

極小値探索計算の一効率的手法

A EFFICIENT CALCULATION TECHNIQUE OF SEARCHING FOR THE MINIMUM VALUE

野上 邦栄*

By Kuniei NOGAMI

This paper proposes a calculation procedure of searching for the minimum value with many inequality-constrained conditions. This technique, based on the Lagrange multiplier method, has the following characteristic features: (1) The technique use the Newton-Raphson method to improve on the convergence by mean of a penalty term added to the object function. (2) This technique is possible to automatically establish an initial value and to select mechanically the active constrained conditions. Finally, it is confirmed that this procedure is applicable effectively to the optimum depth problem of the plate girder.

1. まえがき

構造物の設計は、多くの場合、数多くの非線形不等式制約のもとで、これも非線形な目的関数を最小にする最適設計問題に帰着される。これらの制約条件は、示方書によって与えられるばかりでなく、その他に実際的な諸要求を満たさなければ実用的な結果を得られないので、その数は極めて多くなるのが普通である。

このような、非線形の最適設計問題で用いられる方法としては、逐次線形計画法・縮約勾配法・許容方向法・無制約最小化反復法(SUMT)その他多くのものが知られている^{1)~5)}。Lagrangeの未定乗数法はその中にあって、Kuhn-Tuckerの最適性規準の関連においても極めて理論的重要性を持つ方法であるが、そのままの形ではあまり利用されることが無い⁵⁾。それは、(1)Newton-Raphson法と組み合わせた場合など、関数によっては、初期の探索点(初期値)の取り方が悪いと解が発散し、解を得ることが困難になる。(2)不等式制約条件下では、活性な等式条件のみを解析に採り込むことで適用できるが、その具体的方法に困難がある。の問題点によるものであろう。

第1の問題点は、特に初期値が解から遥かに離れた点で与えられた場合、その点で線形近似された式によって解に向かってその点を移動させる修正ベクトルの計算結果の大きさが、実際に必要な値より大きくなり過ぎる場合に生じることが原因である。したがってそのような場合に修正ベクトルの大きさを制限するのが一般に採用される対策であり、そのための工夫として、Fletcherの超立方体法⁴⁾などがある。このような対策は屢々有用であり、計算回数が多少増えても、確実に探索点を解の近傍に誘導することを可能にする。しかし、これらは解析担当者の判断と経験に基づく手加減を必要とするので、さらに工夫の余地がある。

* 工博 東京都立大学助手 工学部土木工学科 (〒158 世田谷区深沢2-1-1)

第2の問題点は、Lagrangeの未定乗数法のように固有のものと言えない。実際の設計で考慮しなければならない制約条件は、一般に設計変数の数より遥かに多く、設計者はそれらの中から常に活性なもののみを考慮しつつ作業を進めている。したがって、多くの制約の中から活性なもののみを拾い出すと言う作業は、現実の作業をプログラム化する場合には必ず出会う問題である。この選択の困難さを避ける方法として、SUMTが有効であるが、この方法によると制約条件の総てを罰金項として採り込むことが必要であるから、制約条件の総量が多い場合には、目的関数として用いられる罰金関数は極めて複雑なものになり、必要な計算量は膨大なものになる。また、制約式を等式化するために調整変数を導入する方法⁶⁾もあるが、これは設計変数の他に導入する変数の数が制約式の数につれて多くなるので、必ずしも最善の方法であるかどうか、疑問の余地がある。したがって、もし、より良き適当な選択法が得られれば、もっと少ない計算量で目的の解に到達できる可能性がある。

ここでは、上述の問題点を踏まえて、まず必要な修正ベクトルを過大にしない対策として、制約条件に関係の無い一種の罰金項を目的関数に付加した疑似目的関数を導入する方法を、さらに自動的に初期値を設定する取扱方および機械的に活性制約を選択する計算法を提案している。

2. 基本的な考え方

いま、 m 個の設計変数 x_i を持つ適当な関数 $\Phi(x_i)$ を最小にする点 $\{x_i\}$ を求める問題において、すべての変数 x_i は n 個の不等式制約条件

$$g_k(x_i) \leq 0 \quad (i=1,2,3,\dots,m; k=1,2,3,\dots,n) \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満足しなければならないものとする。

もし、制約条件のすべてが等式制約であり、目的関数および制約条件の x_j に関する微係数が存在し、しかも $n < m$ ならば、Lagrangeの未定乗数法を用い、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{,j}(x_i) + \lambda_k g_{k,j}(x_i) &= 0, \\ g_k(x_i) &= 0, \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,m; k=1,2,3,\dots,n) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を連立させて解けば、解が得られる。 λ_k は制約条件 g_k に対応する未定乗数である。ここに、添字 $(\cdot)_{,j}$ は x_j に関する微分を意味する。

制約条件が不等式で与えられる場合には、設計変数がその条件に関する可能領域に存在していて、その条件が活性でない場合には事実上制約が無いのと同じなので、それらは差し当たり考慮の外に置いて良い。これに対し、変数が直接支配されているような制約条件は活性であり、これについては変数の位置がその可能領域の境界部に一致しなければならないことになるから、当然等式制約の場合と同等の状態になり、式(1)において等号が成り立つ場合に相当する。したがって活性な制約は等式制約条件と見做して良く、式(2)と同じ取り扱いをして差支えない。

いま、目的関数 Φ および取り込まれている s 個の制約条件 g_k がともに非線形であるとする、一般には式(2)をそのまま解くこと自体が非線形問題となり、種々の解法が存在する。ここではNewton-Raphson法を用いるものとする、探索点 x_i 、 λ_i に対して誤差 Ψ_j

$$\left. \begin{aligned} \Psi_j(x_i) &= \Phi_{,j}(x_i) + \lambda_k g_{k,j}(x_i), \\ \Psi_{m+k}(x_i) &= g_k(x_i), \quad (k=1,2,3,\dots,s \leq n) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

が生じた時、

$$\left. \begin{aligned} (\Phi_{,jr} + \lambda_k g_{k,jr}) d x_r + g_{k,j} d \lambda_k &= -\Psi_j \\ g_{k,r} d x_r &= -\Psi_{m+k} \end{aligned} \right\} \quad (r=1,2,3,\dots,m) \quad \dots \dots \dots (4)$$

を満足するように変数 x_i の修正量 $d x_i$ を決定すれば良い。

ところで、Lagrangeの未定乗数 λ_k は、その符号だけが問題であって目的関数の値には関係ないから、式(3)及び式(4)におけるその初期値 λ_k は何時でも0にしておいて良い。符号は $d \lambda_k$ のみによって確かめられる。そのような条件で計算が行われるものとすれば、結局取り扱うべき式は、 $d \lambda_k$ を単に λ_k と書くことにより

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{,jr} d x_r + g_{k,j} \lambda_k &= -\Phi_{,j} \\ g_{k,r} d x_r &= -g_k \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

だけで良いことになる。これを解いて得られた解 $x_i + d x_i$ と λ_k は、探索点 x_i の点で推定された最適解と、その場合の未定乗数を表す。

3. 疑似目的関数

前章の方法を適用する時、探索点における目的関数の曲率があまり小さいと式(5)の解として得られる修正ベクトル $\{d x_r\}$ に極めて大きな成分を含むことになり、屢々不都合を生じる。その不都合とは

(1)式(5)が線形化されているので、目的関数および制約条件式の非線形性による誤差が大きく現れる。

(2)次回の探索点が前回の探索点とかなり離れているため、前回考慮されていなかった制約条件で新しく抵触するものの数が多くなる。

と言う現象の現れる可能性によるものである。その対策としては、探索点の修正ベクトル $\{d x_r\}$ の大きさが大きくなり過ぎないようにすることが最も大切である。この目的を果たすための方法は種々あり、修正ベクトル $\{d x_r\}$ の大きさを直接制約する方法が多く採用される¹⁾⁷⁾。しかしここでは目的関数を修正した疑似目的関数を用いることを提案する。

当然その修正によって真の最適状態が変化してしまってはならない。ここで提案する方法は、目的関数に別な仮想の関数 $P(x_i, \xi_i)$ を加えたものを疑似目的関数として使うのである。この仮想の関数 P は、一種の罰金項と見做されるが、座標に固定された関数ではなく、何時でも考えている探索点に原点と極小値を持つ放物曲面であることである。すなわち P を

$$P(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^m (x_i - \xi_i)^2 K_i / 2 \quad \dots \dots \dots (6)$$

とした時、疑似目的関数 $\Phi^*(x_i, \xi_i)$ を

$$\Phi^*(x_i, \xi_i) = \Phi(x_i) + P(x_i, \xi_i) \quad \dots \dots \dots (7)$$

とし、これを目的関数のかわりに使用するのである。ここに、 K_i は任意の正の実定数である。また、 ξ_i は常に探索点(試算点)における x_i と同じ値をもつものとする。そのようにすれば、式(7)で定義される疑似目的関数は探索点において必ず $P=0$ および $P_{,j}=0$ が成り立つから、その点において本来の目的関数と同じ値と同じ勾配を持つので式(2)には全く影響しない。しかし正の曲率が追加されている結果、式(5)の対角項 $\Phi_{,jj}$ は目的関数が線形であるような成分についても0でない正值を持つようになる。

すなわち、疑似目的関数を用いることは最終最適解には全く影響しないが、探索の途中では、Newton-Raphson 法の適用に際して疑似目的関数の単独最小値を目指しながら、制約条件の影響のもとに修正ベクトルの計算を実行するのである。疑似目的関数単独の最小値は、

(a)探索点における最急勾配方向で、

- (b)探索点より真の目的関数の値の小さい側に存在し、
- (c)真の目的関数が単独で最小値を示す点より探索点に近い、

と言う特徴を持つ。そのため修正ベクトルが過大になることが防がれ、しかもその修正ベクトルは、本来の目的関数の曲率が大きくなるほど小さくなるので、目的関数の状況に応じて自動的に伸縮される。また、真の目的関数が厳密に凸関数でない場合にも、これを凸関数化する働きを持ち、上記の方法による修正ベクトルが最適（最小）値を狙うことになる。

曲率を与える定数 K_i の大きさは任意であるが、これに大きな値を与える程計算で得られる探索点からの修正ベクトル（探索の刻み）が小さくなる傾向を持つことを考慮して適宜問題に応じて決めるべきである。修正ベクトルの大きさが小さくなり過ぎると判断されたら、 K_i 値を小さくすれば良いが、どんなに K_i を小さくしても、修正ベクトルの先端が上記の範囲を超えることは無い。 K_i を小さくし、極端な場合としてこれを0にしたのにも関わらず、修正ベクトルの大きさが微小であると言うことは、探索点が真の最適解の近傍に達していることを意味する。

4. 制約条件の抵触深さ

いま、全く任意に設計変数の初期探索点 $\{x_i^0\}$ を設定する。この初期値を総ての制約条件(n 個)に代入し、その符号を調べた結果、 q 個の制約条件に抵触していることが判ったものとする。 q 個の制約条件については、

$$g_k(x_i^0) > 0 \quad (k=1, 2, \dots, q) \quad \dots\dots\dots (8)$$

になっているのであるから、少なくとも等号が成り立つ所まで設計変数を修正しなければならないことが明らかである。

ここで、任意の制約条件式について初期値の近傍でベクトル $\{g_{k,r}\}$ が存在するものとして

$$g_k(x_i^0 + d x_i) \approx g_k(x_i^0) + g_{k,r}(x_i^0) d x_r = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

を満足させるためには、

$$g_{k,r}(x_i^0) d x_r = -g_k(x_i^0) \quad \dots\dots\dots (10)$$

が成り立たなければならない。

式(10)の左辺は $g_{k,r}(x_i)$ を成分とするベクトル $\{g_{k,r}\}$ とベクトル $\{d x_r\}$ の内積を表しており、したがってスカラー量 γ_k と単位ベクトル $y_{k,r}$ を導入し、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k^2 &= \sum_{r=1}^m g_{k,r}^2 \\ y_{k,r} &= \frac{g_{k,r}}{\gamma_k} \\ \sum_{r=1}^m y_{k,r}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

とすると、式(10)は

$$y_{k,r} d x_r = -\frac{g_k}{\gamma_k} = -\mu_k \quad \dots\dots\dots (12)$$

になる。ここで γ_k は正に限るものとする。

ベクトル $\{y_{k,r}\}$ は単位ベクトルであるから、式(12)は制約面を表し、 $g_k / \gamma_k = \mu_k$ が初期探索点

の位置から制約面までの最短距離〔以下ではこれを制約の抵触深さと呼ぶ〕を表すことになる。以下では、探索点が制約条件に抵触した場合に、可能領域に脱出するための指標として、この抵触深さを用いる。

なお、式(12)は式(5)の第2式を書き換えたただけのものであるから、式(5)はこれと同じ形式で

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{j,r} d x_r + \nu_k y_{k,r} &= -\Phi_{j,i} \\ y_{k,r} d x_r &= -\mu_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$\nu_k = \lambda_k \gamma_k \dots\dots\dots (14)$$

と書き直すことができる。 γ_k は正であるから、 ν_k の符号は λ_k の符号と等しく、したがってこの式によって問題を解いても同じことである。この形式では、抵触深さ μ_k が直接与えられているので具合が良い。

5. 初期値の設定および制約条件の選択

これまで記してきたことによって明らかなように、ここで用いる方法は計算誤差の範囲内で常に探索点が可能領域に含まれていることが必要である。したがって、初期値もまた、可能領域に含まれていなければならない。ここでは、そのような初期値を設定するための方法について考えることにする。

いま、任意に選んだ初期値が s 本の互いに独立な制約条件に抵触しているものとする。もし、 $s < m$ ならば、 s 本の制約条件を総て等号的に成り立たせるような点の選択には、なお自由度が残されていることになる。ここでは、そのような点のうち、現在の初期値から最も近い点を選択するものとする。なお、ここで目的関数を考慮に加えることは、あまり利益が無い。

そうすると、問題は考慮すべき制約条件の基で現在の探索点からの修正ベクトルが最も短いような点を求める問題になるから、これをLagrangeの未定乗数法で解くものとするれば、解くべき式は E を単位行列とし、さらに考慮に加えるべき制約条件を用いて作られる行列を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \dots & y_{s,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \dots & y_{s,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1,m} & y_{2,m} & \dots & y_{s,m} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

と書くことにすれば

$$\left. \begin{aligned} 2E \{d x_r\} + Y \{\nu_k\} &= \{0\} \\ Y^T \{d x_r\} &= -\{\mu_k\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を解く問題に帰着される。

これを解くと式(16)の第1式から

$$\{d x_i\} = -Y \{\bar{\nu}_k\}$$

ただし、

$$\bar{\nu}_k = \nu_k / 2 \dots\dots\dots (17)$$

となるから、これを第2式の $d x_r$ に代入して

$$\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y} \{ \bar{\nu}_k \} = \{ \mu_k \} \quad \dots \dots \dots (18)$$

が得られる。これは未定乗数と抵触深さの関係を示す式であり、これを解いて

$$\{ \bar{\nu}_k \} = \{ \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y} \}^{-1} \{ \mu_k \} \quad \dots \dots \dots (19)$$

が得られれば、これにより解としての修正ベクトル

$$\{ d_{x_r} \} = -\mathbf{Y} \{ \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y} \}^{-1} \{ \mu_k \} \quad \dots \dots \dots (20)$$

が得られる。これが可能であるためには $\{ \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y} \}$ が特異でないこと、すなわち式(18)を解くことができないなければならない。

式(18)の左辺の係数行列を

$$\mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{Y} = [Y_{ij}^{(1)}] \quad \dots \dots \dots (21)$$

と書くと、その要素は

$$Y_{ij}^{(1)} = y_{i,1} \cdot y_{j,1} \quad (i=1,2, \dots, m) \quad \dots \dots \dots (22)$$

である。すなわち、この行列の要素 $Y_{ij}^{(1)}$ は制約関数 g_i と g_j の最急勾配方向単位ベクトルの内積であり、対角項 $Y_{ii}^{(1)}$ は1である。また、この行列は対称行列である。

いま抵触深さ μ_k が正で一番大きいもの μ_u を見出し、その行の対角項を用いて他の行を消去するものとする。そうすると i 行 j 列の要素 $B_{ij}^{(1)}$ は

$$B_{ij}^{(1)} = Y_{ij}^{(1)} - Y_{iu}^{(1)} Y_{ju}^{(1)} \quad \dots \dots \dots (23)$$

i 行の外力項は

$$\bar{\mu}_i^{(1)} = \mu_i^{(1)} - Y_{iu}^{(1)} \mu_u^{(1)} \quad \dots \dots \dots (24)$$

になる。ここで

$$r_i^{(1)} = B_{ii}^{(1)} \quad \dots \dots \dots (25)$$

と置き、第 u 行以外の行について

$$\left. \begin{aligned} Y_{ij}^{(2)} &= B_{ij}^{(1)} / r_i^{(1)} \\ \mu_i^{(2)} &= \bar{\mu}_i^{(1)} / r_i^{(1)} \\ \bar{\nu}_i^{(2)} &= \bar{\nu}_i^{(1)} \cdot r_i^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (26)$$

とし、第 u 行については

$$\left. \begin{aligned} Y_{uj}^{(2)} &= Y_{uj}^{(1)} \\ \mu_u^{(2)} &= \mu_u^{(1)} \\ \bar{\nu}_u^{(2)} &= \bar{\nu}_u^{(1)} : \{ r_u^{(1)} = 1 \} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (27)$$

と書くことにすれば、式(18)は

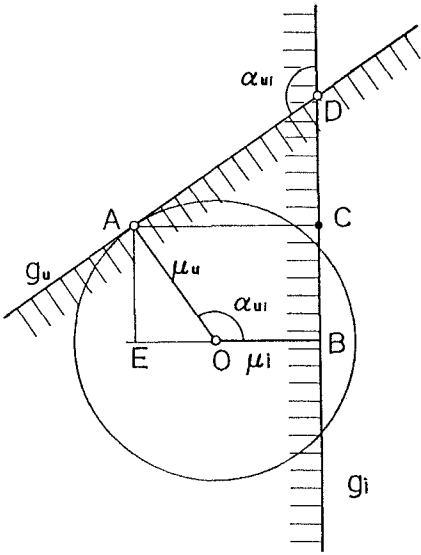


図-1 抵触深さと初期値

$$[Y_{ij}^{(2)}] \{ \bar{\nu}_k^{(2)} \} = \{ \mu_k^{(2)} \} \quad \dots \dots \dots (28)$$

になる。

ところで、この行列の要素 $Y_{ui}^{(1)}$ はベクトル $\{y_{u, j}\}$ とベクトル $\{y_{i, j}\}$ の内積であり、つまり図-1に見られる角度 α_{ui} の余弦 $\cos \alpha_{ui}$ である。したがって式(26)における $\mu_i^{(2)}$ は図中の長さ $\overline{AD}$ を表している。今、初期値0から単純に制約 g_u の表面に最短距離で出られるA点に移動すると、この点は制約 g_i に抵触したままであり、しかも制約 g_i との距離は $\overline{AC}$ となって、現状より抵触深さが深くなってしまふ。これを避けるためには点Dに移動するのが良く、 $\mu_i^{(2)}$ がそのために必要なA点からの移動量、すなわち制約面 g_u 上における点Aの制約 g_i に対する抵触深さを表しているのである。

式(28)は、消去の軸に使ったu行と消去されたu列を除けば式(18)と全く同形であり、上記の通り物理的には制約面 $g_u = 0$ の空間における制約の抵触深さを表すものである。したがって、以下は同様の取り扱いが出来る。ただし、この消去の時に、対角項 $B_{ii}^{(n)}$ が0になる場合がある。これはその行iに相当する制約条件式が、それまでに消去の軸として使われた行の内のどれかに対して従属な関係にあることを意味する。その場合には、最初に軸として選ばれた行の抵触深さが最も深いものであったことを根拠に、新しく現れた従属な行と列は当面不要なものとして式中から削除して良い。

したがって、計算の手順は次のようになる。

- ①初期値 x^0 を設定する。
- ②総ての制約条件式 g_k に初期値を代入し、その点における $y_{k, i}$ と μ_k を求める。
- ③ μ_k が正で最大のもの μ_u を見出す。
もし正のものが無ければ、 x^0 は可能領域に在るからそれ以上の計算は不要である。
- ④ $[Y_{ij}^{(1)}]$ と μ_k を作る。
- ⑤第u行の対角項を軸として、消去を行う。
- ⑥第u行以外の行について、 $[Y_{ij}^{(2)}]$ と $\mu_k^{(2)}$ を作り、 $r_i^{(1)}$ を記憶する。
 $r_i^{(1)} = 0$ となるような行が見出された場合は、その行と列を削除する。
- ⑦ $\mu_k^{(2)}$ の中の正で最大のもの $\mu_v^{(2)}$ を見出す。正のものが無ければ⑧に移行するが、もし有れば、上記の⑤以下と同様の方法を繰り返す。
- ⑧すべての消去が終了した時、解としての $\bar{\nu}_i^{(w)}$ から、解 $\bar{\nu}_i$ は

$$\bar{\nu}_i = \bar{\nu}_i^{(w)} / \prod_{j=1}^w r_i^{(j)} \quad \dots \dots \dots (29)$$

によって求められる。

- ⑨これを用い、修正ベクトルは式(20)に相当する

$$\{dx_r\} = -Y \{\bar{\nu}_i\} \quad \dots \dots \dots (30)$$

で計算できる。また、最終状態まで棄てられないで残った制約条件式が、その点において活性な制約であると見做される。

6. 探索実行時の工夫

探索の実行に当たって最初に行うことは、その初期値を定めることであるが、これは任意の初期値から出発して、前章で述べた方法により、使用するべき制約条件を適当に選択することで実行できる。

その後、式(5)によって最適値へ向けての修正ベクトル計算を行うことになるが、もともとここで用いられるNewton-Raphsonの方法は非線形な問題を扱う一方法であり、探索の実行に際して初期値が解の近傍にあ

ることを期待し、線形化しているので、次回の探索点が厳密な制約面上にのってくる保証は無い。繰り返しによって制約面上の解に収束することが期待されるだけであることに注意しなければならない。

すなわち、式(5)によって得られる探索修正ベクトルが、その初期値の点における制約面の接線方向に向いているため、曲面の場合には、修正後の点の位置が制約面から離れて仕舞うことにある。したがって移動後の点では式(5)を用いるための前提が失われているから、そこで再び式(16)によってその点を制約面上に載せなければならない。

なお、制約条件式が非線形の場合には、計算によって修正した結果が、直ちに制約の交面に正確に乗るとは限らないから、その上に正確に載せようとすれば繰り返し計算が必要になる。この繰り返し計算を適当な所で打ち切っても良いが、その場合に結果の点が厳密には制約面上に一致していなくても、それが問題の制約面上に本来載るべきものの近似値であって、その制約式は等号制約式であるものとして取り扱う必要がある。これは、近似値と見做さなければ成らないのである限り、可能領域に存在しようと、制約の抵触領域に存在しようと、関係が無い。

このように、ベクトル（制約条件抵触の深さや探索修正ベクトル）の大きさを問題にしなければならない場合には、もともとの変数（ベクトル成分）の大きさが様々であると、ベクトルの大きさ自身が極めて大きい成分の大きさにほとんど支配されてしまって数値計算上は都合が悪い。したがって、予め変数の大きさが互いに著しくは違わないように、無次元化とスケーリングを施しておくことが、上述のベクトル修正量の限界設定法とともに重要なテクニックになる^{B)}。

以上、第3章から本章までの極値探索に関する基本的なアルゴリズムは、図-2のようになる。

7. 数値計算例

(1) 初期値設定の試算
いま、次の制約条件式

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= 1 - x_1 - x_2 \\ g_2 &= 0.2 + 0.8x_1 - x_2 \\ g_3 &= 0.2 - 1.2x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

の場合における初期値設定について、第5章の手順にしたがって計算を試みる。仮の初期値を $(x_1, x_2) = (0, 0)$ と置いた場合の結果をまとめたのが表-1である。この表は、仮の初期値から最も近い点として選択された設計変数 $(x_1, x_2) = (0.444444, 0.555555)$ に対して、 g_1 の験算では g_3 が不可能領域にあるため、さらに設計変数の修正が必要であることを示している。再試算の結果、設計変数は $(x_1, x_2) = (0.999999, 0.999999)$ と求まり、自動的に初期値が可能領域に存在するように修正され、同時に活性な制約面 g_2, g_3

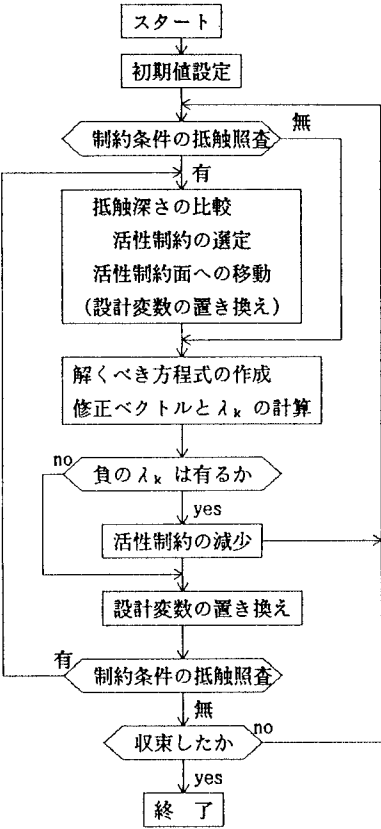


図-2 極値探索法の基本的アルゴリズム

表-1 初期値の設定手順

①step	(x ₁ , x ₂) = (0, 0)							
	g _i (0,0)	g _{i1} (0,0)	g _{iz} (0,0)	γ _i	y _{i1}	y _{iz}	μ _i	備 考
②step	+1.000000 +0.200000 +0.200000	-1.000000 +0.800000 -1.200000	-1.000000 -1.000000 +1.000000	+1.41421 +1.28062 +1.56204	-0.707107 +0.624695 -0.768221	-0.707107 -0.780869 +0.640184	+0.707107 +0.156174 +0.128037	式(11) 式(12)
	Y _{ij}			μ _i		備 考		
③step	1.000000	0.110432	0.090536	0.707107	*右辺最大	式(22)		
④step	0.110432	1.000000	-0.979804	0.156174				
	0.090536	-0.979804	1.000000	0.128037				
⑤step	1.000000 0.000000 0.000000	0.110432 0.987805 -0.989802	0.090536 -0.989802 0.991803	0.707107 0.078087 0.064018				
⑥step	1.000000 0.000000 0.000000	0.111112 1.000000 -1.000000	0.090909 -1.000000 1.000000	0.707107 0.078568 0.064282	消去に使用済み *次回の消去軸 従属	式(26) 式(27)		
⑦step	1.000000 0.000000 0.000000	0.000000 1.000000 0.000000	0.202020 -1.000000 1.000000	0.698377 0.078568 0.000000	⑤⑥stepを繰り返す			
⑧step	ν ₁ =0.698377 ν ₂ =0.078568/√0.987805= 0.079051 ν ₃ =0.000000					式(29)		
⑨step	d x ₁ =0.444444, x ₁ =0+0.444444=0.444444 d x ₂ =0.555555, x ₂ =0+0.555555=0.555555					式(30)		
驗 算	g ₁ (0.444444,0.555555) = -0.000001 (= 0) g ₂ (0.444444,0.555555) = 0.000000 (= 0) g ₃ (0.444444,0.555555) = +0.222222 (不可能領域)					} (OUT!)		
①step	(x ₁ , x ₂) = (0.444444,0.555555)							
	g _i	g _{i1}	g _{iz}	γ _i	y _{i1}	y _{iz}	μ _i	
②step	-0.000001 +0.000000 +0.222222	-1.000000 +0.800000 -1.200000	-1.000000 -1.000000 +1.000000	+1.414213 +1.280624 +1.562049	-0.707107 +0.624695 -0.768221	-0.707107 -0.780869 +0.640184	+0.000000 +0.000000 +0.142263	
	Y _{ij}			μ _i				
③step	1.000000	0.110432	0.090536	0.000000	*右辺最大			
④step	0.110432	1.000000	-0.979804	0.000000				
	0.090536	-0.979804	1.000000	0.142263				
⑤step	1.000000 0.199138 0.090535	1.000000 0.039984 -0.979804	0.000000 0.000000 1.000000	-0.012879 0.139390 0.142263				
⑥step	1.000000 1.000000 0.090909	1.000000 1.000000 -4.900000	0.000000 0.000000 1.000000	-0.012933 0.139389 0.142263	従属 *次回の消去軸 消去に使用済み			
⑦step	0.000000 1.000000 4.990909	0.000000 1.000000 0.000000	0.000000 0.000000 1.000000	0.000000 0.697089 3.558002	⑤⑥stepを繰り返す			
⑧step	ν ₁ =0.000000 ν ₂ =0.697089/√0.039984= 3.486145 ν ₃ =3.558002							
⑨step	d x ₁ =0.555555, x ₁ =0.444444+0.555555=0.999999 d x ₂ =0.444444, x ₂ =0.555555+0.444444=0.999999							
驗 算	g ₁ (0.999999,0.999999) = -1.000000 (可能領域) g ₂ (0.999999,0.999999) = 0.000000 (= 0) g ₃ (0.999999,0.999999) = 0.000000 (= 0)					} (O. K.)		

の選定が可能になっている。なお、再試算時における第1ステップの初期値は $(x_1, x_2) = (0.4, 0.5)$ と置いても同一結果を得ることができる。

(2) プレートガーダーの最適桁高

一様断面のプレートガーダーにおける桁の全断面積を最小化する問題を考える。この場合の目的関数 Φ は次式で与えられる。

$$\Phi = \frac{6 A_g}{\beta t_o^2} \dots \dots \dots (32)$$

$$A_g = \frac{\sigma_c + \sigma_t}{\sigma_c \sigma_t} \left\{ \frac{M}{h} + \frac{t h (\sigma_c + \sigma_t)}{6} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 A_g は桁の全断面積、 M は最大作用曲げモーメント、 t および t_o は腹板の厚さ、最小板厚、 β は腹板の幅厚比、 h は腹板の高さ、 σ_c および σ_t は各々圧縮縁応力度、引張縁応力度を意味する。

いま、設計変数等の無次元量として

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{t}{t_o}, \quad x_2 = \frac{h}{\beta t_o}, \quad x_3 = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ca}}, \quad x_4 = \frac{\sigma_t}{\sigma_{ta}}, \\ F_o &= \frac{6 M}{\beta^2 t_o^3 \sigma_{ca}}, \quad F_1 = \frac{\sigma_{ta}}{\sigma_{ca}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

を用いる時〔ただし、 σ_{ca} および σ_{ta} は各々許容圧縮応力度、許容引張応力度である。〕、式(32)の目的関数 Φ は、

$$\Phi = \frac{F_o}{x_2 x_4} + \frac{F_o F_1}{x_2 x_3} + \frac{x_1 x_2 x_3}{F_1 x_4} + \frac{F_1 x_1 x_2 x_4}{x_3} + 2 x_1 x_2 \dots \dots \dots (35)$$

と書き直すことができる。

ところで、上式は x_1 に関して線形であり、機械的にNewton-Raphson法を適用することができない。そこで、第3章で提案した疑似目的関数を導入すると、その関数 Φ^* は

$$\Phi^* = \Phi + \frac{K_1}{2} (x_1 - \xi_1)^2 \dots \dots \dots (36)$$

と与えられる。

また、制約条件は次の5式を考える。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= 1 - x_1 \leq 0 && \text{〔最小板厚制限〕} \\ g_2 &= x_2 - x_1 \leq 0 && \text{〔腹板の幅厚比制限〕} \\ g_3 &= x_3 - 1 \leq 0 && \text{〔圧縮許容応力度による制限〕} \\ g_4 &= x_4 - 1 \leq 0 && \text{〔引張許容応力度による制限〕} \\ g_5 &= \frac{6 A_{co}}{\beta t_o^2} - \frac{F_o F_1}{x_2 x_3} + x_1 x_2 \left\{ 2 - \frac{x_4 F_1}{x_3} \right\} \leq 0 && \text{〔圧縮フランジの最小断面積〕} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

この中で、第5の制約条件 g_5 は、 A_c (圧縮フランジ断面積) $\geq A_{co}$ (圧縮フランジの最小断面積) を意味し、スラブ止めを取りつけるために必要な幅と最小板厚等を考えた制約である。

いま、具体的な数値計算例として

$$t_o = 0.8 \text{ cm}, \quad \beta = 256, \\ \sigma_{ca} = \sigma_{ta} = 1400 \text{ kgf/cm}^2, \\ A_{co} = 16 \alpha \text{ cm}^2 \quad (\alpha \text{ は係数})$$

の値を用いる。主要な数値は、道路橋示方書⁹⁾において、水平補剛材を1本配置し、さらにS S 4 1 級の規定値を参照して決めたものであるが、 A_{co} は不確定なものであるから、その大きさの影響を調べるためにパラメータ表現を採った。

まず、疑似項の定数 K_1 が最適桁高 x_2 の収束に与える影響について調べた。ここで、圧縮フランジの最小断面積の制限はないものとし、 $\alpha = 0$ と置いた。

仮の初期値は $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ 、収束判定は $\|dx\| \leq 10^{-5}$ で行った。 $K_1 = 0.01, 1.0, 10$ をパラメータとしてモーメント F_o と収束回数 N_c の関係およびモーメント F_o と最適桁高 x_2 の関係を同一図に表したのが図-3である。図中の下方に示した最適桁高曲線を得るためによる収束回数は、 $K_1 = 1$ の場合 $N_c = 5 \sim 14$ と少なく、モーメントに対して最も安定した収束回数を得ている。 $K_1 = 0.01$ の場合は収束回数が多く、しかもそのバラツキが大きい。また、 $K_1 = 10$ の場合は $F_o/6$ が0.6より大きくなるにしたがって、収束回数が急速に増大している。もし $K_1 = 10$ を用いてこの領域の計算を行う場合、 K_1 を漸次小さくしていくこと等により収束回数を減らす工夫を行う必要がある。

次に、 $\alpha = 0 \sim 16$ 、 $F_o/6 = 0.05 \sim 10.0$ を持つ場合の一連の最適桁高を求める計算を行った。その結果は、文献10)と同様な曲線を得ている。この一連の計算の間に現れた活性な制約条件の組み合わせは、表-2に示した9通りであったが、これらは必要に応じて適宜自動的に入れ換わり、プログラムの機能は充分であった。これらの組み合わせのうち、Case-1に相当する条件は、最終状態には現れず、探索の途中で一時的に現れただけである。なお、この計算では、定数 $K_1 = 1$ 、初期値 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ と置いて求めた。

また、計算の途中における活性制約条件の変化を表した例として、 $\alpha = 8$ 、 $F_o = 9.00$ で始めの初期値を意地悪く $x_1 = 1.5$ 、 $x_2 = x_3 = x_4 = 0.5$ とした場合を採り上げ、その途中の最適値への探索計算における初期値とその値によって得られる λ_k の値を表-3に示す。

すなわち、第2回の結果によって制約条件 g_1 を活性化し、第3回の結果からは制約条件 g_3, g_4, g_5 を活性化している。また、第4回の結果から g_3 を不活性化し、第5回の結果によって g_2 を活性化し、第6回の結果によって g_1 を不活性化している。それ以後は g_2, g_4 および g_5 が活性なものとして収束を図っている。なお、活性制約条件を外した時(第4回と第5回の間の λ_4)、その前後で活性であり続ける制約式に対する λ の値が大きく変化している。

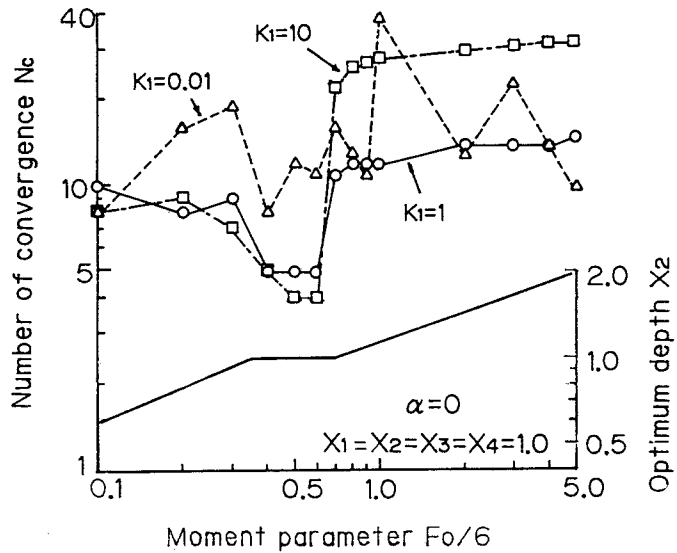


図-3 定数 K_1 が最適解への収束に与える影響

表-2 活性制約条件の組み合わせ

Case	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
1	活性	—	—	活性	—
2	活性	—	活性	活性	—
3	活性	—	—	活性	活性
4	活性	—	活性	活性	活性
5	活性	活性	—	活性	活性
6	活性	活性	活性	活性	—
7	—	活性	活性	活性	—
8	—	活性	活性	活性	活性
9	—	活性	—	活性	活性

8. まとめ

表-3 収束までの活性な制約条件の変化

本論文では、Lagrangeの未定乗数法を用いた多くの不等式制約条件を持つ極値探索を効率的に行う一計算方法を提案し、具体的な数値計算例にこの方法を応用した訳であるが、得られた結果は次のようにまとめられる。

- 1) この方法により、自動的にその活性等号制約条件を選び出す方法を、また可能領域から離れている初期値を可能領域に引き戻す修正法を確立できた。

- 2) 探索時におけるNewton-Raphson 法による修正ベクトルの大きさに制限を加えて

収束性の改善を図るためここでは探索点に関する仮定の2次関数を目的関数に加えることにより対処したが、かなり有効な方法であることが明らかになった。

- 3) プレートガーダーの最適桁高に関する具体的な計算例は、非線形な制約条件が1本しか無く、必ずしもこの方法の問題点をすべて包含するものとも言い切れないが、この例題の範囲では本法が充分その機能を果たすことができることを確認できた。

最後に、本論文は故伊藤文人先生（当時東京都立大学教授）の御指導のもとに行った研究を発展させたものであり、ここに心より感謝するとともに御冥福をお祈り致します。

参考文献

- 1) 土木学会編：構造システムの最適化～理論と応用～，1988.9
- 2) 山田善一・大久保禎二監訳：最適構造設計－概念・方法・応用－，丸善，1983.10
- 3) 川井忠彦・戸川隼人監訳：最適構造設計－基礎と応用－，培風館，1977.6
- 4) 日本鋼構造協会編：最適化手法の構造設計・解析への応用，培風館，1980.10
- 5) G.N.Vanderplaats：Numerical optimization techniques for engineering design with applications, McGraw-Hill, 1984
- 6) 長 尚：構造物の最適設計，朝倉書店，1971.9
- 7) 平田恭久・伊藤文人：活性な制約面の選択を主眼とした最適化問題の解法，土木学会論文集，第386/I-8 pp.257～266，1987.10
- 8) 杉本博之：制約最適化問題のスケーリングについて，土木学会論文集，第356/I-5，pp.579～582，1985.10
- 9) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（Ⅱ鋼橋編），1980
- 10) 伊藤文人・野上邦榮：許容応力度設計法によるプレートガーダーの最適桁高，土木学会論文集，第380/I-7，pp.321～330，1987.4

（1989年10月2日受付）