

バネ-質点モデルによる接触を考慮した
クラックの動的解析

DYNAMIC ANALYSIS OF A CRACK WITH SPRING-MASS CONTACT

廣瀬壮一* 北原道弘**

By Sohichi HIROSE and Michihiro KITAHARA

The present study concerns the dynamic analysis of a crack with spring-mass contact. Such a crack may be considered as a simplified model of a thin elastic inclusion. The boundary integral equations are formulated for both displacement and traction on crack surfaces. These singular integral equations are coupled to each other through the contact conditions on crack faces and are solved numerically. Numerical results are presented for crack-opening displacements, stress intensity factors and scattering cross-sections. Results for a stress-free crack are compared with other published solutions. Also, numerical solutions for a spring-mass contact crack are compared with those for an inclusion. It is found that our solutions are in good agreement with those obtained by other methods. Finally we show numerical results for scattering by a crack with various spring constants.

1. まえがき

クラックの動的挙動の解明は、動的破壊力学、定量的非破壊評価、地震工学など様々な分野における重要な課題である。そのため、数多くのクラックの動的解析が行われてきたが、そのほとんどは、応力フリーのクラックに関するものであった。(例えば、文献 1)を参照)しかしながら、最近になって、クラック面での力学的挙動をより正確に表現するために、応力フリー以外のクラックの解析が行われるようになってきた。そのようなクラックのモデルの一つにバネによる接触を考慮したクラックがある。Ryan and Mall²⁾とThompson and Fiedler³⁾は、それぞれ、偏平なインクルージョンによる弾性波動の散乱問題とクラックの閉口効果を考慮した波動の散乱問題を、バネ接触を考慮したクラックモデルを用いて解析した。また、Datta et al.⁴⁾、Kitahara et al.⁵⁾は、それぞれ、異質材料間のインターフェイズをシェル要素とバネ要素でモデル化し、その動的挙動を明らかにした。

本研究は、上述のバネによる接触モデルをバネ-質点モデルによる接触に拡張して、クラックの動的解析を行うものである。バネ-質点系による接触モデルは、偏平なインクルージョンの簡易力学モデルと考えられる。もちろん、質点の質量を0と仮定すれば、バネのみによる接触を考慮したクラックの解析が可能であるし、バネ定数を0にすれば、応力フリーのクラックの解析も可能である。定式化は、境界積分方程式法を用いて行われた。クラック面上の変位と表面力を特異境界積分方程式によって表現し、これらの2つの方程式をクラッ

* 工博 岡山大学助手 工学部土木工学科 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

** 工博 東海大学助教授 海洋学部海洋土木工学科 (〒424 清水市折戸3-20-1)

ク面上の接触条件によって結合することによって、数値的に解析がなされた。解析例においてはクラック開口変位や応力拡大係数などを様々な力学パラメーターに対して求めると共に、既存の解との比較を行い、本モデルの妥当性を検討した。

2. 問題

Fig.1に示すように均質、等方な2次元無限弾性体D内にあるクラックSを考える。クラックSは、 S^+ と S^- の2つのクラック面からなり、質点mを間にはさんだバネ λ_1 、 λ_2 によって互いに連結されているものと仮定する。(Fig.2参照)ただし、質点とバネはクラック面上に連続的に分布しており、 λ_1 、 λ_2 、mは単位長さ当りの定数である。

このようなバネ-質点モデルによる接触を考慮したクラックは、Fig.3に示すような偏平なインクルージョンの簡易力学モデルと考えることができる。もし、インクルージョン内のポアソン比の影響と x_1 方向に関する微係数を無視すれば、定数 λ_1 、 λ_2 、mとインクルージョンのせん断係数 μ' 、ヤング係数 E' 、密度 ρ' との間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\mu'/\epsilon \\ \lambda_2 &= 2E'/\epsilon \\ m &= \epsilon\rho' \end{aligned} \tag{1}$$

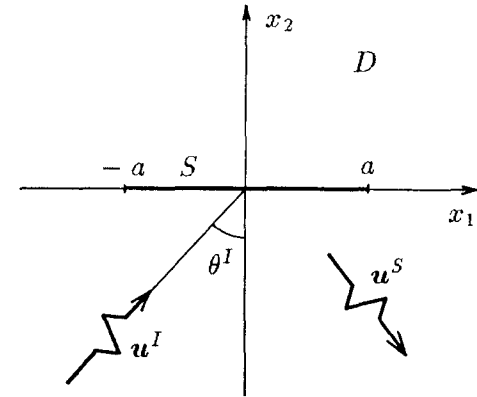


Figure 1 A line crack subject to a plane incident wave.

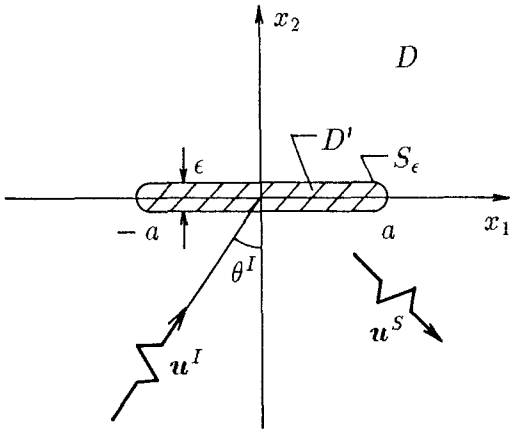


Figure 3 A thin inclusion subject to a plane incident wave.

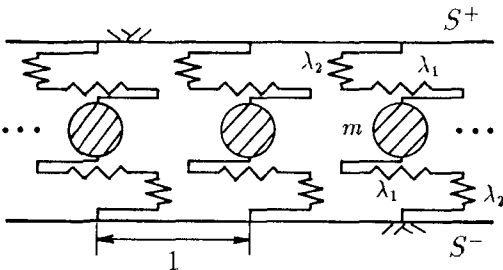


Figure 2 Spring-mass model on crack surfaces.

ただし、 ϵ はインクルージョンの幅を表し、 $\epsilon/a \ll 1$ であると仮定する。

入射波 u^I は、角周波数 ω の時間調和な面内平面波（縦波：L 波、あるいは、横波：T 波）で、入射角 θ^I で入射するものとする。この時、入射波とクラックとの相互作用によって、散乱波 u^S が発生するので、全変位場 u は $u = u^S + u^I$ として定義される。

3. 境界積分方程式

まず、Fig.3 に示すようなインクルージョンによる散乱問題を考えよう。領域 D 内の点 x における変位 $u(x)$ は、次のように積分表現できる³⁾。

$$u(x) = u^I(x) + \int_{S_\epsilon} U(x, y) t(y) dS_y - \int_{S_\epsilon} T(x, y) u(y) dS_y \quad x \in D \quad (2)$$

ただし、 S_ϵ はインクルージョン D' を取り囲む境界を表す。また、 $U(x, y)$ は、2 次元定常動弾性問題の基本解を表し、 $T(x, y)$ は次式で定義される 2 重層核である。

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \mu \left[\left\{ \left(\frac{k_T}{k_L} \right)^2 - 2 \right\} n_y \otimes \nabla_y + 2(n_y \cdot \nabla_y) 1 + n_y \times \nabla_y \times \right] U(x, y) \\ &\equiv \Gamma(n_y; \nabla_y) U(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 μ は領域 D におけるせん断剛性、 k_T 、 k_L はそれぞれ、 D 内における横波、縦波の波数を表し、 n_y は点 y における単位法線ベクトルである。また、式(2)に対して、表面力作用素 $\Gamma(n_x; \nabla_x)$ を作用させると、 $x \in D$ における表面力は以下のように積分表現される。

$$t(x) = t^I(x) + \int_{S_\epsilon} V(x, y) t(y) dS_y - \int_{S_\epsilon} W(x, y) u(y) dS_y \quad x \in D \quad (4)$$

ここに、 $V(x, y) = \Gamma(n_x; \nabla_x) U(x, y)$ 、 $W(x, y) = \Gamma(n_x; \nabla_x) T(x, y)$ である。

さて、式(2)と(4)において、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすると、Fig.1 に示すようなクラックの問題に対する積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} u(x) &= u^I(x) - \int_S U(x, y) \{t^+(y) - t^-(y)\} dS_y \\ &\quad + \int_S T(x, y) \{u^+(y) - u^-(y)\} dS_y \quad x \in D \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} t(x) &= t^I(x) - \int_S V(x, y) \{t^+(y) - t^-(y)\} dS_y \\ &\quad + \int_S W(x, y) \{u^+(y) - u^-(y)\} dS_y \quad x \in D \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $u^\pm$ 等はクラック面 $S^\pm$ 上の量を表し、 S 上の法線ベクトル n は S^- から S^+ の方向へ向いているものとする。式(5)、(6)において、 $x \in D \rightarrow x_0 \in S$ なる極限操作を行えば次のような境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{u^+(x_0) + u^-(x_0)\} &= u^I(x_0) - \int_S U(x_0, y) \{t^+(y) - t^-(y)\} dS_y \\ &\quad + \text{p.v.} \int_S T(x_0, y) \{u^+(y) - u^-(y)\} dS_y \quad x_0 \in S \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{t^+(x_0) + t^-(x_0)\} &= t^I(x_0) - \text{p.v.} \int_S V(x_0, y) \{t^+(y) - t^-(y)\} dS_y \\ &\quad + \text{p.f.} \int_S W(x_0, y) \{u^+(y) - u^-(y)\} dS_y \quad x_0 \in S \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、p.v.とp.f.は各々、積分の主値及び有限部分を表す。

4. クラック面上における接触条件

u^m を質点mの変位とし、 $q^\pm$ を $S^\pm$ 側にあるバネの力とする。このとき、以下の関係式が得られる。

$$\lambda(u^+ - u^m) = q^+ \quad (9)$$

$$\lambda(u^- - u^m) = q^- \quad (10)$$

ただし、 λ はバネ定数からなる次のマトリックスを表す。

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

ここでは、時間調和な問題を考えているので、質点mは以下の運動方程式を満足する。

$$q^+ + q^- + m\omega^2 u^m = 0. \quad (11)$$

また、クラック面S上では法線 n が S^- から S^+ に向いていることに注意すれば、次式を得る。

$$t^+ = q^+ \quad (12)$$

$$t^- = -q^-. \quad (13)$$

式(9)から(13)において u^m と $q^\pm$ を消去すれば、クラック面S上の接触条件は次のように表される。

$$t^+ + t^- = \lambda(u^+ - u^-) \quad (14)$$

$$t^+ - t^- = \gamma(u^+ + u^-) \quad (15)$$

ただし、

$$\gamma = (m\omega^2 \mathbf{1} - 2\lambda)^{-1} m\omega^2 \lambda.$$

5. 積分方程式の離散化

式(14)、(15)で表されるクラック面上の接触条件を式(7)、(8)に代入すると次のような境界積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}\langle u(x_0) \rangle = u^I(x_0) - \int_S U(x_0, y) \gamma \langle u(y) \rangle dS_y + \text{p.v.} \int_S T(x_0, y) [u(y)] dS_y \quad x_0 \in S \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}\lambda [u(x_0)] = t^I(x_0) - \text{p.v.} \int_S V(x_0, y) \gamma \langle u(y) \rangle dS_y + \text{p.f.} \int_S W(x_0, y) [u(y)] dS_y \quad x_0 \in S \quad (17)$$

ここに、 $\langle u \rangle$ と $[u]$ はそれぞれ $(u^+ + u^-)$ と $(u^+ - u^-)$ を表す。式(16)と(17)を離散化し、マトリックス形式で表すと、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{1} + \bar{\mathbf{U}} & -\bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{V}} & \frac{1}{2}\lambda - \bar{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle u \rangle \\ [u] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^I \\ t^I \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{U}}$ や $\bar{\mathbf{T}}$ などはそれぞれ、 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{T}$ などを積分核に持つ積分を離散化したものである。式(18)は $\langle u \rangle$ 、 $[u]$ を未知数とする連立一次方程式系を構成している。なお、数値計算における特異積分の評価法については文献 6)を参照されたい。

6. 数値計算例

以下に示す数値計算例においては、長さ $2a$ のクラックを51個の要素に分割した。クラック先端における要素には $\sqrt{r}$ (r :クラック先端からの距離)なる形状関数を導入してクラック先端での開口変位を正確に表現できるようにした。残りの要素については、一定要素を用いた。なお、全ての解析例は、ポアソン比 $\nu=0.25$ に対して行われたものである。

6. 1 既存の解との比較 (応力フリークラックの場合)

本論文で提案したクラックモデルにおいて $\lambda_1=\lambda_2=m=0$ とすれば、応力フリーのクラックを解析することができる。ここでは、平面L波がクラック面に垂直に入射した場合 ($\theta^i=0$) の散乱問題を考える。この問題は、Mal⁷⁾ によって解析がなされている。Fig.4は横軸に波数 $a k_T$ をとり、応力拡大係数の値を図示したものである。図中の τ_0 は入射波の応力振幅を表す。本解析法による解はMalの解とよく一致していることがわかる。Fig.5はいくつかの波数に対して、クラック開口変位の分布を図示したものである。この図においても本解析結果はMalによる解とよく一致している。

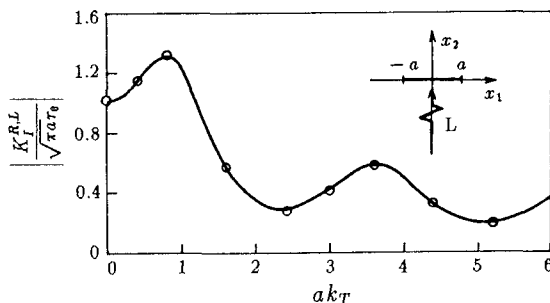


Figure 4 Stress intensity factor as a function of $a k_T$ for a stress-free crack subject to a normal incidence of an L-wave. — :Mal, ○:present method.

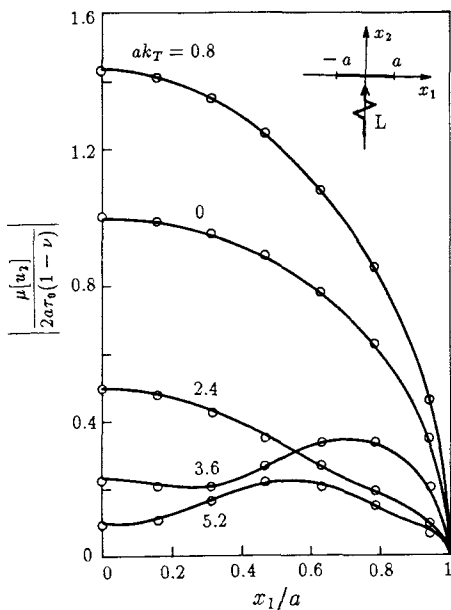


Figure 5 Crack-opening displacement versus x_1/a for an incident L-wave. — :Mal, ○:present method.

6. 2 インクルージョン問題の解との比較

前述したように、バネ-質点モデルによる接触を考慮したクラックは偏平なインクルージョンの簡易モデルと考えることができる。一方、インクルージョン問題そのものも境界積分方程式法によって容易に解析することができる。すなわち、D、及びD'のそれぞれの領域に対して境界積分方程式を導き、境界 S_ϵ における連続条件によって結合させて解けばよい⁸⁾。ここでは、クラック問題の解と、対応するインクルージョン問題の解を比較し、インクルージョンの簡易モデルとしてのバネ-質点モデルの妥当性を検討する。以下の解析例ではバネ-質点に対して次の2種類の定数が考えられた。

[case A] $a\lambda_1/\mu = 0.4, a\lambda_2/\mu = 1, m/a\rho = 0.1$

[case B] $a\lambda_1/\mu = 2, a\lambda_2/\mu = 5, m/a\rho = 0.1$

対応するインクルージョンの材料定数は式(1)より求められる。なお、インクルージョン問題の解析では $\epsilon/a = 0.1$ とした。

Fig.6は、クラックとインクルージョンの両者に対する開口変位を図示したものである。入射波は、波数 $a k_T = 0.8$ のT波で、クラック面に対して垂直に入射するものとした。図(a)、(b)はそれぞれcase A、Bの材料定数に対する解である。いずれの場合もクラックとインクルージョンの解との間に多少の差があるものの同様な挙動を示しており、本クラックモデルがインクルージョンの簡易モデルとして妥当であることを示している。もちろん、両者の差は、バネ-質点モデルにおいてインクルージョン内のポアソン比と x_1 方向の微係数を無視したことによるものである。

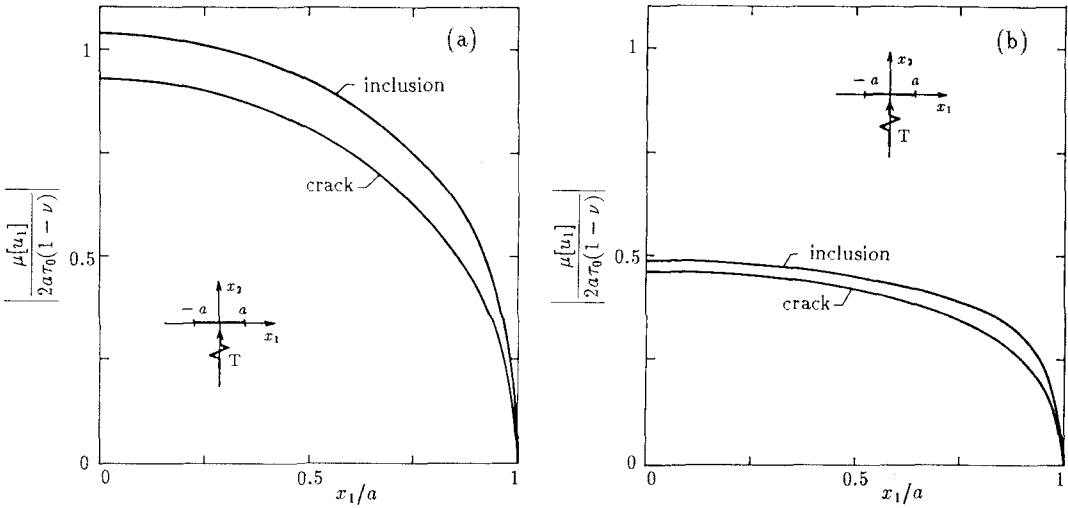


Figure 6 Comparison of $[u]$ for a crack with spring-mass contact with one for an inclusion. Figures (a) and (b) are for material constants of cases A and B, respectively. The wavenumber ak_T of an incident wave is 0.8.

6.3 バネによる接触を考慮したクラックによる散乱

ここでは、クラック面でのバネ定数を様々に変化させて、バネ定数がクラック開口変位、応力拡大係数、散乱断面積(scattering cross-section)などに及ぼす影響を明らかにする。入射波は、垂直入射するT波と仮定した。用いたバネ定数は以下の6種類である。ただし、質点の質量 m は0とした。

[case I] $a\lambda_1/\mu = 0, a\lambda_2/\mu = 0$

[case IV] $a\lambda_1/\mu = 1.6, a\lambda_2/\mu = 4$

[case II] $a\lambda_1/\mu = 0.4, a\lambda_2/\mu = 1$

[case V] $a\lambda_1/\mu = 3.2, a\lambda_2/\mu = 8$

[case III] $a\lambda_1/\mu = 0.8, a\lambda_2/\mu = 2$

[case VI] $a\lambda_1/\mu = 6.4, a\lambda_2/\mu = 16$

Fig.7はcase IからVIまでのクラックに対する開口変位を図示したものである。ただし、図(a)、(b)はそれぞれ波数 $a k_T = 0.8$ と 3.6 の入射波に対する結果である。バネ定数が大きくなるにつれて開口変位が小さくなる様子がわかる。Fig.8は、クラック先端での応力拡大係数 K_{II} を、横軸に波数 $a k_T$ をとり図示したものである。バネ定数が増加すると応力拡大係数は減少し、波数の変化に伴う変動も少なくなることがわかる。

Fig.9はcase IからVIまでのクラックに対する散乱断面積を、横軸に ak_T をとって図示したものである。散乱断面積 σ^{sc} は単位時間当りのクラックによる散乱波のエネルギーと入射波のエネルギーの比を表す指標である。詳しい表現については文献 6),9)を参照されたい。Fig.9より、バネ定数が大きくなるにつれて散乱断面積は減少し、散乱波の発生が抑制されていることがわかる。

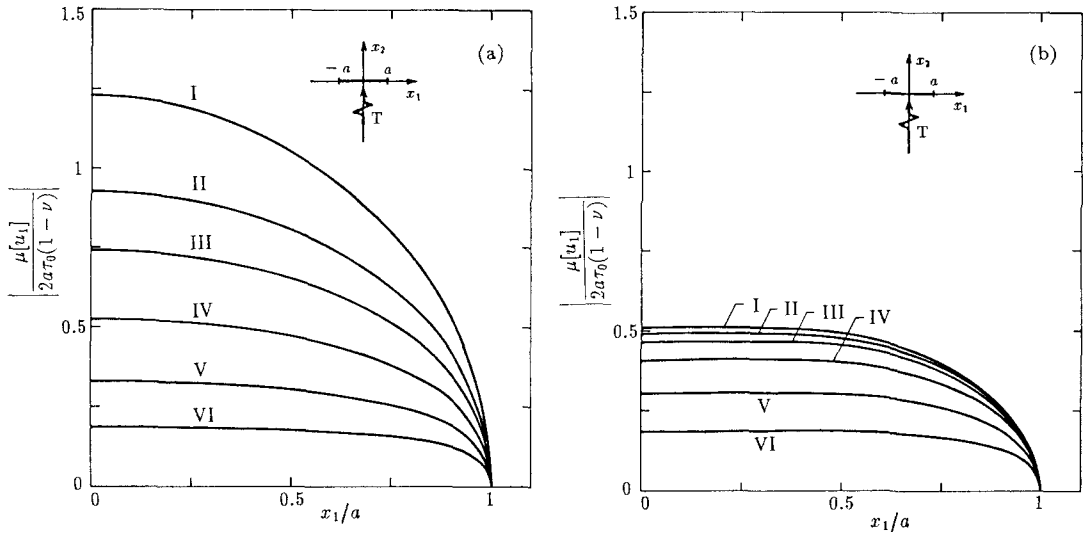


Figure 7 Crack-opening displacements for cracks of case I to VI subject to a normal incidence of a T-wave with the wavenumbers of $ak_T = (a):0.8$ and $(b):3.6$.

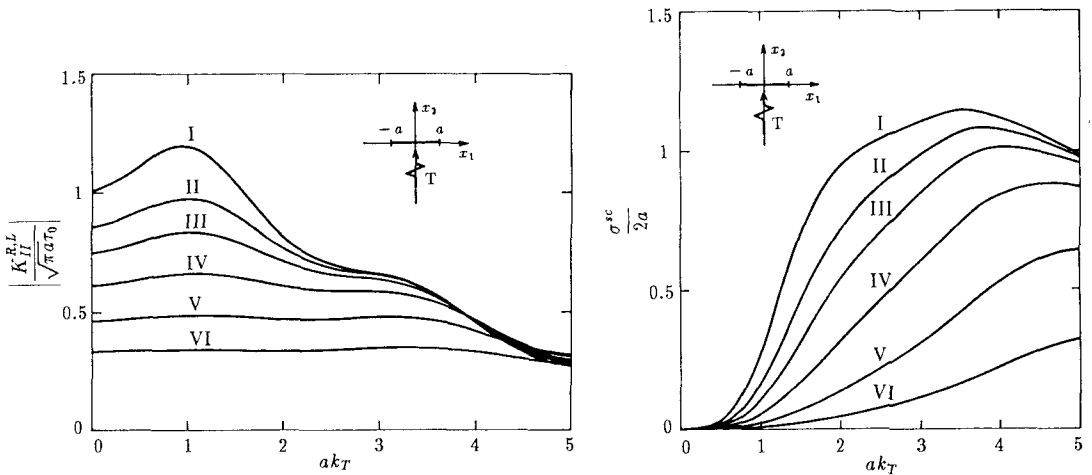


Figure 8 Stress intensity factor versus ak_T for cracks subject to a normal incidence of a T-wave.

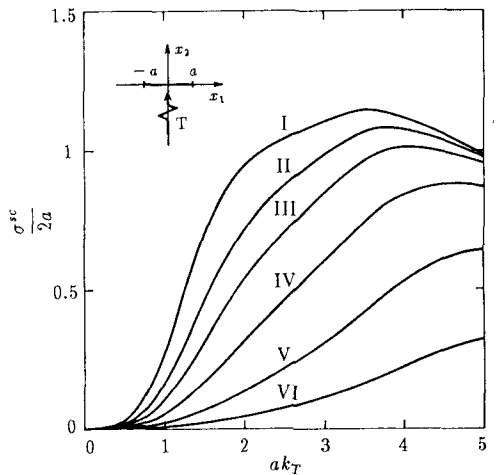


Figure 9 Scattering cross-sections versus ak_T for cracks subject to a normal incidence of a T-wave.

7. おわりに

本論文では、境界積分方程式法によりバネ-質点モデルによる接触を考慮したクラックの動的解析を行った。定式化は、いわゆる変位公式と応力公式から特異境界積分方程式を導いて、両者をクラック面上の接触条件により結合させて解くもので、クラックの解析法としては非常に一般的なものとなっている。本研究では、解析例として無限弾性体中の単一クラックの動的解析結果を示したにとどまったが、本解析法の応用性は広く、例えば、断層による地震波の散乱現象の解明などにも応用できると考えられる。また、本論文では、時間的に定常な線形問題を検討したが、直接、時間領域において同様な定式化を行うことにより、クラック面での非線形な接触問題も解析することが可能であろう。

参考文献

- 1) 西村、廣瀬、堀井、北原、クラック問題に対する境界積分方程式法の適用、構造工学論文集、Vol.35A, pp.255-267, 1989.
- 2) Ryan, R. L. and S. Mall, Interaction of a P-wave with a laterally stiffened slot, J. Appl. Mech. Vol.50, pp.63-66, 1983.
- 3) Thompson, R. B. and C. J. Piedler, The effects of crack closure on ultrasonic scattering measurements, In D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds.) Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 3, pp.207-215, Plenum Press, New York, 1984.
- 4) Datta, S. K., P. Olsson, and A. Boström, Elastodynamic scattering from inclusions with thin interface layers, In A. K. Mal and T. C. T. Ting (eds.) Wave Propagation in Structural Composites, AMD-Vol.90, pp.109-116, ASME, 1988.
- 5) Kitahara, M., K. Nakagawa, and J. D. Achenbach, Backscatter from a spherical inclusion with compliant interphase characteristics, In D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds.) Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 8, pp.47-54, Plenum Press, New York, 1989.
- 6) Hirose, S. and M. Kitahara, Scattering of elastic waves by a crack with spring-mass contact, Int. J. Numer. Meth. Eng. (submitted for publication)
- 7) Mal, A. K., Interaction of elastic waves with a Griffith crack, Int. J. Eng. Sci., Vol.8, pp.763-776, 1970.
- 8) Niwa, Y., S. Hirose, and M. Kitahara, Application of the boundary integral equation (BIE) method to transient response analysis of inclusions in a half space, Wave Motion, Vol.8, pp.77-91, 1986.
- 9) Barratt, P. J. and W. D. Collins, The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.61, pp.969-981, 1965.

(1989年10月2日受付)