

幾何学的非線形性を考慮したトラス構造の最適設計

OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURES IN CONSIDERATION OF
GEOMETRICAL NONLINEARITY

小林一郎*・三池亮次**・山田善一***

by Ichiro KOBAYASHI, Ryoji MIIKE and Yoshikazu YAMADA

In the optimal design of suspension bridges and long-span arch type bridges, two nonlinearities must be considered : nonlinear structural analysis and nonlinear optimization. This paper aims to overcome these difficulties and also to reduce the computational time. First, a matrix load-displacement equation is shown for the finite deformation analysis of pin-jointed trusses on the basis of the virtual large displacement theorem. Second, a two-level optimization method is introduced. The allowable stress is maximized in the element-level optimization subjected to the equality constraint of constant volume of any member. In the structure-level optimization the total weight of structure is minimized subjected to the equality constraints of load-displacement equation. The proposed method is applied to the optimization of geometrically nonlinear braced-arches.

1. はじめに

吊橋や長大なアーチ系橋梁の最適設計を行う際には、有限変位を考慮した設計をする必要がある。このとき、非線形構造解析と非線形最適設計という2重の非線形解析が必要であり、全域解に到達するまで、交互に収束計算を繰り返すこととなる。

本研究は上記の2重の非線形計算の複雑なアルゴリズムを避け、計算時間の短縮を図るため、部材の断面積 A のほかに増分変位 Δd を設計変数とし、荷重増分後の釣り合い条件を等号制約式に組み入れる最適設計法を提案するものである。2. において本研究で用いる有限変位仮想仕事の定理による幾何学的非線形構造解析の基礎式の概要を示し、トラス構造の有限変位解析の増分形の基礎式の定式化を行う。3. においては、トラス構造の有限変位最小重量設計問題の定式化を行う。その際、不等号制約条件として部材の応力制限と細長比制限を、等号制約条件としては上記の釣り合い式を用いる。また、部材の許容応力度および細長比の値を正確に算出するためには、部材の板厚、部材幅といった部材レベルの断面決定も同時に行う必要がある。しかし、幾何学的非線形解析において必要な設計変数は部材剛性を規定している断面積のみであり、すべての設計変数を同レベルに扱うのは計算効率の面からも適当でない。したがって、ここでは2段階最適設計法を採用する。4. では13部材および41部材トラスについての適用計算例を示す。

- | | | | | |
|-----|----|---------|------------|-------------------|
| * | 工博 | 熊本大学助教授 | 工学部土木環境工学科 | (〒860 熊本市黒髪2丁目) |
| ** | 工博 | 熊本大学教授 | 工学部土木環境工学科 | (〒860 熊本市黒髪2丁目) |
| *** | 工博 | 京都大学教授 | 工学部土木工学科 | (〒606 京都市左京区吉田本町) |

2. 有限変位仮想仕事の定理による骨組構造解析^{1),2)}

2.1 概要

近年、有限変形、とくに幾何学的非線形の有限変位解析の広範かつ詳細な研究が行なわれている^{3),4),5),6),7)}。その多くは、Green ひずみと Kirchhoff 応力の積によってひずみエネルギーを表すエネルギー理論に基づくものである。変位および回転は有限であるが、ひずみが微小である場合、Green ひずみは近似的に埋め込み座標系に対する工学的ひずみに一致する。Martin ら^{8),9),10),11)} は、ひずみエネルギーを Green ひずみの 2 次形式で表わし、エネルギー停留の原理に基づいて、有限変位解析の基礎式を誘導することを試みた。通常、仮想仕事の定理において、仮想仕事とは外力がある変形の状態からの微小変位に対してなす仕事と定義される。

この仮想変位が微小でなく、かなり大きい場合の仮想仕事において、Kirchhoff 応力にかかり、内部仮想仕事を定める量は、Green ひずみに、非線形ひずみ付加項を加えたものとなることを三池が指摘した¹²⁾ (以下、有限変位仮想仕事の定理という)。このようなひずみ付加項は、有限変形補ポテンシャルエネルギー停留原理の汎関数の中に、補ひずみエネルギー密度の付加項としても現われる^{13),14)}。

Kirchhoff 応力の代りに埋め込み座標軸方向の成分をもつ Lagrange 流物理的応力を用いる場合には、それに対応して内部仮想仕事を定める量は、工学的有限ひずみに、部材の剛体的回転等を表わすひずみの付加項を加えたものになる。

有限変形ひずみエネルギー密度を、変位の関数として近似する場合、部材の剛体的回転を表す高次項が省略されて、解析の精度が低下する。これを防ぐため剛体的有限回転を除去する方法がとられている^{15),16)}。Reissner¹⁷⁾ は物体内部の微小直方体要素に着目して、有限変形を剛体的回転と、それ以外の有限変形に分離し、新しい補ポテンシャルエネルギー停留原理の構築を試みている。

筆者らは文献 1)、2) において、上記の物理的応力成分を用いた仮想仕事の定理について述べているが、次節はその補足説明である。

2.2 物理的応力成分を用いた有限変位仮想仕事の定理

物体が、内部任意点において $\mathbf{f}$ で与えられる物体力と、境界の任意点において $\mathbf{p}$ であるような表面力を受け、変形の中間状態 (物体内部の任意点の位置ベクトル $\mathbf{x}'$) から、有限の変位 (変位ベクトル $\Delta \mathbf{u}$) を生じ、つり合い状態にあるものとする。また、変形後の物体内部の任意点の位置ベクトルは $\mathbf{x}$ とする。物体力と表面力の有限変位に対してなす次式の更新 Lagrange 流の外部仮想仕事 ΔW は、変形後の Kirchhoff 応力 $\mathbf{T}_k$ と、後述の式 (3)、(4) で定義されるひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_k^*$ または $\Delta \mathbf{E}_k$ の積の形式で表わされる内部仮想仕事 ΔU に等しく¹²⁾

$$\Delta W = \int_A \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{u} dA + \int_V \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{u} dV = \int_{V'} \text{trace}(\mathbf{T}_k^T \Delta \mathbf{E}_k^*) dV' \equiv \int_{V'} \text{trace}(\mathbf{T}_k^T \Delta \mathbf{E}_k) dV' \equiv \Delta U \quad (1)$$

ここに、 dV' は変形の中間状態における、 dV は変形後の状態における微小体積要素の体積、 dA は変形後の境界面要素の面積である。また、マトリックス記法による Kirchhoff 応力 $\mathbf{T}_k^T$ は

$$\mathbf{T}_k^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A'_1} & 0 \\ \frac{\delta A_2}{\delta A'_2} & \frac{\delta A_3}{\delta A'_3} \\ 0 & \end{bmatrix} \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (2)$$

である。 $\mathbf{S}$ は、中間状態を基準とした変形後の Lagrange 流物理的応力で、その成分を σ_{ij} とする。式 (1) の被積分関数 $\Delta U_0 \equiv \text{trace}(\mathbf{T}_k^T \Delta \mathbf{E}_k)$ は内部仮想仕事の密度である。物体内部の中間状態における直交座標面で囲まれた微小直方体を想定し、その x'_i 座標軸に垂直の断面積が $\delta A'_i$ とする。これが変形後には歪曲された微小 6 面体となり、その側面積は δA_i になるものとする。 σ_{ij} は、 δA_i に作用し、かつ、微小 6 面体の辺に平行な、すなわち

理め込み x'_j 軸方向の物理的応力成分を表すものとする。また、計量テンソル $\mathbf{G} = (\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}')^T \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}'$ の要素を g_{ij} とする。式 (1) の $\Delta \mathbf{E}_k^*$ および $\Delta \mathbf{E}_k$ は

$$\Delta \mathbf{E}_k^* = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{E}_k = \Delta \mathbf{E}_g + \Delta \mathbf{E}_\theta \quad (4)$$

ここに、

$$\Delta \mathbf{E}_g = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \right] \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{E}_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \right)^T \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}'} \quad (6)$$

上式において $\Delta \mathbf{E}_g$ は Green ひずみである。また、 $\Delta \mathbf{E}_\theta$ はひずみの付加項で、有限変位 $\Delta \mathbf{u}$ がかなり大きいとき無視できない。Kirchhoff 応力 $\mathbf{T}_k$ は 2 階テンソルの性格をもっている。しかし、それ自身の中にひずみ成分を含んでおり、物理的意味は不明瞭である。式 (1) の被積分関数である内部仮想仕事の密度 $\Delta U_0^* \equiv \text{trace}(\mathbf{T}_k^T \Delta \mathbf{E}_k^*)$ において Kirchhoff 応力 $\mathbf{T}_k$ の代りに、Lagrange 流物理的応力 $\mathbf{S}$ を用いるとき、それに対応して、内部仮想仕事密度を構成するひずみ成分を求める。式 (3) に現われる Jacobian マトリックスは、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_1} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_2} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_3} \right] \equiv [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \quad (7)$$

ここに、 $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{x} / \partial x'_i$ は共変基底ベクトルである。

2次元有限変形の中間状態において、物体内部の任意の P 点をとおり、基本単位ベクトルが $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ であるような基準座標系 (x_1, x_2) の座標線を図-1のように埋め込むものとする。有限変形後には、この埋め込み座標線は歪曲されて、 P 点における単位ベクトルが、それぞれ $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ であるような曲線斜交座標線となる。変形の中間状態において、 P を中心としてその辺が A', B' を通る微小く形要素は、その辺が A, B を通る平行四辺形要素に変わる。この単位ベクトルは、

$$\mathbf{l}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (8)$$

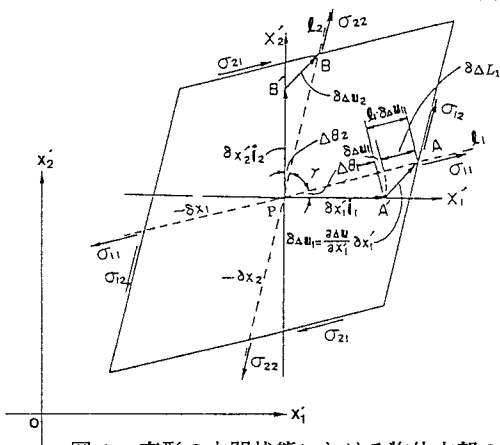


図-1 変形の間接状態における物体内部の

であるから、内部仮想仕事密度 ΔU_0^* は、式(2)、(3)および式(5)を用い 微小く形要素の有限変形

$$\Delta U_0^* = trace \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & \sigma_{12} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} \\ \sigma_{21} \frac{\delta A_1}{\delta A_2'} & \sigma_{22} \frac{\delta A_1}{\delta A_2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\delta x_1'} & \mathbf{l}_1 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\delta x_2'} \\ \mathbf{l}_2 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\delta x_1'} & \mathbf{l}_2 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\delta x_2'} \end{bmatrix} \right\} dV' \quad (9)$$

Lagrange 流の物理的応力 σ_{11} , σ_{22} および σ_{12} , σ_{21} は、変形後の微小平行四辺形の面に図-1 のように作用する。変形の間状態における線素 PA' ($=\delta x'_1$) は、相対変位 $A'A$ を生じて PA となる。その伸びを $\delta\Delta L_1$ 、回転を $\Delta\theta_1$ とすると、相対有限変位ベクトル $A'A$ は

$$\delta \Delta \mathbf{u}_1 = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial x'_1} \delta x'_1 = \mathbf{l}_1 (\delta x'_1 + \delta \Delta L_1) - \delta x'_1 \mathbf{i}_1 \quad (10)$$

しかるに、 $\cos\Delta\theta_1$ は、ベクトル $\mathbf{l}_1$ と $\mathbf{i}_1$ の内積で $\cos\Delta\theta_1 = \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{i}_1$ であるから、

$$\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial x'_1} = \frac{\partial \Delta L_1}{\partial x'_1} + (1 - \cos \Delta \theta_1) \quad (11)$$

同様に、線素 $PB' (= \delta x'_2)$ の相対有限変位を $\delta \Delta \mathbf{u}_2$ 、回転を $\Delta \theta_2$ 、伸びを $\delta \Delta L_2$ とすると、

$$\mathbf{l}_2 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial x'_2} = \frac{\partial \Delta L_2}{\partial x'_2} + (1 - \cos \Delta \theta_2) \quad (12)$$

また、 $\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2 = \Delta \gamma$ とするとき $\angle APB = \gamma = \pi/2 - \Delta \gamma$ であるから、

$$\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial x'_2} = \sin \Delta \gamma \frac{\partial \Delta L_2}{\partial x'_2} + \sin \Delta \gamma - \sin \Delta \theta_1 \quad (13)$$

$$\mathbf{l}_2 \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial x'_1} = \sin \Delta \gamma \frac{\partial \Delta L_1}{\partial x'_1} + \sin \Delta \gamma - \sin \Delta \theta_2 \quad (14)$$

したがって、 $\Delta \gamma$ は微小ひずみの場合にはせん断ひずみである。式(11)～(14)を式(9)に代入し

$$\begin{aligned} \Delta U_0^* = & \sigma_{11} \frac{\partial A_1}{\partial A'_1} \left[\frac{\partial \Delta L_1}{\partial x'_1} + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right] + \sigma_{22} \frac{\partial A_2}{\partial A'_2} \left[\frac{\partial \Delta L_2}{\partial x'_2} + (1 - \cos \Delta \theta_2) \right] \\ & + \sigma_{12} \frac{\partial A_1}{\partial A'_1} \left[\sin \Delta \gamma \frac{\partial \Delta L_1}{\partial x'_1} + \sin \Delta \gamma - \sin \Delta \theta_2 \right] + \sigma_{21} \frac{\partial A_2}{\partial A'_2} \left[\sin \Delta \gamma \frac{\partial \Delta L_2}{\partial x'_2} + \sin \Delta \gamma - \sin \Delta \theta_1 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

すなわち、この内部仮想仕事の密度は Lagrange 流物理的直応力 σ_{ii} には、これと、工学的直ひずみ $\delta \Delta L_i / \delta x'_i$ に剛体的回転 $\Delta \theta_i$ の効果を示す $(1 - \cos \Delta \theta_i)$ の付加項を加えたものとの積で与えられる。

2.3 トラス構造への本法の適用

軸力しか生じない 2 次元トラスの 1 直線部材の長さを L' 、その部材軸方向の変形後の直応力を σ_{11} 、その他の応力 $\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$ とする。 σ_{11} に断面積を乗じた軸力を N とする。また、変形によって断面積の変化はなく $\delta A_1 = \delta A'_1$ とみなし、これらの関係を式(15)に用いる。この ΔU_0^* をさらに式(1)に用いると

$$\Delta U = \int_{V'} \sigma_{11} \left\{ \frac{\partial \Delta L_1}{\partial x'_1} + (1 - \cos \Delta \theta_1) \right\} dV' = N \{ \Delta L_1 + (1 - \cos \Delta \theta_1) L' \} \quad (16)$$

上式において $\Delta \theta_1$ は部材の剛体的回転角となり、 ΔL_1 は伸びである。トラスの全構造部材についての有限変位仮想仕事の定理は、

$$\Delta W = \sum_I \Delta U_I = \sum_I N_I \{ \Delta L_I + (1 - \cos \Delta \theta_I) L'_I \} = \Delta U \quad (17)$$

ここに、添え字 I は第 I 番目の部材を表す。式(17)より、外力が有限変位に対してなす仮想仕事 ΔW に等価の内部仮想仕事 ΔU は、軸力 N_I と、伸び ΔL_I に剛体的回転を表す伸びの付加項 $(1 - \cos \Delta \theta_I) L'_I$ を加えたものの積の全部材についての和であることを示す。

図-2 に示すような、長さ L' の部材 $A'B'$ が、部材軸方向に力 $\mathbf{p}$ を受けて相対変位 $\Delta \mathbf{d}$ を生じる簡単な例題に対して、式(17)に基づく本解法が成立することを確認める。軸力を N とする。本解析例においては、 $N = |\mathbf{p}| = p$ である。外力 $\mathbf{p}$ が変位 $\Delta \mathbf{d}$ に対してなす仮想仕事

$$\Delta W = \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{d} = p \Delta d \cos \alpha \quad (18)$$

である。一方、 ΔW に等価の内部仮想仕事は式(17)より

$$\Delta U = N \{ \Delta L + (1 - \cos \Delta \theta) L' \} \quad (19)$$

式(17)で与えられる有限変位仮想仕事の定理によって $\Delta W = \Delta U$ であるから、式(18)、(19)より

$$\Delta d \cos \alpha = \Delta L + (1 - \cos \Delta \theta) L' \quad (20)$$

上式は本解法の 1 部材トラスの基礎式となる。これが幾何学的関係を十分に満足することは、容易に確認されるであろう。

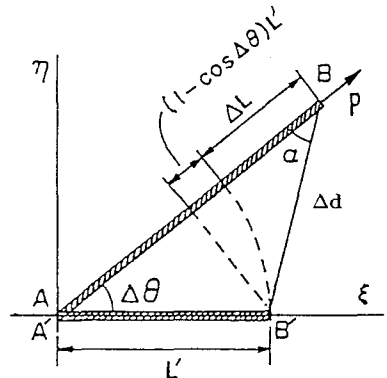


図-2 直線部材の有限変位 $\Delta \mathbf{d}$ と伸び ΔL

以下に、マトリックス記法を用いてトラス構造の有限変位解析の基礎式を求める。トラス構造の有限変形の間状態において、節点に作用する外力と変位がおのおの $\mathbf{p}'$ および $\mathbf{d}'$ であるとする。変形後の状態において、外力ベクトル $\mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p}$ を受け、変位増分が $\Delta\mathbf{d}$ であるものとする。変形後の部材軸力 N で構成される部材応力ベクトルを $\mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}'$ は変形の間状態における部材応力ベクトル)、 N による部材の変形の間状態からの伸びを ΔL 、 ΔL を成分とするひずみベクトルを $\Delta\mathbf{e}_m$ 、式(19)、式(20)における伸びの付加項 $(1 - \cos\Delta\theta_I)L_I$ を成分とするベクトルを $\Delta\mathbf{e}_\theta$ 、また、

$$\Delta\mathbf{e}_m^0 = \Delta\mathbf{e}_m + \Delta\mathbf{e}_\theta \quad (21)$$

とすると、式(17)で与えられるトラスの有限変位仮想仕事の定理のマトリックス表示は

$$(\mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p})^T \Delta\mathbf{d} = (\mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r})^T \Delta\mathbf{e}_m^0 \quad (22)$$

となる。部材応力ベクトルの増分 $\Delta\mathbf{r}$ とひずみベクトル $\Delta\mathbf{e}_m$ との間には、フックの法則

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{K} \Delta\mathbf{e}_m \quad (23)$$

が成立するものとする。 $\mathbf{K}$ はバネ定数 $k = EA_I/L_I$ から成る対角剛性マトリックス、 E は部材の Young 率、 A_I は断面積である。

外力と部材応力ベクトルの間には、接続マトリックス $\mathbf{C}'$ および $\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C}$ を用い

$$\mathbf{p}' = \mathbf{C}' \mathbf{r}' \quad (24)$$

$$\mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p} = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})(\mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r}) \quad (25)$$

が成り立つ。式(25)を式(22)に用い

$$\Delta\mathbf{e}_m^0 = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \Delta\mathbf{d} \quad (26)$$

式(25)を変形し、式(21)、(24)、(26)を代入すると次のようなトラス構造解析の増分形基礎式を得る。

$$\Delta\mathbf{p} = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\Delta\mathbf{r} + \Delta\mathbf{C}\mathbf{r}' \quad (27)$$

ここに、

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{K}\{(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \Delta\mathbf{d} - \Delta\mathbf{e}_\theta\} \quad (28)$$

である。

2.4 2 部材トラスの解析例

図-3 に示す 2 部材トラス、すなわち、ミーゼストラス¹⁸⁾ について式(21)の伸びの付加ベクトル $\Delta\mathbf{e}_\theta$ を考慮した場合と、考慮しない場合の荷重変位曲線を図-4 に示す。図-4 において横軸は鉛直方向下向きの変位 d であり、縦軸は鉛直下向きの載荷荷重の大きさを無次元量 P/EA で表している。なお、本解析においては増分変位 $\Delta d = 10.0\text{cm}$ 、部材の伸び剛性 $EA = 500\text{kgf}$ とした。図-4 の $\Delta\mathbf{e}_\theta$ を考慮した場合の荷重変位曲線は文献 18) に示された理論解と一致している。

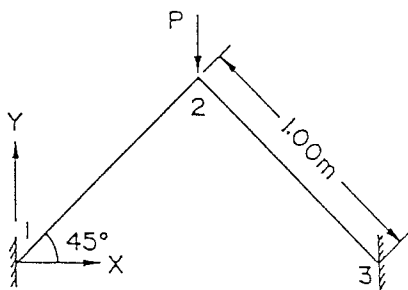


図-3 2部材トラスモデル

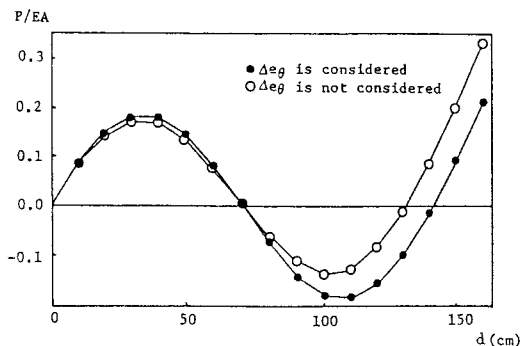


図-4 2部材トラスの荷重変位曲線

3. 有限変位 2 段階最適設計

3.1 概要

材料の非線形性を考慮した最適設計の研究^{19),20),21),22)}と比較して幾何学的非線形性を考慮した骨組構造物の最適設計の研究はその数が多いではないが、座屈モードのうち1次の固有値を制約条件とし体積最小化をはかるもの²³⁾、体積一定の下で座屈荷重の最大化を行うもの²⁴⁾、プログラムパッケージADINAを用い感度解析によって立体トラスの有限変位最適設計を行ったもの²⁵⁾などがある。また、短径間吊橋の最小重量設計を中心とした一連の研究^{26),27),28)}もある。

図-5 に従来的一般的な有限変位最適設計の解法（以下、「通常の方法」と呼ぶ）と本法の流れ図を示す。「通常の方法」では、断面積の設計変数ベクトル $\mathbf{A}$ の初期値 $\mathbf{A}^0$ について①有限変位解析を行い、②その結果得られた部材力に対して最適設計を行うという、2重の収束計算によって最適断面積 $\mathbf{A}'$ を求める。さらに、 $\mathbf{A}'$ を次のステップの初期値 $\mathbf{A}^0$ として再度 $\mathbf{A}'$ を求める。この $\mathbf{A}'$ と $\mathbf{A}^0$ が等しくなるまで上記の収束計算を繰り返して全域解 $\mathbf{A}^*$ を求めることとなる。これに対して「本法」では設計変数ベクトルとして増分変位 Δd を追加することによって、下記の最適設計問題を解くだけで最適解を得ることができる。

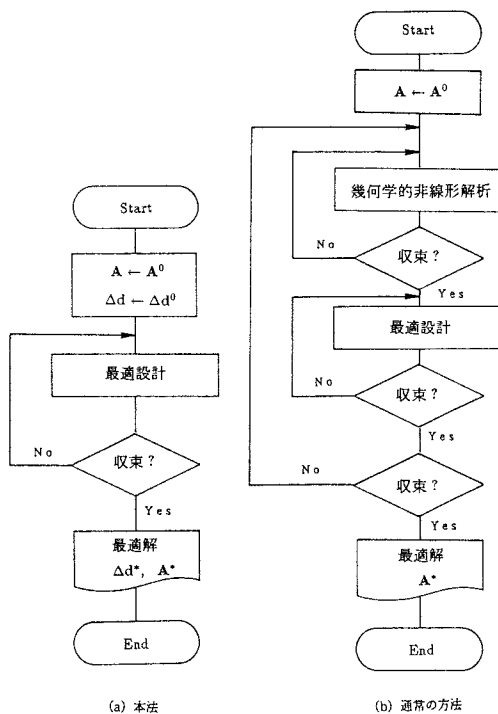


図-5 流れ図の比較

本法の特長は、設計変数として部材断面積 $\mathbf{A}$ のほかに、変形の間中間状態からの増分変位 Δd を用い、制約条件として式(27)の変形後の釣り合い条件式を追加することにより、有限変位解析を通常の最適設計のアルゴリズムの中に組み入れた点にある。このため、最適化の過程において、構造解析は行われず、変形後の釣り合い式を満足する方向に Δd が移動していくことになる。

ただし、設計変数が多くなり、断面積と増分変位という性質の異なるものを同時に最適化することと、等号制約条件式を含んでいるため、最適設計問題としては、設計変数の変換、制約条件式のスケーリング等に工夫をする必要がある。

3.2 2 段階最適設計

トラス構造について有限変位解析を考慮し最適設計を行う場合、設計変数としては部材断面積があれば十分であるが、制約条件式において許容応力度と細長比を正確に求めるためには、部材レベルの変数である板厚や部材幅の値が最適化されていなければならない。ここでは、構造レベルと部材レベルの設計変数を分離し、両レベルの変数の間に等号制約をもうける杉本の手法²⁹⁾に準拠した2段階最適設計法を応用する。

部材断面形状は図-6に示すように、部材幅 B 、板厚 t の正方形箱型断面とする。部材レベルの最適設計問題は最大荷重法を用い、構造レベルからの情報として与えられる断面積 A 一定の下で部材耐力の最大化をはかるものとする。ただし、トラス部材については「道路橋示方書・同解説³⁰⁾ (昭和55年版)」の規定を制約条件として用いる場合、部材の許容応力度 σ_a の最大化をはかることと同値であるのでこれを目的関数とする。

〔部材レベルの最適設計問題〕

設計変数： 部材幅 B ，板厚 t

目的関数： $\sigma_a(B, t) \rightarrow \max$ (29)

制約条件： $A = (Bt + t^2)$ (30)

構造レベル最適設計においては、式(27)の釣り合い条件式を等号の制約条件とし、主構重量 W を最小化する。すなわち、

〔構造レベルの最適設計問題〕

設計変数： 断面積 A ，増分変位 Δd

目的関数： $W = \rho A^T L \rightarrow \min$ (31)

制約条件： $\sigma - \sigma_a \leq 0$ (32)

$\lambda - \lambda_a \leq 0$ (33)

$A^L - A \leq 0$ (34)

$\Delta p - (C' + \Delta C)\Delta r - \Delta Cr' = 0$ (35)

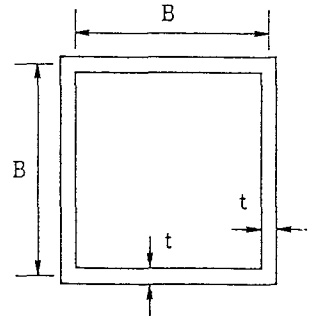


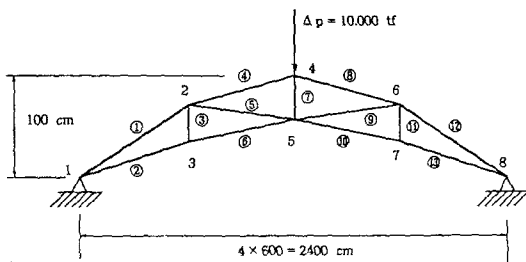
図-6 断面形状

ただし、 ρ は単位体積重量、 L は部材長、 λ は細長比である。下添え字 a は道路橋示方書の制限値、上添え字 L は下限値を表し、 $A^L = 4t \times t$ とした。構造レベルでの最適化に必要な部材レベルからの情報は、式(32)の許容応力度 σ_a と式(33)の細長比 λ である。これらの値は構造レベルで与えられる断面積 A の関数として、〔部材レベルの最適設計問題〕を解くことにより一義的に決定される。本研究における2段階最適化の主眼は、部材レベルの情報があってはじめて得られる許容応力度 σ_a と細長比 λ の値を正確に求めることである。このため、部材レベルの断面形状は正方形箱型のみを採用し、格点における各部材の結合の適合性については考慮していない。なお、ここでは各部材レベルの最適設計問題は2変数問題であるが式(30)の等号制約があるため実際には1変数問題となり解析的に最適解を求めることができるため、実際に数値計画手法を用いて最適化するのは、〔構造レベルの問題〕のみとなる。

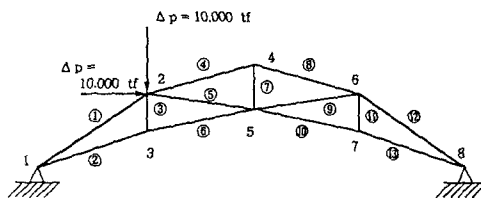
4. 数値計算例

4.1 概要

適用計算例として13部材と41部材のトラス構造の最適設計を行なう。比較のために非線形解だけでなく線形解も求めるものとする。また、使用鋼材はS M 5 8、弾性係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\rho = 0.00758 \text{ kgf/cm}^3$ とする。なお、構造レベルの最適化計算においてはADS³¹⁾ プログラムパッケージのうち Augmented Lagrange Multiplier Method (ISTRAT = 5) を使用した。



(a) case 1



(b) case 2

図-7 13部材トラス

(ブレースドリブアーチ) モデル

表-1 13部材トラスの最適解の比較

(a) case 1

no.	Linear Solution				Nonlinear Solution				A_N/A_L
	$N (tf)$	$A (cm^2)$	$B (cm)$	$t (mm)$	$N (tf)$	$A (cm^2)$	$B (cm)$	$t (mm)$	
1	-37.59	45.16	13.31	8.0	-46.67	79.24	25.49	8.8	1.755
2	-18.93	39.20	11.45	8.0	-6.30	41.63	14.85	8.0	1.055
3	-0.94	2.59	0.01	8.0	-0.37	6.15	1.40	8.0	2.375
4	-63.84	56.10	16.73	8.0	-74.27	71.64	23.47	8.1	1.277
5	26.30	23.38	6.51	8.0	27.71	28.87	9.65	8.0	1.235
6	-18.89	39.11	11.42	8.0	-6.34	41.51	14.91	8.0	1.061
7	-1.51	2.59	0.01	8.0	-1.65	2.60	0.02	8.0	1.004
8	-63.84	56.10	16.73	8.0	-74.23	72.07	23.56	8.1	1.285
9	26.30	23.38	6.51	8.0	29.91	29.09	9.66	8.0	1.244
10	-18.89	39.11	11.42	8.0	-8.51	42.03	14.94	8.0	1.075
11	-0.94	2.59	0.01	8.0	-0.52	6.16	1.41	8.0	2.378
12	-37.59	45.16	13.31	8.0	-44.51	80.83	25.81	8.9	1.790
13	-18.93	39.20	11.45	8.0	-8.49	41.87	14.87	8.0	1.068
Weight(tf) : $W_L = 0.244$, $W_N = 0.318$ $W_N/W_L = 1.303$									

no.	最適解	非線形解
1	$t=8.0$ $B=133.1$	$t=8.8$ $B=254.9$
4	$t=8.0$ $B=167.3$	$t=8.1$ $B=234.7$
9	$t=8.0$ $B=65.1$	$t=8.0$ $B=96.6$
10	$t=8.0$ $B=114.2$	$t=8.0$ $B=149.4$
12	$t=8.0$ $B=131.1$	$t=8.9$ $B=259.1$

(a) case 1

(b) case 2

no.	Linear Solution				Nonlinear Solution				A_N/A_L
	$N (tf)$	$A (cm^2)$	$B (cm)$	$t (mm)$	$N (tf)$	$A (cm^2)$	$B (cm)$	$t (mm)$	
1	-115.19	73.10	22.40	8.0	-240.00	124.18	29.55	10.2	1.699
2	83.17	24.32	6.80	8.0	213.32	82.06	24.02	8.3	3.374
3	3.10	2.59	0.01	8.0	-16.93	6.73	1.30	8.0	2.598
4	-4.52	39.20	11.45	8.0	-42.87	47.53	14.06	8.1	1.213
5	-120.02	47.58	22.51	8.0	-207.91	110.80	27.91	9.6	1.486
6	63.04	24.27	6.79	8.0	214.03	82.33	24.06	8.3	3.392
7	0.60	2.59	0.01	8.0	5.12	2.57	0.00	8.0	0.992
8	-4.52	39.20	11.45	8.0	-42.76	47.48	14.04	8.0	1.211
9	45.00	23.38	6.51	8.0	57.41	23.38	6.51	8.0	1.000
10	-101.98	69.09	20.79	8.0	-51.28	51.11	15.18	8.0	0.740
11	-5.10	2.59	0.01	8.0	-6.31	2.99	0.41	8.0	1.154
12	40.68	23.49	6.54	8.0	14.59	23.49	6.54	8.0	1.000
13	-102.19	69.23	20.83	8.0	-51.45	51.25	15.22	8.0	0.740
Weight(tf) : $W_L = 0.277$, $W_N = 0.387$ $W_N/W_L = 1.400$									

no.	最適解	非線形解
1	$t=8.0$ $B=224.0$	$t=10.2$ $B=295.5$
2	$t=8.0$ $B=68.0$	$t=8.3$ $B=240.2$
5	$t=8.0$ $B=225.1$	$t=9.6$ $B=279.1$
8	$t=8.0$ $B=114.5$	$t=8.0$ $B=140.4$
10	$t=8.0$ $B=207.9$	$t=8.0$ $B=151.8$

(b) case 2

図-8 13部材トラスの最適断面の比較

4.2 1 3 部材トラス (ブレースドリブアーチ)

図-7 の 13 部材ブレースドリブアーチトラスについて有限変位最適設計を行なう。解の比較のため線形解も同時に求めた。case 1 は設計荷重 ΔP をスパン中央の節点 4 の Y 軸方向に $-10.0tf$ 載荷する。case 2 は設計荷重 ΔP をスパンの $1/4$ 点の節点 2 の X 軸方向に $10.0tf$ 、Y 軸方向に $-10.0tf$ をそれぞれ載荷する。

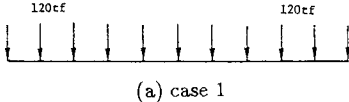
表-1 は case 1、2 について線形解と非線形解の最適解の比較を行なったものである。表中の W_L 、 W_N は、それぞれ線形解と非線形解における目的関数、すなわち、トラス重量の最適値を表している。図-8(a)、(b) は表-1(a)、(b) に示した最適解の部材断面形状の一部を描いたものである。全体的に線形解よりも非線形解の断面積の方が大きくなり、総重量で case 1 が 30%、case 2 が 40% ほど大きくなっている。case 1 では第 3、11 部材の非線形解の断面積が線形解の 2.38 倍、第 1、12 部材が 1.80 倍となっている。最も差の少ない下限材、すなわち、第 2、6、10、13 部材と第 7 部材が線形解とほぼ同じ値を示している。これに対して case 2 では特に第 2、3、6 部材においては非線形解の断面積の方が大きく、非線形解の断面積が線形解に対して、それぞれ 3.37、2.60、3.39 となっているが、第 7、10、13 部材では線形解の方が大きく、非線形解の断面積が線形解に対して、それぞれ 0.99、0.74、0.74 となっている。この結果からもアーチ系の橋梁においては非線形解析が必要なことが分かる。

4.3 4 1 部材トラス (スパンドレルブレースドリブアーチ)

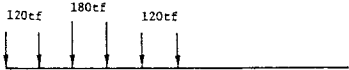
図-9 に示した 41 部材スパンドレルブレースドリブアーチトラスモデルについて最適設計を行う。また、図-9 には荷重の載荷状態を示したが、case 1 は上弦材の各節点に $120tf$ ずつを載荷し、case 2 では、上弦材の左半分の各節点に $120tf$ または $180tf$ を載荷する。表-2 には case 1 および 2 について線形解と非線形解の最適解の比較を行なったが、図-9 に示される代表的な 6 部材についての解のみに止めた。表-2 では、断面積が 3 から 4 % 非線形解の方が大きい。下弦材では、第 2、5 部材で 9.3% 非線形解が大きくなっている。垂直材では、第 4 部材の断面積は非線形解が 88% 大きくなっている。また、総重量では、非線形解が 3.5% の増加となっている。表-2 の case 2 においても結果は case 1 とほぼ同じで第 4 部材が部材が線形解に比べて 60 % の増加となっているのをはじめ、スパンの $1/4$ 点付近の部材を中心に非線形解が大きく、総重量で 3.1 % の増加となった。

表-2 4 1 部材トラスの最適解の比較

(a) case 1



(a) case 1



(b) case 2

no.	Linear Solution				Nonlinear Solution				A_N/A_L
	N (tf)	A (cm ²)	B (cm)	t (mm)	N (tf)	A (cm ²)	B (cm)	t (mm)	
1	0.00	44.27	13.03	8.0	-289.00	44.27	13.03	8.0	1.000
2	425.00	163.31	33.89	11.7	464.00	178.50	35.43	12.1	1.093
3	-420.00	161.60	33.71	11.6	-470.00	180.86	35.66	12.3	1.119
4	-120.00	51.49	15.29	8.0	-251.00	96.62	26.07	9.0	1.876
5	425.00	163.30	33.88	11.7	464.00	178.50	35.43	12.2	1.093
6	-356.00	193.00	41.89	14.4	-379.00	200.63	37.56	12.9	1.040
Weight(tf) : $W_L = 188.17$, $W_N = 194.67$ $W_N/W_L = 1.035$									

(b) case 2

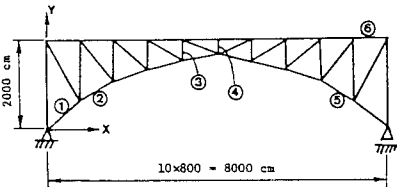


図-9 4 1 部材トラス (スパンドレルブレースドアーチ) モデル

no.	Linear Solution				Nonlinear Solution				A_N/A_L
	N (tf)	A (cm ²)	B (cm)	t (mm)	N (tf)	A (cm ²)	B (cm)	t (mm)	
1	0.00	44.27	13.03	8.0	27.00	44.27	13.03	8.0	1.000
2	401.00	154.23	32.93	11.3	436.00	167.52	34.32	11.8	1.086
3	-220.00	88.18	24.90	8.6	-256.00	101.09	26.66	9.2	1.146
4	-120.00	51.58	15.32	8.0	-211.00	82.43	24.07	8.3	1.589
5	165.00	63.54	19.06	8.0	180.00	69.22	20.83	8.0	1.089
6	-140.00	100.20	26.54	9.1	-147.00	103.21	26.94	9.3	1.030
Weight(tf) : $W_L = 132.84$, $W_N = 136.93$ $W_N/W_L = 1.031$									

5. 結論

- 1) 変位がかなり大きい場合の、外力が有限変位に対してなす仮想仕事に等価の内部仮想仕事の密度は、埋め込み座標軸方向の Lagrange 流物理応力と、同じ方向の工学的有限ひずみ成分に、あるひずみ付加項を加えたものの積で与えられることを述べた。また、部材応力として、軸力しか生じないトラス構造の1つの部材(部材長 L) の有限変位内部仮想仕事は、軸力と伸びに付加項 $(1 - \cos\theta)L$ を加えたものの積で与えられることを明らかにした。
- 2) トラス構造の有限変位最適設計の解析に使用するため、上記の有限変位仮想仕事の定理に基づいて、接続マトリックスを組み立て、有限変位解析の増分形基礎式を誘導した。これによって有限変位解析基礎式が簡潔となり有限変位最適設計の解析が容易となる。
- 3) アーチ型のトラス構造に対して、有限変位2段階最適設計を行った。すなわち、部材レベルでは正方形箱型断面について、断面積 A 一定の下で、許容応力度 σ_a の最大化を行い、構造レベルでは断面積 A と増分変位 Δd を設計変数として、有限変位を考慮した主構重量の最小化をはかった。
- 4) 計算例として、13部材と41部材のアーチ型トラスモデルを用いたが、線形解と本法による非線形解との比較を行い、アーチ型トラス構造で有限変位最適設計の必要性が確認された。

参考文献

- 1) Kobayashi, I., Miike, R. and Yamada, Y.: Two-Level Optimization of Nonlinear Structures, COMPUTER UTILIZATION IN STRUCTURAL ENGINEERING, Proc. of Structures Congress '89, ASCE, pp.237-246, 1989.
- 2) Miike, R., Kobayashi, I. and Yamada, Y.: Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, EM Division, ASCE, Feb. 1990 (掲載予定).
- 3) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd edition, Pergamon Press, 1975.
- 4) Fung, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall. (大橋、村上、神谷共訳、固体の力学/理論、培風館、pp.440-448, 1970.)
- 5) Dym, C.L. and Shames, I. H.: Solid Mechanics, Variational Approach, McGraw-Hill, 1973.
- 6) 西脇威夫: 骨組構造の幾何学的非線形問題(その1) - 概説 -, (成岡、中村共編: 骨組構造解析法要覧)、培風館、pp.51-57, 1976.
- 7) 吉田 裕: 有限要素法による幾何学的非線形構造解析の現状と課題、土木学会論文集、第374号/I-6、pp.25-37, 1986.
- 8) Martin, H.C.: Finite Elements and the Analysis of Geometrical Nonlinear Problems, U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, pp.343-381, 1969.
- 9) Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1968.
- 10) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, Third edition, McGraw-Hill, pp.506-512, 1977.
- 11) 前田幸雄、林 正、中村 守: 増分法による平面骨組構造の大変形解析の加速計算法、土木学会論文報告集、第223号、pp.1-9, 1974.
- 12) 三池亮次: 有限変形における増分形エネルギー基礎理論、土木学会論文報告集、第309号、pp.41-50, 1981.
- 13) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論、培風館、1972.
- 14) Oden, J.T.: Variational Principles in Nonlinear Continuum Mechanics. (edited by Brebbia, C. A. and Tottenham, H.) Variational Methods in Engineering, Vol.1, Session 11, pp.2/1-2/20, Gresham Press, 1973.
- 15) 吉田 裕、増田陳紀、森本 剛、広沢規行: 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法、土木学会論文報告集、第300号、pp.21-31, 1980.
- 16) 後藤芳顕、長谷川彰夫、西野文雄: 平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察、土木学会論文報告集、第331号、pp.33-44, 1983.
- 17) Reissner, E.: Formulation of Variational Theorems in Geometrically Nonlinear Elasticity, ASCE, Vol. 110, No.ST.9, pp.1377-1390, 1984.
- 18) 福本晴士: 新体系土木工学9 構造物の座屈・安定解析、技報堂、pp.14-19, 1982.
- 19) 石川信隆、大野友則、岡元北海: 立体骨組構造物の最適塑性設計に関する一考察、土木学会論文報告集、第279号、pp.45-59, 1978.
- 20) Grierson, D.E. and Schmit, L.A.: Synthesis under Service and Ultimate Performance Constraints, Computers and Structures, Vol.15, No.14, pp.405-417, 1982.
- 21) 大久保禎二、藤脇敏文: コンプリメンタリー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法、土木学会論文集/I-10、pp.227-236, 1988.
- 22) 三原徹治、北小路雅倫、石川信隆、太田俊昭: 相補挿出法を用いた立体骨組構造のホロノミック弾塑性解析、構造工学論文集II、Vol.35A、pp.383-392, 1989.
- 23) Khot, N.S.: Nonlinear Analysis of Optimized Structure with Constraints on System Stability, AIAA, Vol.8, pp.1181-1186, 1983.
- 24) Kamat, M.P., Khot, N.S. and Venkayya, V.B.: Optimization of Shallow Trusses against Limit Point Instability, AIAA, Vol.22, No.3, pp.403-408, 1984.
- 25) Haririan, M., Cardoso, J.B. and Arora, J.S.: Use of ADINA for Design Optimization of Nonlinear Structures, Computers and Structures Vol.26, pp.123-133, 1987.
- 26) 杉本博之: 有限変形を考慮したトラス構造物の最適設計、土木学会北海道支部論文報告集、pp.21-26, 1974.
- 27) 杉本博之: 短径間吊橋の最適設計とステイの効果について、土木学会北海道支部論文報告集、pp.131-136, 1975.
- 28) 杉本博之: 吊橋の最小重量設計とその二、三の特性、土木学会北海道支部論文報告集、pp.57-61, 1976.
- 29) 杉本博之: 2段階最適化による格子構造の最小重量設計に関する研究、構造工学論文集、Vol.33A, pp.687-695, 1975.
- 30) 日本道路協会編: 道路橋示方書・同解説、共通編、鋼橋編、1980.
- 31) Vanderplaats, G. and Sugimoto, H.: A General-Purpose Optimization for Engineering Design, Computers and Structures, Vol.24, pp.12-21, 1986.

(1989年10月2日受付)