりからケーブルの水平振動(図8 b)、桁の水平振動(図8 c)が生じ(○印)、そのとき、桁の鉛直振動振幅が伸び悩み状態に入る(図8 a、○印)。このパターンIの時刻歴応答の例を図9に示す。図8の△印はケーブルを指で軽くおさえ振動を止め、放した後のしばらく(数百サイクル)の間での振幅である。これはさらに時間が経つと○印のところにすなわちパターンがFからIへ移行する(図10)。

桁の鉛直振動に伴い、ケーブルの水平振動はパラメトリック励振され(式(17)のオートパラメトリック連成項に起因するもの)そのケーブルの水平振動により線形連成として桁の水平振動が生じるが、これは、外力があるレベルに達してはじめて生ずるものであることがわかる。

ここでも解析解による予測値は実験結果と定性的にはよく一致しているといえるであろう。定量的には桁の水平変位に関しての一致がよくない。これは、先にも述べたように回転中心が重心、ケーブル取り付け点と一致していないために桁の水平変位にともないねじれ変位がでて、その結果予測値よりも実験値が下回る結果になったと考えている。

次に、加振力 F を大きな値で一定($=0.65\text{Newton}$)にして加振振動数を変化させたときの実験結果ならびに解析による予測値を図11 a、b、cに示す。図11 aの右上がりの実線(一部点線)(パターンF)は線形

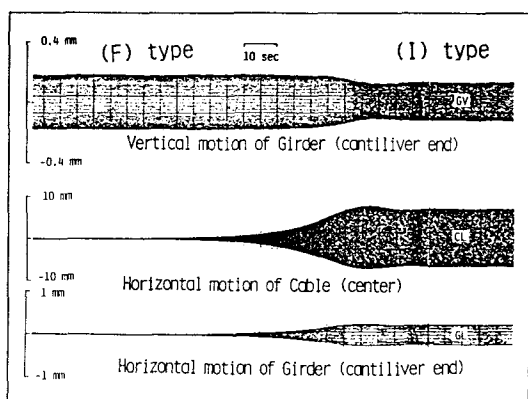
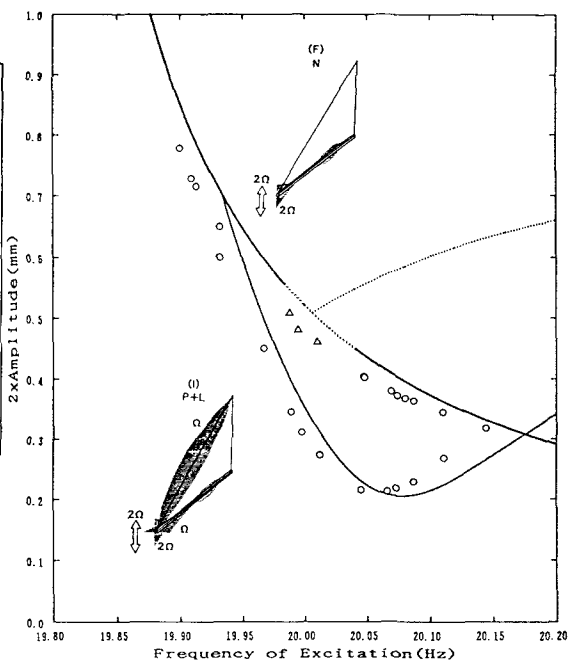
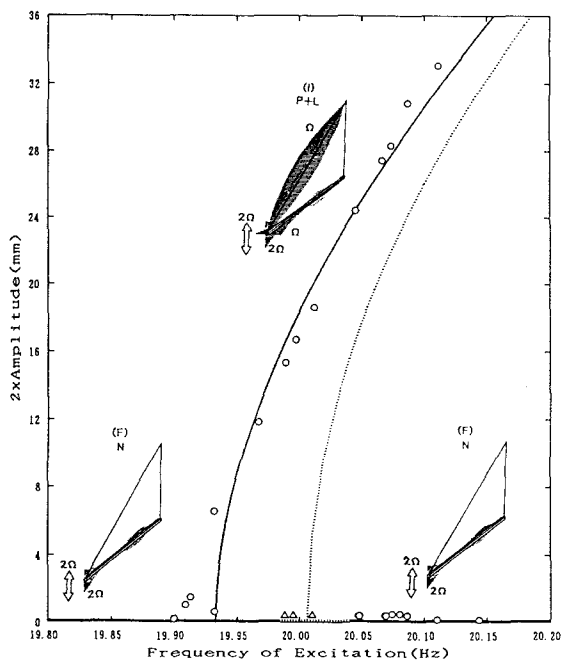


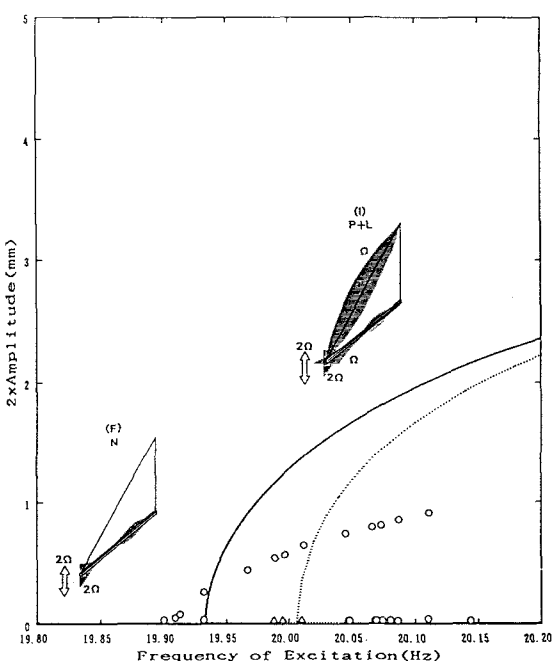
図 10 パターン F からパターン I への
遷移の例



a) 桁の鉛直振幅（自由端位置）



b) ケーブルの水平振幅（スパン中央）



c) 桁の水平振幅（自由端位置）

図 11 大きい鉛直加振力による応答
（横軸は加振振動数，加振力 = 0.65 N）

解であり、ケーブル、桁の水平振動は伴わない。一方、加振振動数が19.95Hzから始まる凹型の実線は非線形解でパターンⅠに対応し、ケーブル、桁の水平振動を伴う。実験においても加振振動数 Ω が19.95Hz ($\Omega = 19.98 \sim 20.03\text{Hz}$) をこえるときには、点線のところを除いて定常応答として2つ（パターンFとⅠ）があり、どちらを選択するかは初期条件（攪乱）によった。

なお、図11aに示すように解析により $\Omega = 19.98\text{Hz} \sim 20.03\text{Hz}$ 付近にパターンFのモードが不安定となる領域が存在することが予測されている。この領域では、あらかじめケーブルを静止させた状態から加振するとはじめはパターンFで振動するが（図11a、△印）、時間が経過するとパターンⅠに移行し、パターンFが不安定な解であることが実験においても確認されている。

ケーブルの鉛直振動を拘束しており、やや限定的な例となっているが、式(17)の運動方程式による予測値と実験値との適合性はいずれの場合もよいといえよう。図11cに示されているように桁の水平変位においてここでも実験値と予測値の一致があまりよくないのは、模型において桁の水平変位にねじれが伴うためであると考えている。

5. おわりに

斜張橋の力学モデルとしては最も原型に近い、一本のケーブルで支持された桁、すなわちケーブル・桁系を対象にし、その連成効果に注目した動特性を解析と実験の双方から明らかにすることを試みた。

ケーブルの幾何学的非線形性を考慮した運動方程式から求めた解析解が定性的にも、そしてかなりの程度まで定量的に模型実験の結果を説明しうることを示したと考えている。

本論では、ある歩道橋の動特性にあわせてケーブルの固有振動数 $\approx$ 桁の水平固有振動数、桁の鉛直固有振動数 $\approx 2 \times$ ケーブルの固有振動数という条件を課して解析解を求め、同じ条件のもとで実験を行っている。しかし、これは動的な連成問題を考える上で最も重要な連成、すなわち線形連成と（非線形）オートパラメトリック連成に対応しており、斜張橋において特殊な問題ではない。

マルチケーブル斜張橋では、数多いケーブルの中には上記の振動数関係のどちらか一方、あるいは両方ともを満たすケーブルが存在することになる。長スパン化がさらに進むと桁の低次モードとケーブルとの線形、非線形の連成がより現実的な問題となり、風あるいは走行車による桁の小振幅の振動がケーブルに大きな振動をひきおこすことも十分ありうると予想される。

斜張橋を念頭においたケーブル・桁系のより一般的な定式化、それに対する実験の結果については現在とりまとめ中であり、別の機会に発表する予定である。

なお、本論文の出発点となった、ある歩道橋の歩行者によるケーブル・桁の水平振動の原因が本研究から明確になったわけではない。しかし、本実験を行なってみた印象から、人の歩行により生ずる水平力（約1Hz）（文献2）が線形共振を介してケーブルと桁の水平振動を生じさせたのではないかと現時点では考えている。実験結果によれば、オートパラメトリック共振によりケーブル・桁の水平振動が励起されるためには桁の鉛直振動がかなり大きくなくてはならないが、この歩道橋の鉛直振動は実際にはそれ程大きなものではなかった。また、それが生じる振動数範囲もせまい。一方、ケーブルと桁との水平共振は線形であり、加振力が弱くても必ず生じるものである。実橋での振動測定の結果の分析、歩行者の歩行特性、特に橋の水平振動との相互作用関係の分析などを現在行っており、歩道橋の水平振動の原因についてもう少し明確な形で、近い将来に発表できるものと考えている。

謝辞

本研究を行うに際し東京大学 伊藤學教授には有益な助言と暖かい励ましをいただいた。新日本製鉄㈱ 中村俊一氏には本研究をはじめの切っ掛けをつくっていただいた。また、埼玉大学 山口宏樹助教授には論文に

目を通していただき、記述、定式化に関し不明確な点を数多く指摘していただいた。これらの方々に心よりお礼を申し上げたい。

なお、本研究は科学研究費の補助を受けておこなわれたものである。

参考文献

- 1) Bachmann H. and Ammann W.: Vibration in Structures - Induced by Man and Machines, Structural Engineering Documents 3e, IABSE-AIPC-IVBH, 1987, pp.1/176
- 2) Miles J.M.: Stability of forced oscillations of a vibrating string, J. Acoust. Soc. Amer. Vol.38, 1965, pp.855-861
- 3) Irvine, H.M.: Cable structures, MIT Press, 1981
- 4) Gimsing N.J. (大塚久哲訳): 超長大支間の斜張橋、橋梁と基礎、1989年6月号、pp.34-40
- 5) 山口宏樹、伊藤學: 単一ケーブルの3次元自由振動、土木学会論文集、No.286、1979.6、pp.29-36
- 6) 高橋和雄他: 調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析、土木学会論文集、No.338、1983.10、pp.59-68
- 7) Davenport, A.G. and Steels, G.N.: Dynamic behavior of massive guy cables, Proc. ASCE, J. of Struct. Div., Vol.91, No.ST2, 1965, pp.43-70
- 8) Kovacs, I.: Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildämpfung, Die Bautechnik, 1982 Oct., pp.325-332
- 9) Maeda, K., Yoneda, M. and Maeda Y.: System damping effects on cable-stayed bridges, Proc. of IABSE Congress, 1981
- 10) Miyata, T., Yamaguchi, H. and Ito, M.: A study on dynamics of cable-stayed structures, Ann. Report of Eng. Res. Inst., Fac. of Eng., Univ. of Tokyo, Vol.36, 1977, pp.49-56
- 11) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 3rd Edition, 1982
- 12) Nayfeh, A.H.: Nonlinear Oscillations, John Wiley and Son, 1979
- 13) Warnitchai, P.: Nonlinear dynamics of cable-stayed bridge and control of cable oscillation Doctoral dissertation Univ. of Tokyo (under preparation)

(1989年10月2日受付)