

ダイナミック・プログラミングを適用した 風荷重を受ける構造物の最適制御

AN OPTIMAL CONTROL OF STRUCTURE DUE TO FLUCTUATING WIND FORCES
BY USING DYNAMIC PROGRAMMING

徳田紳二¹

川原睦人²

By Shinji TOKUDA and Mutsuto KAWAHARA

An optimal control technique which can be applied to the oscillation problems of structure due to wind forces is proposed in this paper. This method treats formulations of these techniques as the tracking, regulator and sub-tracking problem. The fluctuating wind forces are modelled by means of the spectral density function of Davenport. The dynamic programming is employed to determine the control forces in optimization. Several computations of optimal control for the structural model which has three degrees of freedom are carried out to show the applicability of the present method. To account for the distinct validity of optimal control technique based on sub-tracking problem the results obtained in here, are compared with the other techniques. Consequently it has been made clear that the optimal control technique based on sub-tracking problem is the most suitable manner to apply the practical oscillation problem.

1. はじめに

これまでの構造物では外力による破壊を免れるために、剛性構造物として設計されていた。ところが近年では、構造物の高層化、長大化、軽量化に伴い柔性構造物として設計がなされている。これによって構造物の振動という無視できない問題が表面化し、検討されてきている。そこで本論文ではその一解決策として、電気・電子工学の分野で発達してきた最適制御理論を適用し構造物の振動制御を試みるものである。

著者の一人は地震荷重を受ける構造物の最適制御として、ダイナミック・プログラミングによる手法を提案している¹⁾。また著者らはこれまでに風荷重を受ける構造物の最適制御として、共役勾配法 (Fletcher-Reeves) による手法を提案している²⁾。ここで共役勾配法では、繰り返し計算法であるため収束条件などにより膨大な計算時間を要したり、実際問題への拡張性に乏しいなどの問題点を有している。これに対して、ダイナミック・プログラミング³⁾は直接計算法を用いているため、繰り返し計算を必要とせず逐次制御力を決定することができる。そこで本論文では風荷重を受ける構造物の最適制御に対して、ダイナミック・プログラミングによる手法を提案する。

制御対象としては柔性構造物を3自由度系モデルとして扱い、比較的長時間加わる不規則風によって振動する場合を想定し、トラッキング、レギュレータ、サブ・トラッキング¹⁾の三種類の制御方式によって数値解析を行う。最後にそれらの特徴を示すとともにその手法の実際問題への適用性を明確にする。

¹中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻

〒112 東京都文京区春日 1-13-27

²中央大学理工学部土木工学科 教授

Tel 03(817)1815

ここで不規則風のモデル化に対しては Davenport のパワースペクトル密度関数^{4) 5)}を導入し 10 分間平均風速が 30m として与えるものとする。

2. 運動方程式

構造物に外力が作用する場合の運動方程式は、次式のように書き表すことができる。

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (1)$$

ここに、 m : 質量、 c : 粘性係数、 v : 変位、 EI : 剛性である。いま、風荷重による外力 $f(x, t)$ は抗力、揚力、回転モーメントから成るが、本論文では塔状の構造物を対象とするため、抗力のみを考慮し次式のように与える⁴⁾。

$$f(x, t) = g_1 W^2(x, t) + g_2 \dot{W}(x, t) \quad (2)$$

$$g_1 = \frac{1}{2} \rho_a C_d A, \quad g_2 = \frac{\pi}{4} \rho_a C_m A b$$

ここに、 ρ_a : 空気密度、 C_d : 抗力係数、 C_m : 仮想質量係数、 W : 風速、 A : 風向に直角方向の投影面積、 b : 風向に平行な断面幅である。また $\dot{}$ は時間方向の一階微分を表す。次に、風速 W は (3) 式のように、平均風速 $\bar{W}$ に変動風速成分 w が重ねられたものであるとすれば、今考えている外力 f は (4) 式のようになる。

$$W(x, t) = \bar{W}(x) + w(x, t) \quad (3)$$

$$f = g_1 W^2 + g_2 \dot{W} = g_1 (\bar{W} + w)^2 + g_2 \dot{w} \quad (4)$$

以上のことから、風荷重を受ける構造物の運動方程式は、制御力 u を考慮しマトリクス表示すれば、次式のようになる。

$$[M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = \{u\} + \{f\} \quad (5)$$

さらに、状態ベクトル $[v, \dot{v}]^T$ を用いれば下式のような状態方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \{u\} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \{f\} \quad (6)$$

ここで、 $X = [v, \dot{v}]^T$, $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$, $B = [0, M^{-1}]^T$, $F = B\{f\}$, とし、 U を制御位置をも考慮に入れた制御力とすれば (6) 式は (7) 式のように書き表すことができる。

$$\dot{X} = AX + BU + F \quad (7)$$

$$X_0 = 0 \quad (8)$$

以上のようにして得られた (7) 式の連続時間型の状態方程式を差分近似すれば、次式のよな離散時間型の状態方程式が得られる。

$$X(k+1) = A^*X(k) + B^*U(k) + C^*F(k) \quad (9)$$

$$X(0) = 0 \quad (10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

ここで、* はそれぞれ離散化による係数行列であることを意味し実際の計算に際しては、次のような展開式を用いた。

$$A^* = I + (Adt) + \frac{1}{2}(Adt)^2 + \cdots + \frac{1}{N!}(Adt)^N \quad (11)$$

$$B^* = dt\{I + \frac{1}{2!}(Adt) + \cdots + \frac{1}{(N+1)!}(Adt)^N\}B \quad (12)$$

$$C^* = dt\{I + \frac{1}{2!}(Adt) + \cdots + \frac{1}{(N+1)!}(Adt)^N\} \quad (13)$$

3. 変動風速成分

本論文では、ガストと呼ばれる高周波数範囲にエネルギーが分布する変動風速、いわゆる大気乱流の強風時におけるパワースペクトル密度関数に着目した。そして、平均流方向の変動風速のパワースペクトルを多くの実測データに基づいて得られた次式のような Davenport の経験式^{4) 5)} を用いるものとする。

$$S_w(\omega) = \frac{2k\phi^2 |\omega|}{\pi^2 [1 + (\phi\omega/\pi W_G)^2]^{4/3}} \quad (14)$$

$S_w(\omega)$ は周波数 ω の全範囲で定義されるものであり、 W_G は基準高さにおける基準風速、 k は基準高さで定義した表面摩擦係数 (0.001 ~ 0.04)、 ϕ はスケールを表す量で、Davenport は $\phi = 600m$ 、基準高さを $10m$ としている。

本論文ではこのパワースペクトル密度関数を導入することで平均流方向の変動風速成分を次式のように与えるものとする。

$$w(t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n [2S_w(\omega_i)\Delta\omega]^{1/2} \cos(\omega_i t + \Phi_i) \quad (15)$$

ここに、 $\Delta\omega = \omega_u/n$ 、 $\omega_i = [i - 1/2]\Delta\omega$ 、 ω_u : 遮断周波数の上限、 Φ_i : 任意位相角で $[0, 2\pi]$ 内の一様乱数である。さらに、風速の鉛直分布に対しては次式のような、べき法則 (power law) に基づくものとする。

$$W_Z = W_G \left(\frac{Z}{Z_G}\right)^q \quad (16)$$

ここに、 Z_G : 基準高さ、 W_G : 基準高さでの風速、 Z : 高さ、 W_Z : 高さ Z での風速、 q : 地表条件による定数である。

4. 最適制御法

ここでは、最適制御理論に基づいて、ダイナミック・プログラミングの手法³⁾ に従い以下に示すような評価関数のもとに三種類の制御方式を導く。

4. 1. 評価関数

制御効果を示すものとして、次式の評価関数を用いる。

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \{X(k+1)^T Q X(k+1) + U(k)^T R U(k)\} \quad (17)$$

本論文では、状態量と制御力の自乗和からなるこの評価関数が最小となる状態を最適な状態であるとする。ここで、 Q, R は重み係数行列でありこれらの相対的な比率によって、変位と制御力の大きさが変化する。

本解析では I を単位行列とし $Q = qI$, $R = rI$ として計算を行う。また、いくつかの計算結果より変位および制御力の大きさが最も妥当と思われる $q = 1.0$, $r = 0.001$ を採用する。

4.2. トラッキング制御

(9) 式の状態方程式のもとで (17) 式の評価関数を最小にする制御力をダイナミック・プログラミングの手法に従って 0 段から $N - 1$ 段決定問題として定式化すると、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 U(N - n) = & -(R + B^*T W_{n-1} B^*)^{-1} B^*T \{ W_{n-1} A^* X(N - n) \\
 & + W_{n-1} C^* F(N - n) \\
 & + Y_{n-2} W_{n-2} C^* F(N - (n - 1)) \\
 & + Y_{n-2} Y_{n-3} W_{n-3} C^* F(N - (n - 2)) \\
 & + Y_{n-2} Y_{n-3} Y_{n-4} W_{n-4} C^* F(N - (n - 3)) \\
 & + Y_{n-2} Y_{n-3} Y_{n-4} Y_{n-5} W_{n-5} C^* F(N - (n - 4)) \\
 & \vdots \\
 & + Y_{n-2} Y_{n-3} \cdots Y_2 Y_1 Y_0 W_0 C^* F(N - 1) \} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$W_0 = Q$$

$$W_n = Q + A^{*T} W_{n-1} A^* - A^{*T} W_{n-1} B^* (R + B^{*T} W_{n-1} B^*)^{-1} B^{*T} W_{n-1} A^* \quad (19)$$

$$Y_n = A^{*T} - A^{*T} W_n B^* (R + B^{*T} W_n B^*)^{-1} B^{*T} \quad (20)$$

$$n = N, N - 1, \dots, 3, 2, 1$$

ここで、(19) 式は離散形リカッチ方程式と呼ばれるものである。また、(18) 式からわかるようにトラッキング制御では、第一番目の制御力を決定するために全時間の外力情報を必要とすることになる。

4.3. レギュレータ制御

レギュレータ制御では、状態量のためのフィードバック制御であるため、構造物の状態量のみによって制御機構を構成している。ここで (19) 式の離散型リカッチ方程式は一般に短い時間で定常値に収束し結果にさほど影響をおよぼさないの、この定常解 W_{ST} を用いれば、先の条件により (18) 式を次式のように書き換えることができる。

$$U(k) = -(R + B^{*T} W_{ST} B^*)^{-1} B^{*T} W_{ST} A^* X(k) \quad (21)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

このようにレギュレータ制御では、その時点での状態量がわかればその制御力を決定できることがわかる。

4.4. サブ・トラッキング制御

不規則風のデータが構造物に作用する時点よりも i 時間分だけ以前に、随時知ることが可能であるとする場合、(20) 式の W_n に W_{ST} を代入することで得られる行列 Y_{ST} を用いれば、(18) 式は下式のように書き換える

ことができる。このような式で示される制御力で制御する方式を、サブ・トラッキング制御¹⁾と呼ぶことにする。

$$\begin{aligned}
 U(k) = & -(R + B^*{}^T W_{ST} B^*)^{-1} B^*{}^T \{ W_{ST} A^* X(k) + W_{ST} C^* F(k) \\
 & + Y_{ST} W_{ST} C^* F(k+1) \\
 & + Y_{ST}^2 W_{ST} C^* F(k+2) \\
 & \vdots \\
 & + Y_{ST}^i W_{ST} C^* F(k+i) \} \quad (22) \\
 & k = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

5. 数値解析例

図-1 に計算に用いた 3 自由度系モデルを示す。ここでは水平断面が 3m 四方の正方形で高さが 30m の柔性構造物を想定した。ただし、剛性行列は、三連モーメントの定理に従うものとし構造物の諸元は表-1 に示すものを用いる。また、制御時間は 10 分間、微小時間増分量 (dt) を 0.1 秒とし、粘性は無視 ($c = 0.0$) するものとする。

表-1 : 構造物モデルに対する諸元

	L (cm)	A (cm ²)	EI (Kg・cm ²)	ρ_s (kg・s ² /cm ⁴)
①	1000.0	9.0×10^4	9.4×10^{12}	6.0×10^{-6}
②	1000.0	9.0×10^4	9.4×10^{12}	6.0×10^{-6}
③	1000.0	9.0×10^4	9.4×10^{12}	6.0×10^{-6}

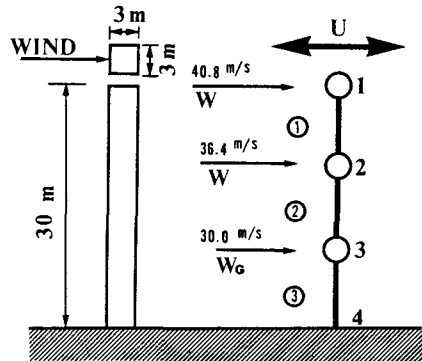


図-1 : 構造物モデル

また、変動風速成分に対する諸元は以下のものを用いる。

$$\begin{aligned}
 \rho_a &= 1.221 \times 10^{-9} (\text{kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}^4), \quad C_d = 1.2, \quad C_m = 0.5, \quad b = 3.0 (\text{m}), \quad q = 0.28, \quad k = 0.005, \\
 \phi &= 600.0 (\text{m}), \quad \omega = 40.0 (\text{rad/s}), \quad n = 10000, \quad \bar{W} = W_G = 30.0 (\text{m/s})
 \end{aligned}$$

以上の条件をもとにトラッキング、レギュレータ、およびサブ・トラッキングのそれぞれの手法によって解析を行う。ここで、サブ・トラッキング制御においては 0.2 秒（データ数 2 個）以前の外力情報を得ることができるものとする。

6. 解析結果

解析結果を図-2 ~ 図-5 および表-2 に示す。ここで図の鉛直軸正方向は、平均風速方向を意味する。ここで図-5 のサブ・トラッキング制御では、制御力が全体的に負側にシフトしている。これはサブ・トラッキング制御の「 i 時間分だけ以前の外力情報を用いて制御力を決定する。」という特徴によるものである。すなわち、平均風速は正方向でありこれを補う方向つまり負の方向の制御力を決定しており、先の特徴を顕著に表している。なお個々の解析結果については次節で述べることにする。

表-2

	最大変位 (cm) (絶対値)	変位の標準偏差	最大制御力 (kgf) (絶対値)	制御力の標準偏差
制御しない場合	30.24	10.84	-	-
トラッキング制御	9.89	1.94	243.51	90.32
レギュレータ制御	9.69	2.37	408.05	139.60
サブ・トラッキング制御	9.72	2.31	487.89	141.81

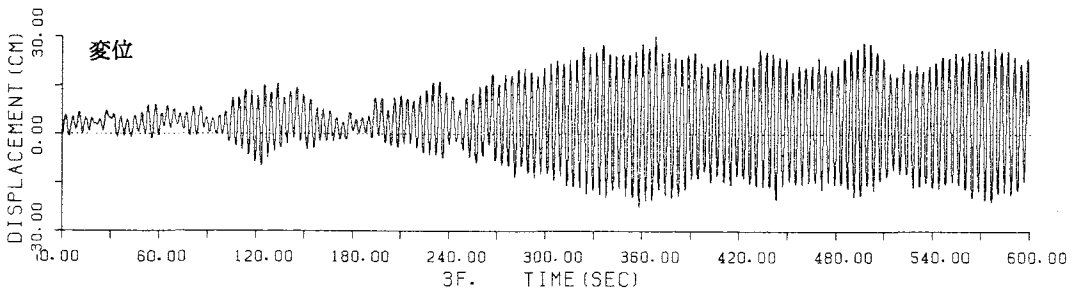


図-2：制御を行わない場合の変位

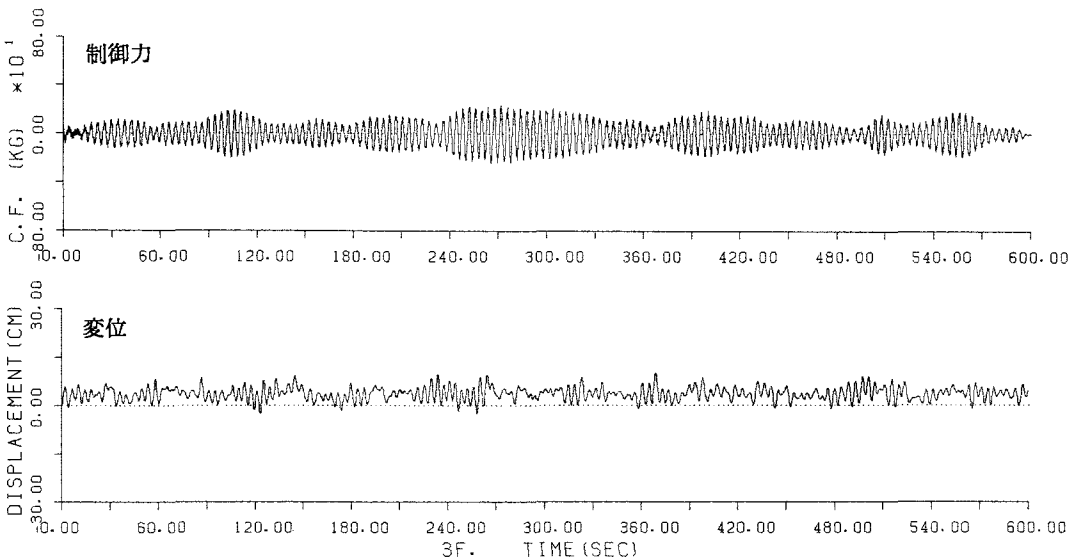


図-3：トラッキング制御による制御力、および変位

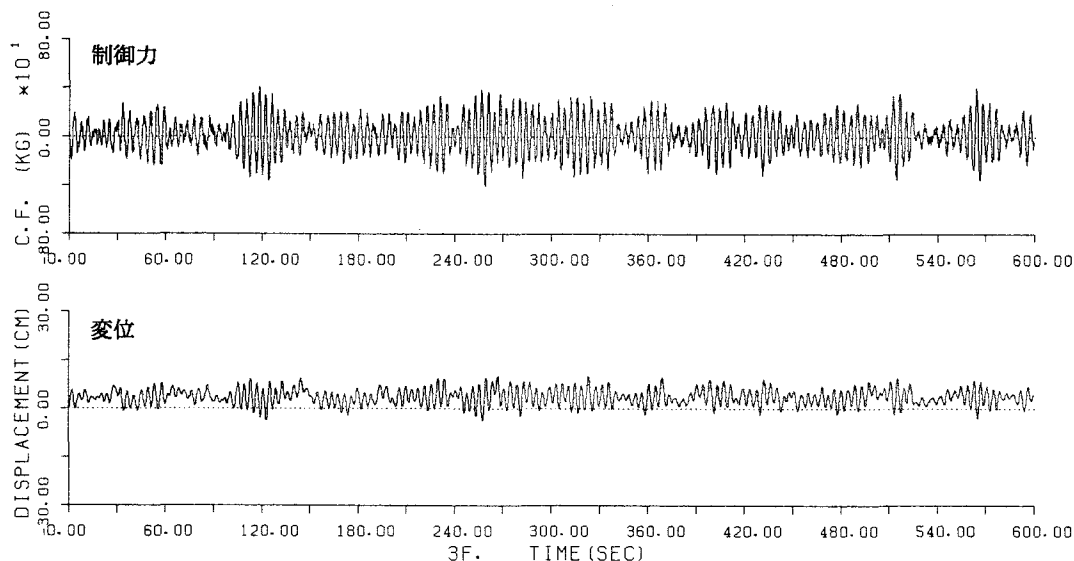


図-4：レギュレータ制御による制御力、および変位

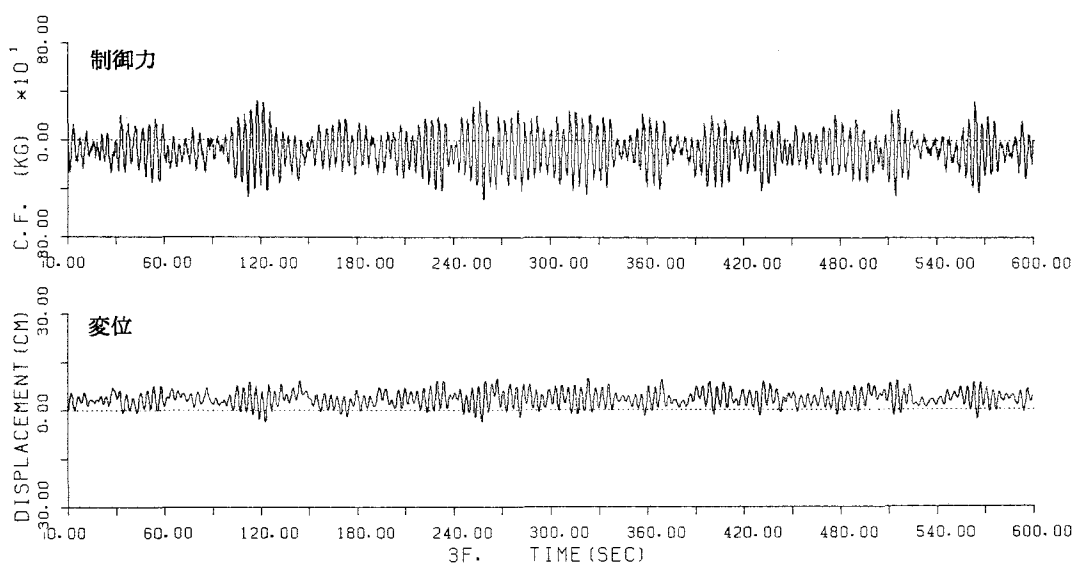


図-5：サブ・トラッキング制御による制御力、および変位

7. おわりに

風荷重を受ける構造物の最適制御に対して、ダイナミック・プログラミングに基づいたサブ・トラッキング制御手法を提案した。さらに、3自由度系モデルを用いた振動制御問題においてトラッキング、レギュレータ制御手法との比較を行った。その結果、以下の事実が明らかになった。

1. トラッキング制御では三種類の手法の中で最も良好な結果が得られた。しかしこの手法は、作用する外力の情報が予め全時間にわたって、既知である必要がある。したがって、実際問題に直接適用することは困難であると考えられる。
2. レギュレータ制御ではトラッキング制御に次いで良好な結果が得られた。しかしこの手法は、その時点での状態量によって全く同じ時点での制御力を決定するものである。したがって、実際問題に対してはトラッキング制御と同様の問題点を有しているものと考えられる。
3. サブ・トラッキング制御では変位に関しては他の手法と同等の結果を得ることができた。制御力に関してはその性質上、負側にシフトしており他の手法に比べ制御力の絶対値が大きくなることが確認された。しかしながら、この手法は対象とする構造物付近にセンサー等を設置することで、ほんの少し（ i 時間）以前の外力情報を得ることができれば、その時間での制御力を逐次決定することができる。したがって、実際問題に対して最も有効な手法であるといえる。

以上のことから、過去に記録されている不規則風のデータ（すなわち全時間における外力が既知である）等に対する構造物の振動特性あるいは、制御性能を把握する場合においては、トラッキング、レギュレータ制御手法は十分有効であると考えられる。しかしながら一般に未知である不規則風を扱いその時点での最適制御力を決定する場合には、サブ・トラッキング制御手法が実用上最も有効であると考えられる。

今後は、サブ・トラッキング制御をベースにし、外力情報に対する推定、制御機構のノイズに対する影響、および時間遅れの問題などについての検討をおこなって行きたいと考えている。

参考文献

- 1) 深沢 恵志、川原 陸人：ダイナミック・プログラミングを用いた構造物の最適制御、第二回計算力学シンポジウム報文集、1988, pp. 49-54
- 2) 徳田 紳二、川原 陸人：風荷重を受ける構造物の最適制御、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第13巻、pp. 419-424
- 3) 辻 節三：最適制御概論、養賢堂
- 4) Davenport, A.G., "The Application of Statistical Concepts to Wind Loading of Structures", Proc. Inst. of Civil Engineers, Vol.19, 1961, pp. 449-472
- 5) 岡内功、伊藤学、宮田利雄：耐風構造、丸善

(1989年10月2日受付)