

水平ケーブルの面内対称加振による逆対称分岐応答

Anti-symmetric Response of a Cable through Bifurcation under Inplane Symmetric Forcing

高橋和雄*・白石隆俊**

Kazuo TAKAHASHI and Takatoshi SHIRAISHI

Anti-symmetric response of a cable through bifurcation under in-plane symmetric time-varying load is analyzed. The in-plane nonlinear equations of motion of a cable under symmetric forcing are solved by a Galerkin method. The frequency range where the anti-symmetric responses occur is shown at first. Then, nonlinear symmetric response and the corresponding anti-symmetric response within the unstable region are calculated by using the Runge-Kutta-Gill method. Nonlinear coupling between symmetric and anti-symmetric responses are observed in the particular sag-to-span ratios. Anti-symmetric responses influence upon symmetric responses in the present problem.

1. まえがき

ケーブルに現われる振動問題は、非常に多岐にわたり、興味深い現象がクローズアップされている。1970年代の後半からも固有振動特性^{1), 2)}、モード減衰³⁾、非線形振動^{4), 5)}、係数励振振動^{6), 7), 8)}、カオス⁹⁾などが解析されている。また、システムダンピング¹⁰⁾、レインバイブレーション¹¹⁾などの議論もなされている。この他にケーブルにおける振動問題の1例として、藤野ら¹²⁾は、風洞実験において、8字型ケーブルがギャロッピングを起こしたとき、発現モードが対称から逆対称、もしくは逆対称から対称に転移することを確認している。また、実際のケーブルの空力不安定振動においても観測されている。藤野らは、この問題をモードのエルゴード性(モード間のエネルギー転移)としてとらえ、モード間の非線形連成現象とモードのエルゴード性との関係および自励力の影響をコンピューターシミュレーションを用いて調べている。一方、高橋らは、この問題を面内対称加振による逆対称分岐応答(係数励振振動)として解析し、ケーブルには対称加振によって逆対称振動が生じる不安定領域が存在することを示し、安定・不安定境界線上における対称・逆対称振動の応答を明らかにしている¹³⁾。エルゴード性の問題を、この不安定領域におけるケーブルの対称・逆対称連成応答によるモード間の連成の一挙動とみなせば、現象の説明ができることが考えられる。

そこで、本論文は、分岐応答(係数励振振動)の立場から、この問題を見直し、逆対称振動が発生する不安定領域内での対称振動と逆対称振動のモード間の連成現象を時間応答解析を用いて評価した結果を報告するものである。

2. 運動方程式

面内対称加振を受ける水平ケーブルの面内対称1次振動の基準座標をP、逆対称1次振動の基準座標をQ

* 工博 長崎大学助教授 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

** 工修 パシフィックコンサルタンツ㈱ 〒810 福岡市中央区大手門1丁目1-12

すれば、次のような運動方程式が得られる^{(4),(5)}。

$$\ddot{P} + a_1 \dot{P} + b_1 P^2 + c_1 Q^2 + d_1 P^3 + e_1 P Q^2 = f_1 P \cos \omega \tau \quad (1)$$

$$\ddot{Q} + a_2 \dot{Q} + (b_2 P + c_2 P^2 + d_2 Q^2) Q = 0 \quad (2)$$

ここに、 $a_1 \sim f_1$ 、 $a_2 \sim d_2$ ：ケーブルのサグ比 γ 、縦波－横波伝播速度比 k で定まる定数、 p ：荷重強度、
 なお、 P, Q はスパン長 l で無次元化されている。また、時間は弦の 1 次振動の固有円振動数で無次元化されている。

式(1)、(2)は文献(8)で示したケーブルの面内加振による面外振動の運動方程式と全く同じかたちとなる。

3. 応答の分類とアプローチ法

図-1 に、式(1)、(2)で表わされる微分方程式から得られる応答と、採るべきアプローチ法を示す。式(2)は同次方程式となっており、しかも $Q=0$ ならば式(2)は満足される。 $Q=0$ のとき、式(1)は P のみの方程式であり、これを単独に解けば、 $p \neq 0$ なる外力によって直接励振される付随応答が得られる。しかし、式(2)の微分方程式の係数

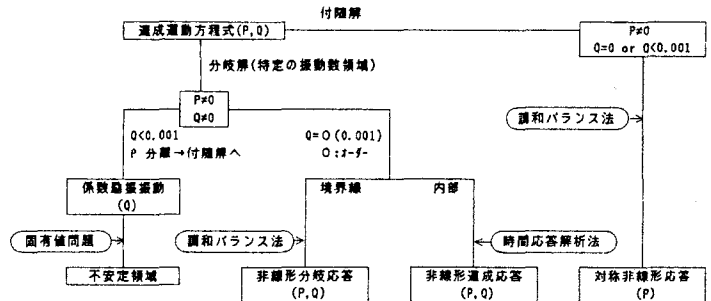


図-1 応答の分類とアプローチ法

に、付随応答 P の項が含まれるために、 P が周期振動 ($P = A \cos \omega \tau$) の場合には、係数が ω ($b_2 P Q$ の項より) および 2ω ($c_2 P^2 Q$ の項より) の円振動数をもつ励振力が作用する係数励振振動型の方程式 (Mathieu-Hill の方程式) となる。したがって、特定の振動数領域で逆対称振動 Q がゼロ以外の解をもつ逆対称分岐応答が存在する。このために、式(1)、(2)の対称・逆対称連成振動が生ずる。また、式(1)の対称振動の項に $c_1 Q^2$ 、 $e_1 Q^2 P$ と逆対称振動の項が含まれるので、逆対称振動の振幅が大きくなれば対称振動に影響を及ぼすことになる。

(1) 係数励振振動の不安定領域⁽¹³⁾ 逆対称振動が生じた直後、すなわち逆対称振動が微小振動の範囲 ($Q < 0.001$) ならば、非線形項 Q^2 および Q^3 は無視できるので、式(1)、(2)は次のように書き改められる。

$$\ddot{P} + a_1 \dot{P} + b_1 P^2 + d_1 P^3 = f_1 P \cos \omega \tau \quad (3)$$

$$\ddot{Q} + a_2 \dot{Q} + b_2 P Q + c_2 P^2 Q = 0 \quad (4)$$

式(3)は P のみの方程式であるので、対称振動の付随応答 P が調和バランス法によって単独に求められる。次いで、この結果を式(4)に代入することによって、Hill の方程式が得られる。これを固有値問題に変換する手法⁽⁷⁾を用いて解析すれば、応答曲線上に逆対称振動が生じる不安定領域が求められる。不安定領域において、逆対称振動が生じ、時間とともに発散する。このとき、式(3)に Q の項が含まれないので、不安定領域においても対称振動は影響を受けない。

(2) 逆対称分岐応答解析⁽¹³⁾ 逆対称振動の発生境界すなわち、安定・不安定の境界線においては、Floquet の理論より逆対称振動は周期 $2T$ (主不安定領域) と周期 T (副不安定領域) の周期振動をすることがわかっている。したがって、分岐点近傍における分岐後の応答および対称付随応答は、この周期振動の性質を使って、調和バランス法を用いて明らかにすることができる。

(3) 不安定領域内部の連成応答 不安定領域内部の応答はきわめて複雑な波形をもつために、これを解析的に明らかにすることは不可能である。したがって、式(1)、(2)を直接数値積分することが必要である。本研究では、1階の連立微分方程式に変換して、Runge-Kutta-Gill法による数値積分を行う。解析にあたって初期条件として対称振動は、対称付随応答の振幅を与え、初速度を0とする($P(0) \neq 0$, $\dot{P}(0)=0.0$)。非線形振動問題では、複数の応答が存在するので、初期条件の設定が重要である。逆対称振動については、微小振動の外乱を与える必要がある。ここでは、逆対称振動の初期条件として、初速度の外乱を与える($Q(0)=0$, $\dot{Q}(0)=0.0005$)。

4. 連成現象の基本的性質

対称1次振動と逆対称1次振動の固有振動特性に注目すると²⁾、対称振動はケーブルのサグ比によって固有振動数が変化し、無次元固有振動数 $\omega=1.0 \sim 3.0$ の値をもつ。これにともなう、モード形が弦の対称1次振動形から対称2次振動形に遷移する。これに対し、逆対称振動の固有振動数は $\omega=2.0$ でほとんどサグ比の影響を受けない。この特性のために、伝播速度比 $k=30$ のケーブルではサグ比 $\gamma=0.026$ 付近で、対称振動と逆対称振動の固有振動数の大きさが入れ替わる²⁾。

式(1)から明らかなように、対称振動から逆対称振動へ励振する力の大きさは、係数 b_2 、 c_2 の大きさおよび対称振動の応答 P の大きさに依存する。また、逆対称振動の影響は、式(2)の $c_1 Q^2$ 、 $e_1 Q^2 P$ の項によって、対称振動へフィードバックされる。対称、逆対称とも1次振動について係数 c_1 、 e_1 の大きさとサグ比 γ との関係($k=30$)を求めると、図-2、3のとおりとなる。これらの図のように、 c_1 、 e_1 ともにサグ比 γ の変化にと

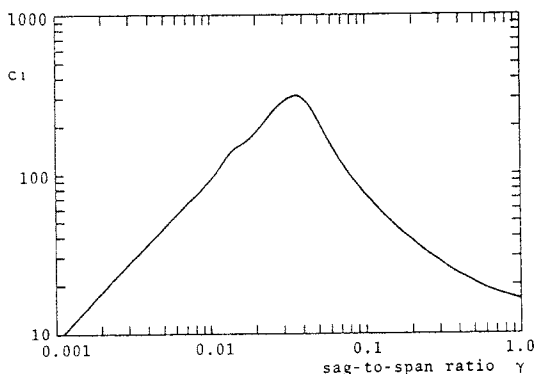


図-2 連成項の係数 c_1 とサグ比との関係
($k=30$, $\theta=0^\circ$)

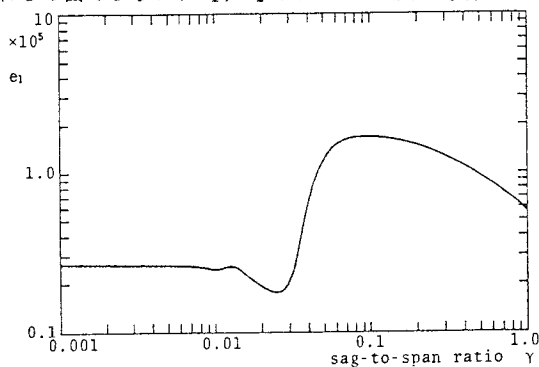


図-3 連成項の係数 e_1 とサグ比との関係
($k=30$, $\theta=0^\circ$)

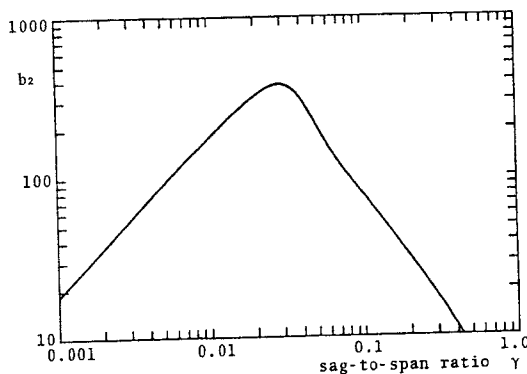


図-4 連成項の係数 b_2 とサグ比との関係
($k=30$, $\theta=0^\circ$)

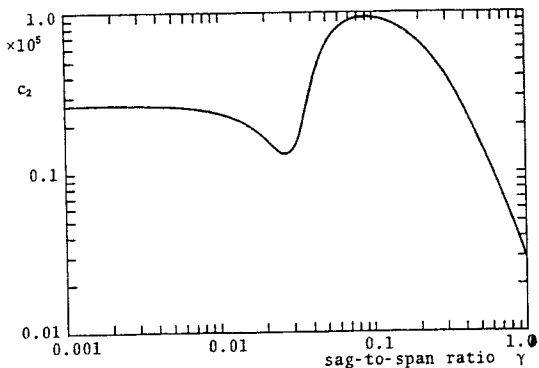


図-5 連成項の係数 c_2 とサグ比との関係
($k=30$, $\theta=0^\circ$)

もなって変動する。弦に近いサグ比のケーブル($\gamma=0.001$)では、 c_1 、 e_1 とも値は小さいために逆対称振動が対称振動に及ぼす効果は、小さいことが予想される。 c_1 の大きさはサグ比 γ の増大とともに増加し $\gamma=0.04$ 付近で最大となり、さらにサグ比 γ が大きくなると急激に小さくなる。つまり、モードの遷移領域²⁾で c_1 の大きさは著しく大きくなる。一方、 e_1 の大きさは $\gamma=0.04$ 付近から増大し、 $\gamma=0.06$ 付近で最大となり、以後徐々に減少する。このように、逆対称振動から対称振動へのフィードバックの項の大きさはサグ比によって異なることが指摘できる。

次に、対称振動が逆対称振動を励振する力の大きさは、 $(b_2P+c_2P^2)Q$ の項、つまり、係数 b_2 、 c_2 および対称振動の応答 P に依存する。係数 b_2 、 c_2 とサグ比の関係は、図-4、5に示すとおりである。図-2、3とよく似た曲線となっている。つまり、対称振動が逆対称振動に及ぼす励振力もサグ比の影響を著しく受けることが予想される。このように、ケーブルの係数は、弦($\gamma < 1$)よりも大きい領域が存在するため、ケーブルでは対称振動と逆対称振動の連成効果が強いことが予想される。

5. 逆対称振動の発生領域

以上の連成特性に注目して、モードの遷移領域のサグ比 $\gamma=0.03$ およびモード遷移後のサグ比 $\gamma=0.10$ の2種類のケーブル($k=30$)を対象にして、文献13)に示した係数励振振動問題として解析した対称振動の付随応答の応答曲線と、逆対称分岐応答の発生領域を図-6、7に示す。これらの図において、縦軸はスパン l で無次元化された振幅成分、横軸 ω は弦の1次固有振動数で無次元化された加振振動数である。また、実線が対称加振のもとに生ずる対称付随応答であり、斜線部が逆対称振動が生じる不安定領域である。これらの図で明らかなように、 $\omega=2\omega_2$ (ここに、 ω_2 : 逆対称振動の固有振動数、 $1.99(\gamma=0.03)$ 、 $1.90(\gamma=0.10)$) 付近の主不安定領域と $\omega=\omega_2$ 付近の副不安定領域が得られている。なお、図中の荷重強度 p は、各サグ比において静的応答がスパンの1/1000になる大きさである。

図-3、4の結果から明らかなように、 $\gamma=0.03$ では b_2 が支配的で、 $\gamma=0.10$ では c_2 が支配的であるため、 $\gamma=0.03$ のケーブルでは、主不安定領域が広く、 $\gamma=0.10$ のケーブルでは $P^2 = (A \cos \omega \tau)^2 = A^2 (1 + \cos 2\omega \tau) / 2$ より、 2ω の励振振動数をもつことになり、副不安定領域が広くなるといえる。サグ比をパラメーターにして、逆対称振動が生ずる主および副不安定領域は、文献13)の図-7、8に示したとおりである。ケーブルにおいては、弦よりも不安定領域が著しく広くなるサグ比の領域が存在する。つまり、対称加振によって、ケーブルには逆対称振動が生じ易いといえる。

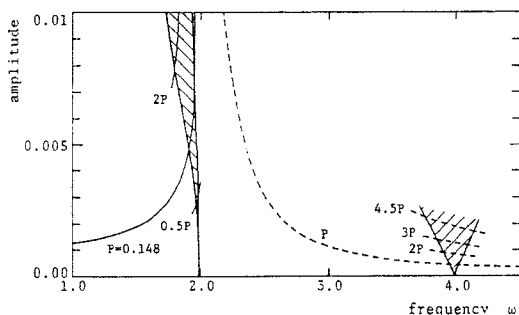


図-6 $\gamma=0.03$ のケーブルの
逆対称分岐応答の発生領域

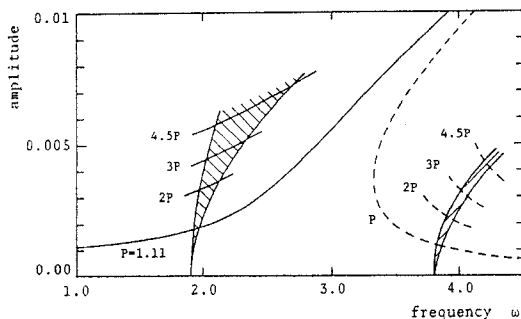


図-7 $\gamma=0.10$ のケーブルの
逆対称分岐応答の発生領域

6. 不安定領域内における連成応答

サグ比 $\gamma=0.10$ のケーブルの副不安定領域内における対称および逆対称振動の時間応答を図-8に示す。図

に示すように、対称振動によって逆対称振動の大振幅振動が励起されている。また、逆対称振動の振幅が大きくなると、対称振動の振幅に影響を及ぼす。このように、これらの非線形連成効果によって、ケーブルにはエルゴード性が見受けられる。ケーブル以外の係数励振振動では、面内方向と面外方向、軸方向とそれに直交方向の物理現象を取り扱うことが一般で、その場合、面内と面外の動特性は別個であることが多い。つまり、励振力の供給は係数励振振動の発生の有無・大きさに関係である。ところがケーブルの場合には、ケーブルの剛性が変形によって定まる。このため、励振力を与える対称振動が逆対称振動の影響を受けるので、このような現象となるものと考えられる。通常の係数励振振動においては、式(2)の $d_2 Q^3$ を無視すれば($d_2=0$)、線形の逆対称振動の係数励振振動の運動方程式が得られる。このとき、一般に逆対称振動は時間とともに発散する。しかし、本題においては $d_2=0$ においても発散することはない。つまり、逆対称振動が対称振動に影響を及ぼし、一定の励振力が逆対称振動へ供給されなくなるためと思われる。式(1)の $c_1 Q^2$ 、 $e_1 Q^2$ Pの存在によるものである。 $\gamma=0.10$ の場合、 $c_1=0$ の時間応答と $e_1=0$ の時間応答を調べたところ、 e_1 の項が効いており、 c_1 の項は効いていないことがわかった。これは、図-2, 3の c_1 と e_1 の大きさから予想される結果である。もちろん、 $c_1, e_1, d_2=0$ とおけば、逆対称振動は図9に示すように発散する。比較対照のために、図-10に安定領域の対称・逆対称振動の時間応答を示す。逆対称振動は微小振動の範囲にとどまっている。

図-11は $\gamma=0.10$ のケーブルの主不安定領域(図-7の $\omega=3.80$ 付近の不安定領域)の対称・逆対称振動の時間応答である。この場合、逆対称振動の振幅が小さいので、逆対称振動は対称振動に影響を及ぼさない。

図-12, 13に $\gamma=0.03$ における副および主不安定領域(図-6の $\omega=2.0, 4.0$ 付近の不安定領域)における時間応答を示す。副不安定領域の対称振動は図12のように共振点近傍の振動数領域にあるために、自由振動応答と強制振動応答が接近している。このために、対称振動にうなりが発生している。減衰力があればこのうなり振動は、自由振動応答が減衰するので消えることになる(図-14参照)。副不安定領域においては、対称振動の振幅が大きく、逆対称振動の振幅が1/4程度であるので、逆対称振動から対称振動への影響は小さい。すなわち、エルゴード性は小さい。主不安定領域における時間応答にはエルゴード性が見受けられ、本ケー

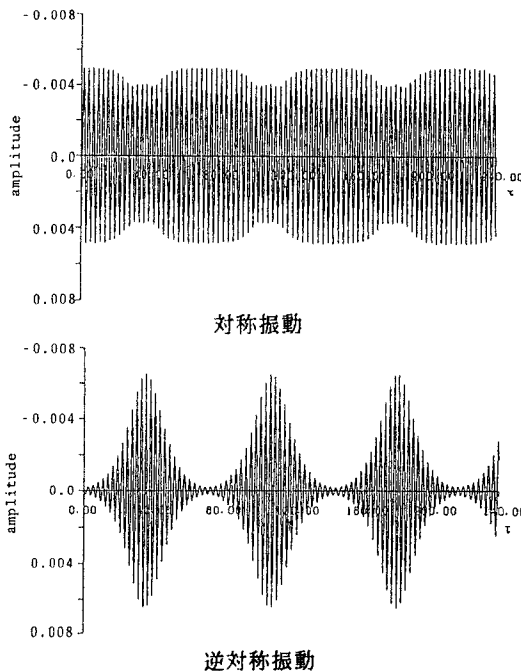


図-8 副不安定領域における時間応答
($\gamma=0.10, \omega=2.2$)

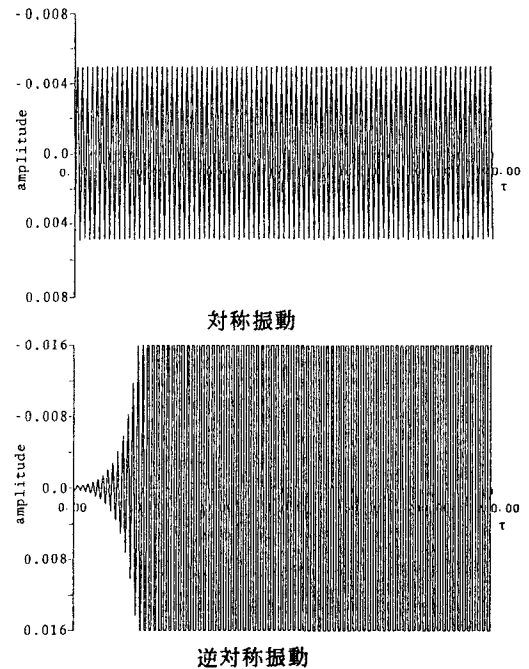
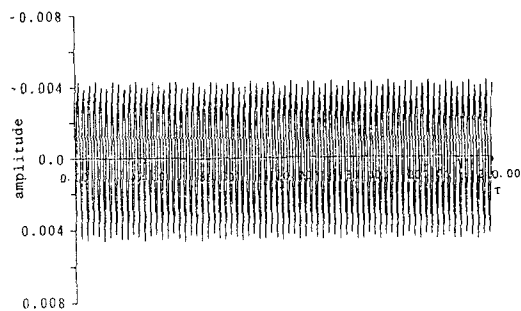
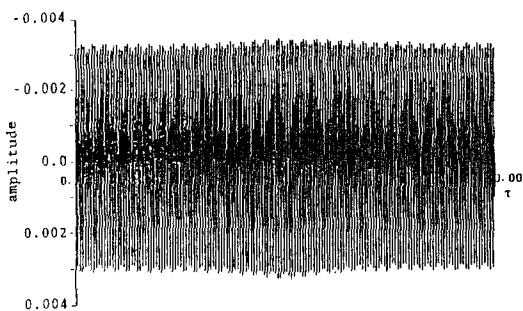


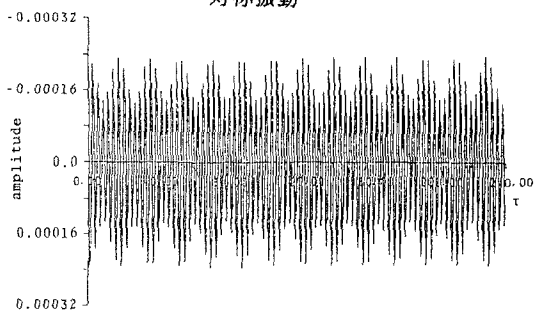
図-9 副不安定領域における時間応答
($\gamma=0.10, \omega=2.2, c_1=e_1=d_2=0$)



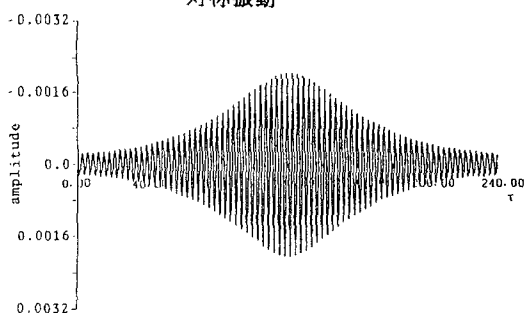
対称振動



対称振動



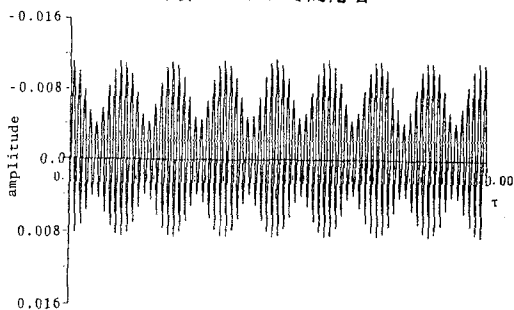
逆対称振動



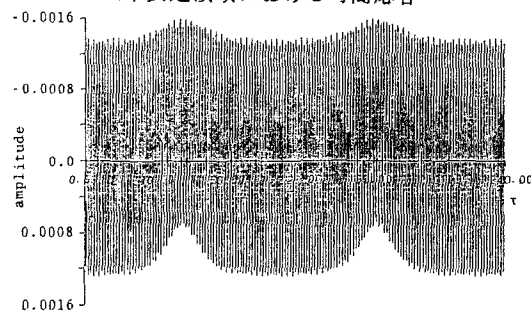
逆対称振動

図-10 安定領域における時間応答

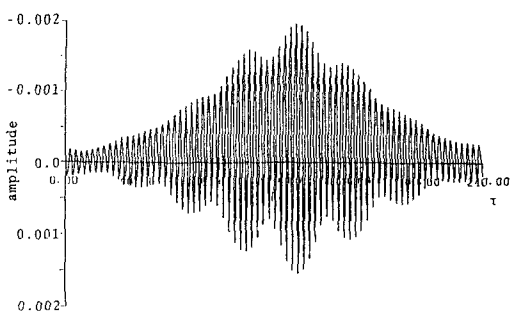
図-11 主不安定領域における時間応答



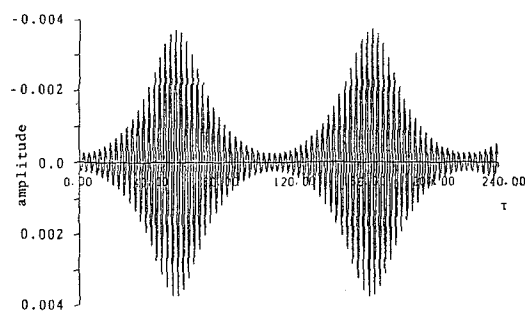
対称振動



対称振動



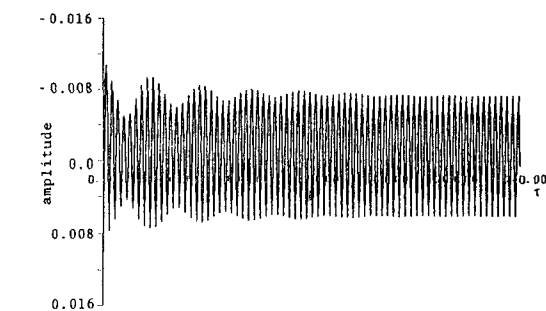
逆対称振動



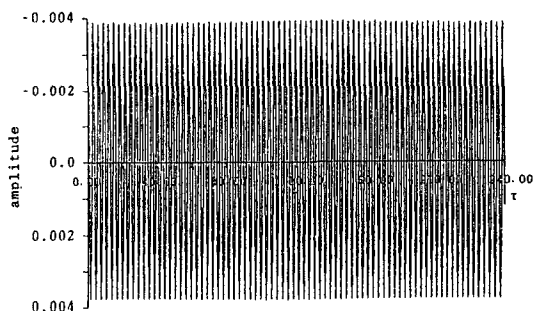
逆対称振動

図-12 副不安定領域における時間応答
($\gamma=0.03, \omega=1.88$)

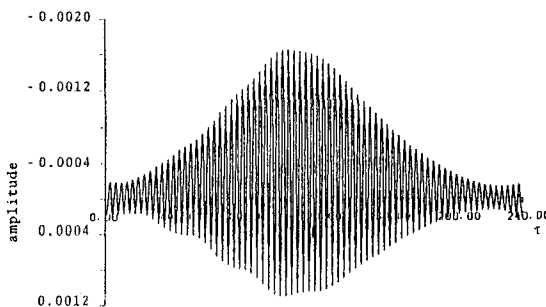
図-13 主不安定領域における時間応答
($\gamma=0.03, \omega=3.97$)



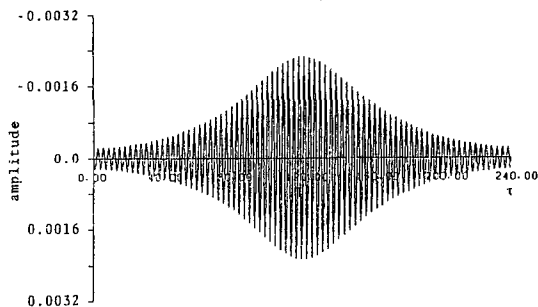
対称振動



対称振動



逆対称振動



逆対称振動

図-14 副不安定領域における時間応答

($\gamma=0.03, \omega=1.88$, 減衰力考慮)

図-15 副不安定領域における時間応答

($\gamma=0.001, \omega=2.05$)

スのサグ比では c_1 の項を通じて、逆対称振動から対称振動へのフィードバックが行われることを確認している。

図-15に $\gamma=0.001$ の弦にきわめて近いケーブルの副不安定領域の時間応答を示す。弦では、対称から逆対称振動へ、逆対称振動から対称振動に影響を及ぼす連成項が小さいので、不安定振動は生じるが両者の干渉は見受けられない。以上のように、対称加振のもとに生ずる対称と逆対称振動の間の連成応答は、係数励振振動の不安定領域において生じ、特定のサグ比の領域では、両者にエルゴード性が強く現われることがわかる。ケーブル固有の力学特性を反映した現象と言える。

7. まとめ

本研究は、水平ケーブルの対称加振による逆対称振動の発生問題を分岐応答(係数励振振動問題)としてとらえ、その発生領域に言及し、不安定領域内での対称・逆対称連成応答を明らかにした。本研究で明らかになったことをまとめると、次のとおりである。

- (1) 対称加振による逆対称応答は、ケーブルの非線形連成項を介して特定の振動数領域で分岐的に生じる。この逆対称振動の応答が成長すると、対称振動に含まれる逆対称振動の非線形項を介して対称振動に影響を及ぼす。これらの連成効果を表わす係数項は、ケーブルのサグ比によって著しく異なり、ケーブルにおいては、連成項が大きいサグ比の領域が存在する。
- (2) 不安定領域内では逆対称振動が成長するが、幾何学的非線形項によって応答は有限な大きさとなる。連成が効くようなサグ比のケーブルでは、逆対称振動と対称振動間の連成は強く、両者の間に干渉減少現象(エルゴード性)が見受けられる。

本研究は、文献12)の「ケーブルの面内非線形振動とモードのエルゴード性」を係数励振振動の不安定領域内の連成応答とみなして解析し、2,3の考察を加えたものである。本研究のきっかけを与えて下さり、また、常々振動現象の解明に興味深いアプローチと結果を示されている東京大学総合試験所の藤野陽三助教授に感

謝致します。最後に、本研究の数値計算にあたっては、長崎大学総合情報処理センターの電子計算機 FACOM M-760/30を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) Irvine, H. M.: Cable Structures, The MIT Press, 1981
- 2) 山口・伊藤: 単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文集, 第286号, pp.29~36, 1979
- 3) Yamaguchi, H. and Fujino, Y.: Modal Damping of Flexural Oscillation in Suspended Cables, Proc. of JSCE, No.386/I-8, pp.197~205
- 4) 山口・宮田・伊藤: 正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析, 土木学会論文報告集, 第308号, pp.37~45, 1981
- 5) 高橋・藤本・村中・田川: 調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析, 土木学会論文報告集, 第338号, pp.59~68, 1983
- 6) 山口・宮田・伊藤: ケーブル系の非線形動的応答における一挙動, 第24回構造工学シンポジウム論文集, pp.55~61, 1978
- 7) 高橋・田川・佐藤: ケーブルの面外不安定振動, 土木学会論文集, 第350号/I-2, pp.355~358, 1984
- 8) 高橋・白石・麻生・小西: 面内加振を受けるケーブルの面外分岐応答, 構造工学論文集, Vol.35A, 1989
- 9) Benedettini, F. and Rega G.: Regular and Chaotic Dynamics of Suspended Cables under Harmonic Excitation, XVIIth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Grenoble, France, 1988
- 10) 前田・前田・越後: 斜張橋のシステムダンピングに関する2,3の考察, 土木学会論文報告集, 第333号, pp.35~45, 1983
- 11) 樋口: 斜張橋ケーブルのRain Vibration, 日本風工学学会誌, 第27号, 1986
- 12) 藤野・大島・Phoonsak, P.・山口: ケーブルの面内非線形振動とモードのエルゴード性, 土木学会第43回年次学術講演会講演概要集, 第I部, pp.882~883. 1988
- 13) 高橋・田川・池田: ケーブルの面内非線形分岐応答解析, 土木学会論文集, 第344号, pp.333~340, 1984
(1989年10月2日受理)