

調和加振される剛体とフーチングの定常振動

PERIODIC RESPONSE OF A RIGID BLOCK RESTED ON FOOTING TO HARMONIC EXCITATION

松井 邦人^{*}, 井浦 雅司^{**}, 佐々木 利視^{***}, 小坂 郁^{****}

by Kunihiro MATSUI, Masashi IURA, Toshimi SASAKI and Iku KOSAKA

The problem of response of a rigid block rested on a footing and subjected to harmonic excitation is considered. The non-linear governing equations of motion are derived, which turn out to be linear in each slip and stick phase. Hence they can be solved by a closed form in each phase.

It is found that a periodic response consists of three modes; stick-stick mode, slip-stick mode and slip-slip mode. The conditions that generate these modes are theoretically derived and graphically presented. Also a magnitude of relative displacement of rigid body with respect to footing is examined.

1. はじめに

フーチング上の剛体の運動を解明することは、地震時にフーチング上に接地された構造物の移動量を推定するだけでなく、上部構造の免震の意味からも重要なことである。基礎と上部構造の間に滑動を許すメカニズムを導入することにより、破壊的地震が上部構造に与える影響を緩和したり、あるいはほぼ完全に排除しようとするものである。この方法として数多くの提案がなされている。その1つはフレキシブル・ファースト・ストーリー^{1), 2)}とする考えである。しかし不安定性やP- Δ 効果のため、実用的でないといわれている。基礎と上部構造の間にローラーやボールベアリングを挿入することも考えられたが、実用化に至っていない。近年鋼板と硬質ゴムの互層構造から成る免震装置が開発され、実用化も開始されている。この様な免震機構が持つ1つの問題は、加振力の卓越周期が構造物の固有周期と近づくような場合である。しかし、滑動機構が加わることで共振を避けることができるであろう。

本研究の目標は、フーチングとその上に設置された剛体が調和加振を受けるとき、その構造モデルの定常振動特性を解明することである。加振力が小さい間は、剛体とフーチングは一体となり振動し、加振力が大きくなると、剛体はフーチングとの間の摩擦力に抵抗する形で滑動する。剛体を受ける慣性力は、剛体とフ

* Ph.D 東京電機大学 教授 理工学部建設工学科 (〒101 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 工博 東京電機大学 助教授 理工学部建設工学科 (同上)

*** 東京電機大学 講師 理工学部建設工学科 (同上)

**** 東京電機大学 大学院 理工学部建設工学専攻 (同上)

ーチングとの間の摩擦係数で調整可能である。

従来の研究は、剛な基礎上に設置された剛体の滑動を扱うもの、^{3), 4)} 剛な基礎上に2つの剛体をバネとダンパーで連結した1自由度振動子を設置したモデルを用いて定常振動特性を解明など、^{3), 5)} また同様のモデルに地震波を入力したもの⁶⁾ がある。

本研究では、フーチングがバネとダンパーで支持された1自由度系と考えている。その上に設置された剛体が調和加振力を受けるとき、剛体の運動に着目すると3種類の状態がある。即ち、i) フーチングと常に一体化して振動するとき (stick-stick モード), ii) フーチングとの一体振動と滑動が起こるとき (slip-stick モード), iii) 常に滑動するとき (slip-slip モード)。本研究では、理論的にこのような状態が発現する条件を誘導し、さらに定常状態における剛体のフーチングに対する相対変位を求めている。

類似したモデルを用いた研究としてLinとTadjbakhsh⁷⁾ 及びLiaw等⁸⁾ の研究があるが、これ等は加振力の鉛直成分を考慮し、その影響を調べたもので数値解析を行っており、加振力の鉛直成分がかなり滑動に寄与すると述べている。本研究では、ここで設定したモデルの調和外力による振動の基本特性を調べるのが目的であるので、鉛直成分を考慮していない。

2. 滑動モデルと一般解

本研究で使用しているモデルは図-1に示すように、質量 m_1 と m_2 の2つの剛体となり、剛体①はばね(ばね定数 k)とダンパー(減衰係数 c)で支持されている。剛体①と剛体②の接触面では、せん断力が $m_2 \mu g$ を越えると、剛体②は剛体①の上を滑動する。滑動が起こらないとき、剛体①と剛体②は一体となり、質量 $m_0 = m_1 + m_2$ 、減衰係数 c 、ばね定数 k 、の1自由度系として振動する。滑動時には、質量 m_2 は、質量 m_1 の運動とは無関係に、大きさ一定のクーロン摩擦係数に抵抗して滑動する。動的摩擦係数と静的摩擦係数を等しいと仮定すると、非滑動時と滑動時の運動方程式は次のように書くことが出来る。

非滑動時

$$\ddot{u} + 2h_0 \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = -a_0 \sin \omega t \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}, \quad h_0 = \frac{c}{2\sqrt{k m_0}}, \quad \gamma^2 = \frac{m_1}{m_0}$$

$$m_0 = m_1 + m_2$$

$$\text{非滑動条件: } |\ddot{u} + a_0 \sin \omega t| \leq \mu g \quad (2)$$

滑動時

$$\text{剛体①: } \ddot{u} + 2h_1 \omega_1 \dot{u} + \omega_1^2 u = -a_0 \sin \omega t - \mu g \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \quad (3)$$

$$\text{剛体②: } \ddot{x} - \mu g \cdot \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) = 0 \quad (4)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \frac{\omega_0}{\gamma}, \quad h_1 = \frac{c}{2\sqrt{k m_1}} = \frac{h_0}{\gamma}$$

$$y(t) = u(t) - \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega t$$

$$\text{滑動開始条件: } |\ddot{x}(t)| = |\ddot{u}(t) + a_0 \sin \omega t| \geq \mu g \quad (5)$$

$$\text{滑動停止条件: } \dot{x} = \dot{y} \quad (6)$$

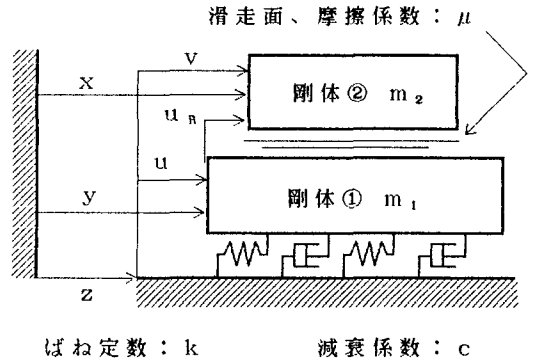


図-1 解析モデル

今、式(1)の初期値を $t = t_0$ の変位 $u(t_0)$ 及び速度 $\dot{u}(t_0)$ とすると、

一般解は

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = A_{st}(t-t_0) \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{pmatrix} + B_{st}(t-t_0) \quad (7)$$

ただし、 $\tau = t - t_0$ において

$$A s t(\tau) = e^{-h_0 \omega_0 \tau} \left(\begin{array}{cc} \frac{h_0}{\sqrt{1-h_0^2}} \sin \omega'_0 \tau & \frac{1}{\omega'_0} \sin \omega'_0 \tau \\ + \sin \omega'_0 \tau & \\ - \frac{\omega_0}{\sqrt{1-h_0^2}} \sin \omega'_0 \tau & - \frac{h_0}{\sqrt{1-h_0^2}} \sin \omega'_0 \tau \\ & + \cos \omega'_0 \tau \end{array} \right) \quad (8)$$

$$B s t(\tau) = \left(\begin{array}{l} e^{-h_0 \omega_0 \tau} \left\{ -b \left(\frac{h_0}{\sqrt{1-h_0^2}} \sin \omega'_0 \tau + \cos \omega'_0 \tau \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{a \omega}{\omega'_0} \sin \omega'_0 \tau \right\} + a \sin \omega \tau + b \cos \omega \tau \\ e^{-h_0 \omega_0 \tau} \left\{ \frac{b \omega_0}{\sqrt{1-h_0^2}} \sin \omega'_0 \tau + a \omega \left(\frac{h_0}{\sqrt{1-h_0^2}} \sin \omega'_0 \tau - \cos \omega'_0 \tau \right) \right\} \\ \quad + a \omega \cos \omega \tau - b \omega \sin \omega \tau \end{array} \right) \quad (9)$$

$$a = - \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t_0 + 2 h_0 \omega_0 \omega \sin \omega t_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 h_0 \omega_0 \omega)^2} a_0 \quad (10)$$

$$b = - \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t_0 - 2 h_0 \omega_0 \omega \cos \omega t_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 h_0 \omega_0 \omega)^2} a_0 \quad (11)$$

式(4)の初期値を $t = t_0^*$ で $x(t_0^*)$, $\dot{x}(t_0^*)$ とすると、一般解は $\tau = t - t_0^*$ において

$$x(t) = x(t_0^*) + \dot{x}(t_0^*) \tau \frac{1}{2} + \mu g \cdot \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \tau^2 \quad (12)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_0^*) + \mu g \cdot \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \tau \quad (13)$$

式(3)の初期値を $t = t_0^*$, $u(t_0^*)$, $\dot{u}(t_0^*)$ とすると、一般解は

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = A_{s1}(t - t_0^*) \begin{pmatrix} u(t_0^*) \\ \dot{u}(t_0^*) \end{pmatrix} + B_{s1}(t - t_0^*) \quad (14)$$

ただし、 $\tau = t - t_0^*$ とおくと

$$A s l(\tau) = e^{-h_1 \omega_1 \tau} \left(\begin{array}{cc} \frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin \omega'_1 \tau & \frac{1}{\omega'_1} \sin \omega'_1 \tau \\ + \cos \omega'_1 \tau & \\ - \frac{\omega_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin \omega'_1 \tau & - \frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin \omega'_1 \tau \\ & + \cos \omega'_1 \tau \end{array} \right) \quad (15)$$

$$B_{sl}(\tau) = \left(e^{-h_1 \omega_1 \tau} \left[- \left(\frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin \omega'_1 \tau + \cos \omega'_1 \tau \right) (b' + d) - \frac{a' \omega}{\omega'_1} \sin \omega'_1 \tau \right] + a' \sin \omega \tau + b' \cos \omega \tau + d \right. \\ \left. e^{-h_1 \omega_1 \tau} \left[\frac{\omega_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin \omega'_1 \tau (b' + d) + a' \omega \left\{ \frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin \omega'_1 \tau - \cos \omega'_1 \tau \right\} \right] + a' \omega \cos \omega \tau - b' \omega \sin \omega \tau \right) \quad (16)$$

$$a' = - \frac{(\omega_1^2 - \omega^2) \cos \omega t_0 + 2 h_1 \omega_1 \omega \sin \omega t_0}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2 h_1 \omega_1 \omega)^2} a_0 \quad (17)$$

$$b' = - \frac{(\omega_1^2 - \omega^2) \sin \omega t_0 - 2 h_1 \omega_1 \omega \cos \omega t_0}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2 h_1 \omega_1 \omega)^2} a_0 \quad (18)$$

ただし

$$d = - \frac{\mu g}{\omega_1^2} \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x})$$

3. 滑動条件

図-1のモデルが $a_0 \sin \omega t$ の入力加速度を受けるとき剛体の定常振動には、前述のような3種類の振動モードが現れる。

- i) 周期の全域に亘り剛体とフーチングが一体運動 (stick-stick モード)
- ii) 1周期の中に滑動と非滑動が存在 (slip-stick モード)
- iii) 1周期の全域で滑動 (slip-slip モード)

滑動が起こるための条件は次のように求めることが出来る。今 t_0 から半周期離れた時刻 t_1 を考えると、

$t_1 - t_0 = \pi / \omega$ である。式(7)で $t = t_1$ と置く。周期性を考慮すると、

$$\begin{pmatrix} u(t_1) \\ \dot{u}(t_1) \end{pmatrix} = A_{st} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{pmatrix} + B_{st} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = - \begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{pmatrix} = - \left[A_{st} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) + I \right]^{-1} B_{st} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \quad (20)$$

式(8), (9)を式(20)に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \omega a \end{pmatrix} \quad (21)$$

$t = t_0$ の時、剛体②の絶対加速度は

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t_0) &= \ddot{y}(t_0) = \ddot{u}(t_0) + a_0 \sin \omega t \\ &= -2h_0 \omega_0 \dot{u}(t_0) - \omega_0^2 u(t_0) \\ &= -2h_0 \omega_0 \omega a - \omega_0^2 b \end{aligned} \quad (22)$$

式(10), (11)を式(22)に代入して整理すると

$$\ddot{x}(t_0) = a_0 \sqrt{\frac{1 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \sin(\omega t_0 - \theta) \quad (23)$$

ただし

$$\tan \theta = \frac{2h_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3}{(4h_0^2 - 1) \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) + 1} \quad (24)$$

滑動が起こるためには式(23)の絶対値の最大値が式(5)を満足すればよい。従って

$$\sin(\omega t_0 - \theta) = \pm 1$$

即ち

$$\begin{aligned} \omega t_0 - \theta &= n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ \therefore t_0 &= \frac{1}{\omega} \left(\theta + n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

それゆえ滑動の起こる条件は

$$a_0 \sqrt{\frac{1 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \geq \mu g \quad (26)$$

上式を書き直すと

$$\frac{a_0}{\mu g} \geq \sqrt{\frac{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad (27)$$

次に定常振動で周期の全域で滑動モード (slip-slip モード) となる条件を求める。

$t_1^* - t_0^* = \pi / \omega$ とおくと

$$\begin{pmatrix} u(t_1^*) \\ \dot{u}(t_1^*) \end{pmatrix} = A_{s1} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \begin{pmatrix} u(t_0^*) \\ \dot{u}(t_0^*) \end{pmatrix} + B_{s1} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = - \begin{pmatrix} u(t_0^*) \\ \dot{u}(t_0^*) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$u(t_1^*) = -u(t_0^*)$, $\dot{u}(t_1^*) = -\dot{u}(t_0^*)$ の関係を用いると、式(28)より

$$\begin{pmatrix} u(t_0^*) \\ \dot{u}(t_0^*) \end{pmatrix} = - \left[A_{s1} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) + I \right]^{-1} B_{s1} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \quad (29)$$

式(15), (16)を式(29)に代入し、展開すると

$$u(t_0^*) = b' + \frac{\sinh(h_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega}) + \frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}} \sin(\pi \frac{\omega_1}{\omega})}{\cosh(h_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega}) + \cos(\pi \frac{\omega_1}{\omega})} d \quad (30)$$

$$\dot{u}(t_0^*) = \omega a' - \frac{\frac{1}{\omega_1} \sin(\pi \frac{\omega_1}{\omega})}{\cosh(h_1 \pi \frac{\omega_1}{\omega}) + \cos(\pi \frac{\omega_1}{\omega})} \frac{d}{\omega_1^2} \quad (31)$$

ただし定常状態で常に滑動しているとする

$$|\ddot{x}(t_0^*)| = |\ddot{u}(t_0^*) + a_0 \sin \omega t_0^*| = |-2h_0 \omega_0 \dot{u}(t_0^*) - \omega_0^2 u(t_0^*)| \geq \mu g \quad (32)$$

を満足していなければならない。

式(30), (31)を式(32)に代入し $\omega_1 = \omega_0 / \gamma$, $h_1 = h_0 / \gamma$ の関係を用いて整理すると

$$\left| \frac{a_0}{\mu g} \alpha \sin(\omega t_0^* - \theta_0) + c_1 \right| \geq 1 \quad (33)$$

ただし

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\left\{ \frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{2h_0}{\gamma^2} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad (34)$$

$$c_1 = \frac{-h_0 \sin \psi - \sqrt{\gamma^2 - h_0^2} \sinh \phi}{\cosh \phi + \cos \psi} \frac{1 - \gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 - h_0^2}} \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \quad (35)$$

$$\phi = \left(\frac{\pi h_0}{\gamma^2} \right) \bigg/ \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (36)$$

$$\psi = \left(\frac{\pi \sqrt{\gamma^2 - h_0^2}}{\gamma^2} \right) \bigg/ \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (37)$$

$$\tan \theta_0 = \frac{2h_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3}{\frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{2h_0}{\gamma} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad (38)$$

一方剛体②の滑動に注目すると、その周期性より

$$\dot{x}(t_1^*) = -\dot{x}(t_0^*), \quad \text{ただし} \quad t_1^* - t_0^* = \frac{\pi}{\omega} \quad (39)$$

時刻 t_0^* 、 t_1^* で、滑動方向が変わるとその時フーチングの速度と一致する。

$$\dot{x}(t_0^*) = \dot{y}(t_0^*), \quad \dot{x}(t_1^*) = \dot{y}(t_1^*) \quad (40)$$

即ち

$$\dot{x}(t_0^*) = \dot{y}(t_0^*) = \dot{u}(t_0^*) - \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_0^* \quad (41)$$

であるから

$$\dot{x}(t_1^*) = \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \mu g(t_1^* - t_0^*) + \dot{u}(t_0^*) - \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_0^* \quad (42)$$

式(39)の周期性条件と式(41)、(42)を用いると

$$\dot{u}(t_0^*) = \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_0^* - \frac{1}{2} \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \mu g \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \quad (43)$$

さらに式(31)と式(43)より、

$$\frac{a_0}{\mu g} \sin(\omega t_0^* - \theta_1) = \beta c_2 \quad (44)$$

ただし

$$\beta = \sqrt{\frac{\{1 - \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2\}^2 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + \left(2h_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad (45)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \left(\pi + \frac{1 - \gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 - h_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{2 \sin \psi}{\cosh \phi + \cos \psi} \right) \quad (46)$$

$$\tan \theta_1 = - \frac{\frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{2h_0}{\gamma} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{2h_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3} \quad (47)$$

式(38)と式(47)より

$$\tan \theta_0 \cdot \tan \theta_1 = -1 \quad (48)$$

従ってslip-slip モードでは、剛体の運動とフーチングの振動の間に $\pi/2$ の位相のずれがある。即ち剛体の運動はフーチングの振動と比べ $\pi/2$ 遅れた運動モードを呈する。slip-slip モードが起こるのは式(44)の条件の下で式(33)を満足する領域である。この条件ではそのような領域を図示することは難しい。今、式(33)より

$$f = \frac{a_0}{\mu g} \alpha \sin(\omega t_0^* - \theta_0) + c_1 \quad (49)$$

と置く。

$$\therefore (f - c_1)^2 = \left(\frac{a_0}{\mu g} \right)^2 \alpha^2 \sin^2(\omega t_0^* - \theta_0) \quad (50)$$

式(44)より

$$\left(\frac{a_0}{\mu g} \right)^2 \sin^2(\omega t_0^* - \theta_1) = (\beta c_2)^2 \quad (51)$$

θ_0 と θ_1 の間に $\pi/2$ の位相差があるので

$$\sin^2(\omega t_0^* - \theta_1) = \cos^2(\omega t_0^* - \theta_0) \quad (52)$$

式(50), (51)より式(52)の関係をを用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_0}{\mu g}\right)^2 &= \beta^2 c_2^2 + \frac{1}{\alpha^2} (f - c_1)^2 \\ &= \frac{\{1 - \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\}^2 + (2h_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + (2h_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2} \{c_2^2 + \frac{1}{\gamma^4} (f - c_1)^2\} \end{aligned} \quad (53)$$

従ってslip-slipが起こる領域は

$$\therefore \frac{a_0}{\mu g} \geq \sqrt{\frac{\{1 - \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\}^2 + (2h_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2}{1 + (2h_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2} \{c_2^2 + \frac{1}{\gamma^4} (f - c_1)^2\}} \quad (54)$$

ただし

$$(f - c_1)^2 = \max \{ (1 - c_1)^2, (-1 - c_1)^2 \} \quad (55)$$

以上より次のような事が言える。

- i) 式(27)を満たさない時、剛体②は剛体①と一体となり振動する。
- ii) 式(27)を満足し、式(54)を満足しない領域では、剛体②はslip-stick モードとなる。
- iii) 式(54)を満足すると、剛体②はslip-slip モードとなる。

これらのモードは起こる領域は、減衰定数 h_0 と質量比 γ^2 により変化する。 $h_0=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ とし、また $\gamma^2=0.1, 0.3, 0.5, 0.9$ と選択し、結果を図-2 に示した。

滑動が起こる条件は γ^2 の値と無関係である。slip-slip モードは、 γ^2 の値が大きい程、即ちフーチングの基礎に比べて剛体②の質量が小さい程、起こりやすい。 ω/ω_0 が1より大きい、即ち外力の円振動数が非滑動時の固有振動数より大きくなると滑動が起こりにくくなる。 h_0 が小さい程、運動形態が変化する境界線の形状が複雑となっている。

4. 滑動量

図-1のような滑動機構を有する構造モデルの利点は、上部構造への加速度伝達率を低減することであるが、問題点は滑動量が大きくなりすぎる場合である。明かに滑動量は、入力加速度 a_0 、摩擦係数 μ 、質量比 γ^2 、減衰定数 h_0 、及び円振動比 ω/ω_0 等の影響を受ける。ここでは定常振動における剛体②の滑動量、即ち剛体②のフーチング(剛体①)に対する相対変位を計算し、滑動量に及ぼす因子について考察する。式(7)と式(14)より、 t_0^* を滑動開始時刻とし、 $u(t_0^* + \pi/\omega) = -u(t_0^*)$ 、 $\dot{u}(t_0^* + \pi/\omega) = -\dot{u}(t_0^*)$ を考慮すると、

$$\left\{ A_{st} \left(\frac{\pi}{\omega} - \tau \right) A_{sl}(\tau) + I \right\} \begin{Bmatrix} u(t_0^*) \\ \dot{u}(t_0^*) \end{Bmatrix} + \left\{ A_{st} \left(\frac{\pi}{\omega} - \tau \right) B_{sl}(\tau) + B_{st}(\tau) \right\} = 0 \quad (56)$$

ただし、 $\tau_1 = t_1^* - t_0^*$ であり、 t_1^* は滑動停止時刻である。

滑動開始条件より

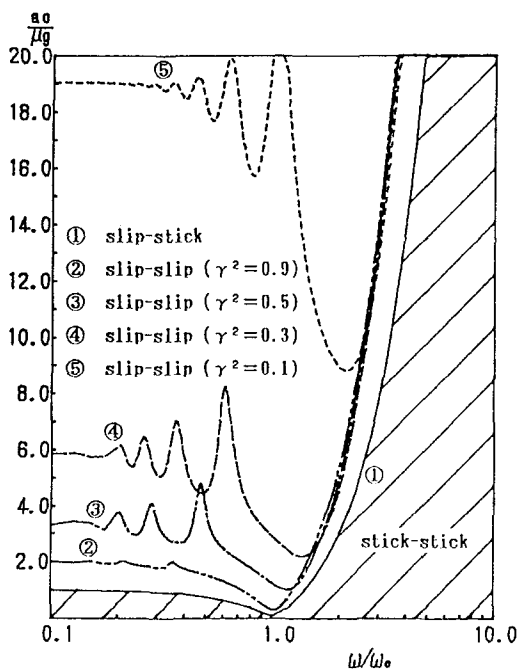
$$|-2h_0 \omega_0 \dot{u}(t_0^*) - \omega_0^2 u(t_0^*)| \geq \mu g \quad (57)$$

滑動停止条件は、

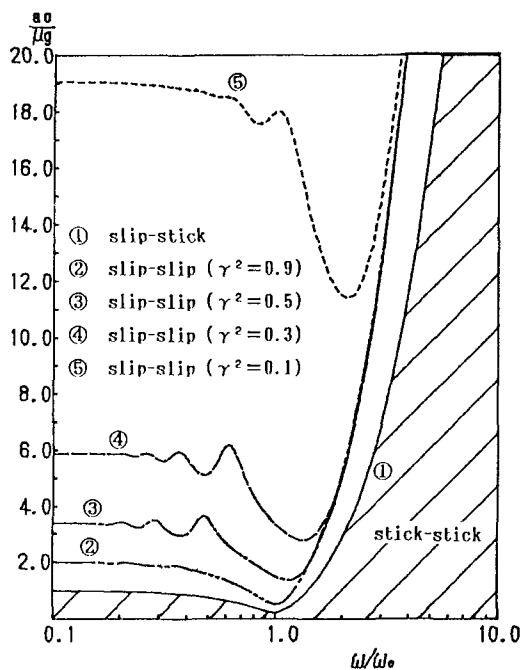
$$\dot{u}(t_0^*) - \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_0^* + \mu g \cdot \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \tau_1 = \dot{u}(t_1^*) - \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_1^* \quad (58)$$

更に滑動量は、 $u_R = x(t_0^* + \tau_1) - y(t_0^* + \tau_1)$ であり、式(59)より計算できる。

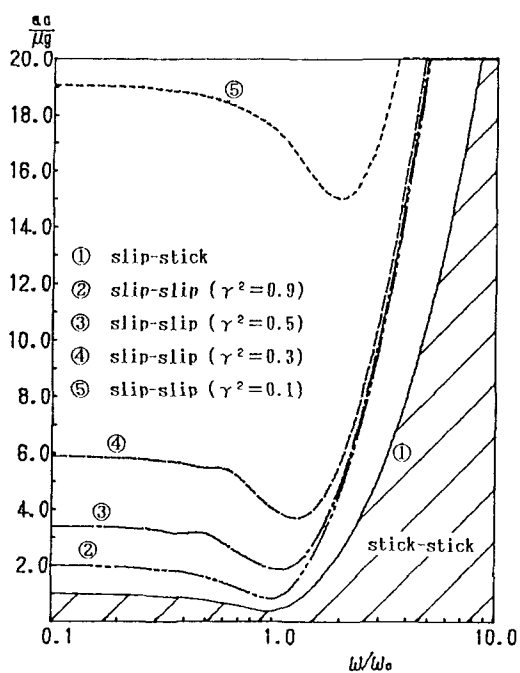
$$\begin{aligned} u_R &= \frac{1}{4} \text{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \mu g \cdot \tau_1^2 + \frac{1}{2} \{ \dot{u}(t_0^*) - \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_0^* \} \tau_1 \\ &\quad + \frac{a_0}{2\omega^2} \sin(\omega t_0^* + \pi) + \frac{a_0}{2\omega^2} \sin \omega t_1^* + \frac{1}{2} u(t_0^*) - \frac{1}{2} u(t_1^*) \end{aligned} \quad (59)$$



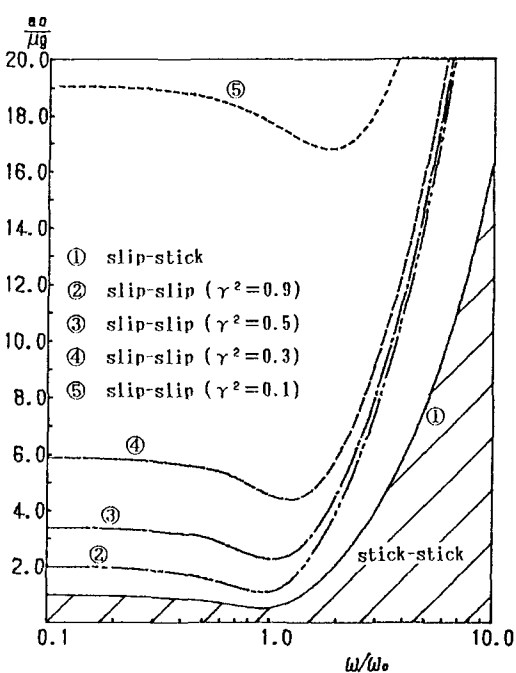
a) $h_n = 0.05$ の場合



b) $h_n = 0.1$ の場合



c) $h_n = 0.2$ の場合



d) $h_n = 0.3$ の場合

図-2 運動形態と $a_n / \mu g$ 及び ω / ω_n の関係

a) 剛体②がslip-slipモードのとき

剛体②がslip-slipモードを呈するとき、滑動開始時刻 t_{θ^*} において $|\dot{x}(t_{\theta^*})| \geq \mu g$ であるが、かならずしも式(57)の等号は成立しない。よって式(56), (58)により求めなければならない。いま式(56), (58)式に $\tau_1 = \pi/\omega$, $t_1^* = t_{\theta^*} + \pi/\omega$ を代入すると、式(56)は式(29)のように書くことができ、 $u(t_{\theta^*})$, $\dot{u}(t_{\theta^*})$ は、式(30), (31)のようになる。また式(58)は、式(44)と同様に表すことができる。よって式(30), (31)を式(59)に代入し、周期性 $u(t_{\theta^*}) = -u(t_{\theta^*} + \pi/\omega)$, $\dot{u}(t_{\theta^*}) = -\dot{u}(t_{\theta^*} + \pi/\omega)$ を考慮して解くと、式(59)は

$$\frac{\omega^2}{a_{\theta}} u_{\theta} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\pi^2 + 4) \{1 + (2h_{\theta} \frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2\}}{(1 - \gamma^2 (\frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2)^2 + (2h_{\theta} \frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2}} \sin(\omega t_{\theta^*} + \theta^*)$$

$$+ \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) \frac{\mu g}{a_{\theta}} \left\{ \frac{\pi^2}{4} - \frac{(\frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2 (1 - \gamma^2)}{\cosh \phi + \cos \psi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - h_{\theta}^2}} \left(-\frac{\pi}{2} + h_{\theta} \right) \sin \psi + \sinh \phi \right\} \right\} \quad (60)$$

$$\tan \theta^* = -\frac{\pi (1 - \gamma^2 (\frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2) + 2h_{\theta} \frac{\omega}{\omega_{\theta}} (2\pi h_{\theta} \frac{\omega}{\omega_{\theta}} - 2\gamma^2 (\frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2)}{2 (1 - \gamma^2 (\frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2) + 2h_{\theta} \frac{\omega}{\omega_{\theta}} (4h_{\theta} \frac{\omega}{\omega_{\theta}} + \pi \gamma^2 (\frac{\omega}{\omega_{\theta}})^2)} \quad (61)$$

また ϕ, ψ は式(37), (38)と同様であり、 ωt_{θ^*} は式(44)より求まる。

b) 剛体②がslip-stickモードのとき

剛体②がslip-stickモードを呈するときは、式(56), (57), (58)より t_{θ^*} , τ_1 , $u(t_{\theta^*})$, $\dot{u}(t_{\theta^*})$ を求めることができるが、式(56)が非常に複雑であるためslip-slipモードのように理論解を誘導することは不可能である。よって以下に数値解析ではあるが動的解析をすることなく解を求める計算手順を示す。

step1: τ_1 ($0 \leq \tau_1 \leq 2\pi/\omega$) を仮定する。

step2: 式(56)式より $u(t_{\theta^*})$, $\dot{u}(t_{\theta^*})$ を $\cos \omega t_{\theta^*}$, $\sin \omega t_{\theta^*}$ の関数として表す。

step3: 式(57)で等号が成立するとして、step2の結果を代入して、 $\cos \omega t_{\theta^*}$, $\sin \omega t_{\theta^*}$ の方程式で表す。

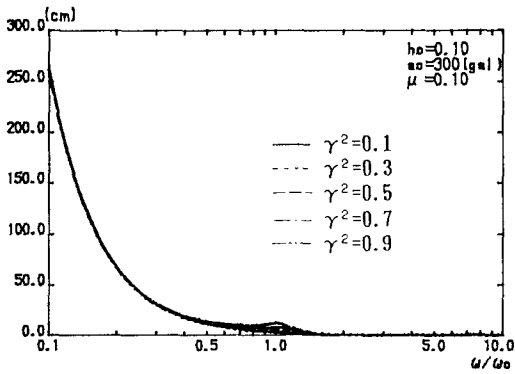
step4: step2の結果を式(58)に代入して、式(58)を $\cos \omega t_{\theta^*}$, $\sin \omega t_{\theta^*}$ の方程式で表す。

step5: steps3, 4の連立方程式を解いて $\cos \omega t_{\theta^*}$, $\sin \omega t_{\theta^*}$ を求める。

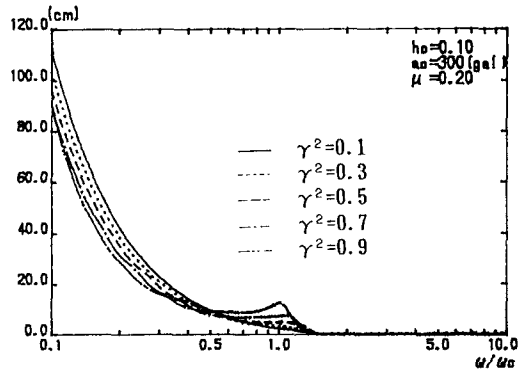
step6: $\cos^2 \omega t_{\theta^*} + \sin^2 \omega t_{\theta^*} = 1$ を満たすならば、式(56)より $u(t_{\theta^*})$, $\dot{u}(t_{\theta^*})$ を、式(14)より $u(t_1^*)$, $u(t_1^*)$ を求め、式(59)より相対変位 u_{θ} を求める。そうでなければ、step1にもどる。

c) 解析結果

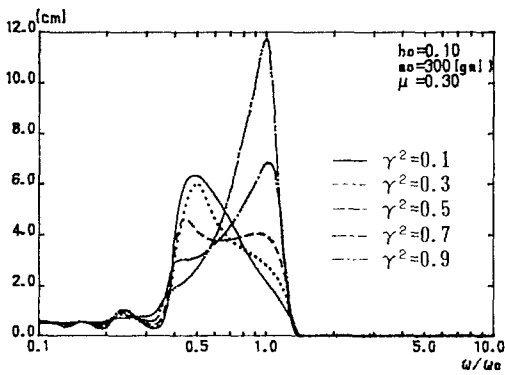
$a_{\theta} = 300g$, $h_{\theta} = 0.1$ と固定し、 $\mu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ について、 $\gamma^2 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ をパラメータとして滑動量を計算し、その結果を図-3に示す。 $\mu = 0.1$ のとき、 γ^2 の値のいかんに関わらず、 ω/ω_{θ} の値が同じ時、滑動量もほぼ同じである。 $\mu = 0.2$ のとき、 γ^2 の値のいかんに関わらず、滑動量は ω/ω_{θ} が小さいほど大きい。 γ^2 が大きくなるにつれ $\omega/\omega_{\theta} = 0.1$ の付近では滑動量はやや減少し、 $\omega/\omega_{\theta} = 1.0$ の付近で僅かに増加する傾向が見られる。 $\mu = 0.3$ では、 $\omega/\omega_{\theta} = 0.5$ より小さい範囲で急速に減少。 γ^2 が大きくなるにつれ、滑動量のピークは、 $\omega/\omega_{\theta} = 1.0$ の近くに移動する。 $\mu = 0.4$ のとき、傾向はほぼ $\mu = 0.3$ のときと同じであるが、滑動が生じる ω/ω_{θ} の範囲が狭くなっており、剛体①と②が一体となり振動する傾向が強くなっている。 μ の値が小さいほど、滑動量は大きい、 $\mu = 0.3$ と $\mu = 0.4$ では滑動量の最大値はほぼ同じである。 $\mu = 0.2$ と $\mu = 0.3$ の間で滑動量のモードが急変している。この間で μ を0.22, 0.24, 0.26, 0.28と変え、 $a_{\theta} = 300g$, $h_{\theta} = 0.1$ として、 $\gamma^2 = 0.1$ と0.9の場合について、計算した結果を図-4に示した。 $\mu = 0.2$ 以下では、剛体①と②が全く別個の物体として振動し、また $\mu = 0.3$ より大きくなると剛体①と②が一体となって振動する傾向が強い。 $\mu = 0.2$ と $\mu = 0.3$ の間は頂度その過渡現象を呈している。



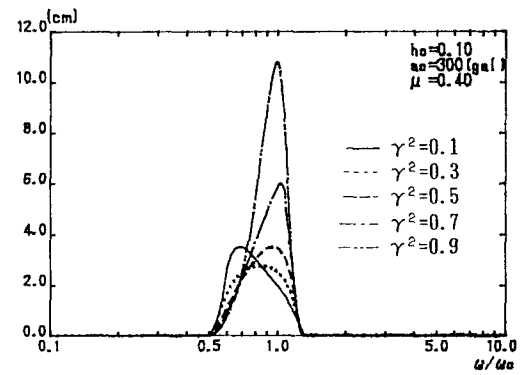
a) $\mu=0.1$ の場合



b) $\mu=0.2$ の場合

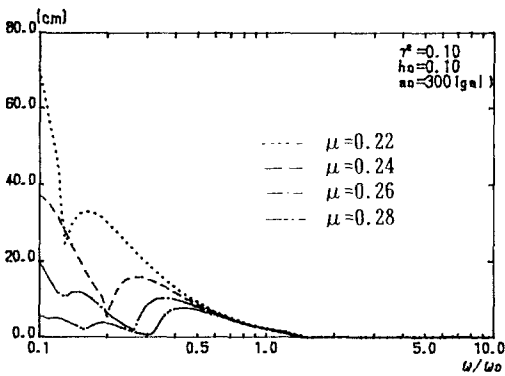


c) $\mu=0.3$ の場合

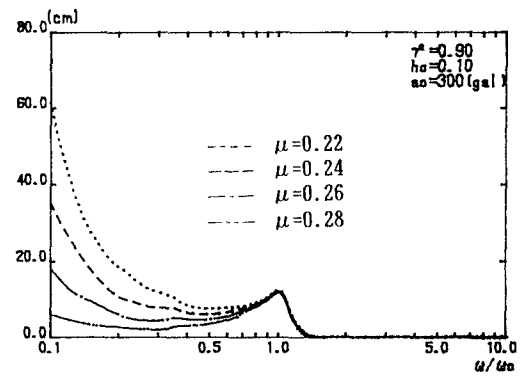


d) $\mu=0.4$ の場合

図-3 剛体②の滑動量



a) $\gamma^2=0.1$ の場合



b) $\gamma^2=0.9$ の場合

図-4 $\mu=0.2$ から $\mu=0.3$ における剛体②の滑動量

5. まとめ

ばねとダンパーで支持されたフーチング（剛体①）とその上に設置された物体（剛体②）からなる構造モデルの滑動を伴う定常振動を解析した。このようなモデルの振動様相は、i) 常に剛体①と剛体②が一体となり振動するモード（stick-stick モード）、ii) 振動周期で部分的に滑動が起こるモード（slip-stick モード）iii) 常に滑動が起こるモード（slip-slip モード）、がある。解析的にこれらのモードが発現する条件を誘導した。更に剛体②の滑動量を解析的に求めた。以上の結果から次のような事が言える。

滑動条件

1. 滑動が起こる条件は、 γ^2 の値と無関係である。
2. 滑動は、 ω/ω_0 が1より大きくなると、急速に起こり難くなる。
3. γ^2 の値が大きいほど、slip-slip モードが起こりやすい。
4. h_0 が小さい程、運動様相が変化する境界線の形状が複雑となる。

滑動量

5. μ の値が小さい程、滑動量は大きい。
6. μ の値が小さいとき、 ω/ω_0 の値が小さい程滑動量は大きい。
7. 摩擦による抵抗力が慣性力最大値と比べ十分に小さいとき、2個の剛体として運動する。抵抗力が慣性力より大きくなると、2個の剛体が一体化した振動モードに近づく。
8. μ が大きくなると γ^2 の値が小さい程、一体化の傾向が強くなる。
9. slip-slip モードでは剛体の運動は、フーチングの振動より位相が $\pi/2$ 遅れている。

6. 謝辞

本研究は、東京電機大学総合研究所から補助を受け行った。また本文作成にあたり、種々の協力をしてくれた東京電機大学建設工学科卒研究生、小川友行君と本井宏宣君に深く感謝致します。

参考文献

- 1) 武田寿一編：構造物の免震、防振、制振、技報堂出版、1988年5月
- 2) 大崎順彦監修、清水建設免震開発グループ編：わかりやすい免震建築、理工図書、1987年5月
- 3) Westermo,B. and Udwadia,F. : Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.11, pp.135-146,1983.
- 4) Younis,C.J. and Tadjbakhsh,I.G. : Response of sliding rigid structure to base excitation, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.110, No. 3, pp.417-432, March, 1984.
- 5) Mostaghel,N.,Hejazi,M. and Tabankuchi,J : Response of sliding structures to harmonic support motion, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.11, pp.355-366,1983.

- 6) Mostaghel, N. and Tanbakuchi, J. : Response of sliding structures to earthquake support motion, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 729-748, 1983.
- 7) Lin, C. J. and Tadjbakhsh, I. G. : Effect of vertical motion of friction-driven isolation systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, pp. 609-622, 1986.
- 8) Liauw, T. C., Tian, Q. L. and Cheung, Y. K. : Structures on sliding base subject to horizontal and Vertical Motions, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 114, No. 9, pp. 2119-2129, September, 1988.

(1989年10月2日受付)