

周期構造モデルの基本的性質

BASIC PROPERTIES OF PERIODIC STRUCTURE MODEL

堀 宗朗* 三浦 尚**

By Muneo HORI and Takashi MIURA

A periodic structure model is useful to estimate overall properties of composites or damaged materials consisting of a relatively regular microstructure. With the aid of the periodicity and the mirror image symmetry/antisymmetry, field variables in the periodic structure can be formulated more precisely and efficiently than before. In particular, conventional complex Fourier series expansion of the field variable is transformed to real Fourier series expansion of the same mathematical structure. Hence, numerical computation efforts to solve periodic structure problems can be reduced significantly. Moreover, it is shown that the overall properties of the periodic structure are defined consistently either from averaged constitutive relations or averaged energy relations in the unit cell.

1. 序

コンクリート等の複合材料は一般に微小な物質の集合から構成されており、材料の全体的な挙動は各構成物質の性質によって決定される。また、損傷を受けて微小亀裂を多数含むようになった材料には亀裂の影響が全体挙動に大きく現れる。材料の構成物質や亀裂を微小要素とし、その大きさを規準にする微視レベルでは、微小要素自体が均一であっても材料は不均一である。しかし、微視レベルより十分大きな巨視レベルでは、このような材料は均一とみなすことが可能である。また巨視レベルの材料挙動は全微小要素の微視レベルの平均的挙動で代表される。したがって、均一化された複合材料の挙動を推定するためには、各微小要素の挙動の解析とその微視的挙動の平均の推定が必要である。

このマイクロメカニクスの概念から、微視レベルの構成要素を十分多く含む有限体である代表体積要素、Representative Volume Element (RVE)、が巨視レベルの材料のモデルとして考案されている。現在までにRVEを用いた理論解析によって種々の材料の巨視的挙動の推定がなされている^{1), 2)}。微小要素の分布が比較的規則的で相互作用が大きい場合、RVEモデルに代わって、周期的に微小要素が存在する無限体である周期構造、Periodic Structure (PS)、が材料の全体挙動の推定に用いられることがある^{3) ~ 5)}。しかし、PSには、材料モデルとしての基本的な必要事項である解の一意性の保証や境界条件の設定の方法等に不明瞭な点があり^{4), 5)}、RVEに比べ余り理論解析に用いられていない。

本研究は、PSモデルの周期的な変位・歪・応力の物理場を厳密に考察し、周期性の数学的特性を検討

* Ph.D 東北大学助手 工学部土木工学科 (〒980 宮城県仙台市青葉区青葉)

** 工博 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒980 宮城県仙台市青葉区青葉)

する。また適当な平面に対する鏡像対称性・非対称性を物理場に明確に定義する。この周期性と鏡像対称・非対称性から、i)境界条件の設定とPS内の物理場の一意性の証明、ii)従来の複素数フーリエ展開から導かれる実数フーリエ展開による大幅な計算効率の改善、iii)材料の全体挙動を示す材料定数の合理的な定義、が可能になる。したがって、RVEに比べPSは材料モデルとして遜色がないことが示される。

2. 周期構造(PS)と単位体(UC)

無限三次元体、 V^* 、を考え、単位方向ベクトル e_i と x_i 直交座標系をとる。簡単のため、 V^* は線形弾性体と仮定しテンソル場 $C'(x)$ を V^* 内の点 x での弾性係数とする。次の関係が満たされる時、

$$C'(x+d) = C'(x), \quad d = \sum n_i a_i \quad (n_i \text{ 任意の整数}), \quad (2.1)$$

無限体 V^* をPS、 $\{a_i\}$ を‘規則性ベクトル’と呼ぶ。簡単のため、図1に示すように各 a_i は e_i と平行であると仮定する(a_i が e_i と平行でない場合も同様の扱いが可能である)。

無限周期構造 V^* を代表する有限体 U を、 U に対応する V^* の全ての部分内の物理場と U 内の物理場が一致するように選ぶ。 U をPSの単位体、Unit Cell (UC)、と呼ぶ。 U の形状は a_1, a_2, a_3 を3辺とする直方体であるが、 U の V^* 内での位置は $\{a_i\}$ だけからは決まらない(第4章参照)。

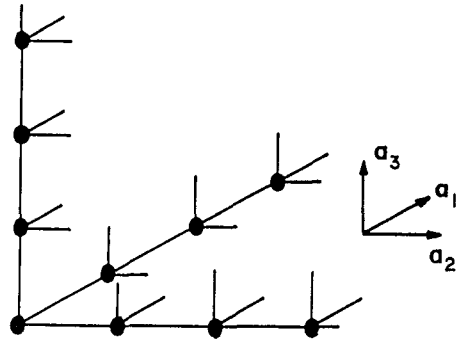


図1 周期構造PS

V^* 内及び U 内の物理場として、変位・歪・応力場、 $\{u(x), \varepsilon(x), \sigma(x)\}$ 、を考える。この物理場の支配方程式は、

$$\varepsilon = \text{sym}(\nabla \otimes u), \quad \sigma = C' : \varepsilon, \quad \nabla \cdot \sigma = 0, \quad (2.2)$$

である。ここで、 $\otimes$ と $:$ はテンソル積と2階のコントラクションを表す。支配方程式(2.2)の他に、

$$u(x+d) = u(x), \quad \varepsilon(x+d) = \varepsilon(x), \quad \sigma(x+d) = \sigma(x), \quad (2.3)$$

という周期性が各物理場によって満足される。

一様な歪場 $\varepsilon^0 = (\text{一定})$ は周期性(2.3b)を満足するが、それに対応する線形変位 $u^0 = x \cdot \varepsilon^0$ 、は周期性(2.3a)を満足しない。そこで、簡単のため、一様な応力場 $\sigma^0 = (\text{一定})$ と共に $\{u^0, \varepsilon^0, \sigma^0\}$ を一様場と呼び、全ての周期性(2.3)を満足する他の周期場 $\{u, \varepsilon, \sigma\}$ と区別する。

周期性(2.3)から無限体 V^* 内の物理場を有限体 U 内に限って考えることが可能である。しかし、 U の物理場を周期性(2.3)を用いて V^* に拡張するためには、物理場が U の境界 ∂U の近傍で滑らかであることが必要不可欠である。したがって、 ∂U 上の境界条件は、通常の有限体の境界条件が満たす力の平衡・変位の整合性以外に歪・応力場の連続性と平滑性を満足しなければならない。

3. 鏡像対称・非対称性

第2章で導入されたUCはPSの周期性を代表するものである。UC内の物理量の特性を考えるために、周期性とは別に三つの平面 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ に対する鏡像対称・非対称性を定義する。任意の点 x に対し、点 x^i を $x^i = x$ として、平面 $x_i = 0$ に対する x の鏡像点を x^i で表す。さらに点 $-x^i$ を x^{-i} とする($i = 1 \sim 4$)。この点 $x^{\pm 1 \sim \pm 4}$ から鏡像係数 α^{ij} を以下のように定義する。 $j = 1, 2, 3$ に対

し、

$$(\mathbf{x}^i)_j = \alpha^{ij} (\mathbf{x}^4)_j \quad (j \text{ not summed}), \quad (3.1)$$

そして $j = 4$ と $-1 \sim -4$ に対し

$$\begin{aligned} \alpha^{i4} &= 1, & \alpha^{i-1} &= \alpha^{i2} \alpha^{i3}, & \alpha^{i-2} &= \alpha^{i3} \alpha^{i1}, & \alpha^{i-3} &= \alpha^{i1} \alpha^{i2}, \\ \alpha^{i-4} &= \alpha^{i1} \alpha^{i2} \alpha^{i3} & (i \text{ not summed}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

表1に鏡像係数 α^{ij} を示す。尚、 α^{ij} は添字 i と j に関して対称である。

表1 鏡像係数 α^{ij}

$j =$	4	3	2	1	-1	-2	-3	-4
$i =$	4	1	1	1	1	1	1	1
3	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
2	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
-2	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
-3	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
-4	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1

鏡像係数 α^{ij} を用いて、点 $\mathbf{x}$ の場合と全く同様にベクトル $\mathbf{v}$ について8つの鏡像ベクトル $\mathbf{v}^i$ が定義できる ($\mathbf{v}^4 = \mathbf{v}$, $(\mathbf{v}^i)_j = \alpha^{ij} (\mathbf{v}^4)_j$)。したがって、図2に示されるように、点 $\mathbf{x}^4$ を足にもつベクトル $\mathbf{v}^4$ に対して、平面 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ に関する鏡像は、各々 $\mathbf{x}^1$ での $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{x}^2$ での $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{x}^3$ での $\mathbf{v}^3$ であり、また2つの平面、 $x_2 = 0$ と $x_3 = 0$, $x_3 = 0$ と $x_1 = 0$, $x_1 = 0$ と $x_2 = 0$ に関する鏡像は、各々 $\mathbf{x}^{-1}$ での $\mathbf{v}^{-1}$, $\mathbf{x}^{-2}$ での $\mathbf{v}^{-2}$, $\mathbf{x}^{-3}$ での $\mathbf{v}^{-3}$ であり、さらに3つの平面全てに関する鏡像は $\mathbf{x}^{-4}$ での $\mathbf{v}^{-4}$ である。

この8つの鏡像の組、 $\mathbf{x}^{\pm 1 \sim \pm 4}$ と $\mathbf{v}^{\pm 1 \sim \pm 4}$ を基にして、ベクトルの線形変換としてのテンソル場の鏡像が導入できる。すなわち、任意の n 階のテンソル場を T とし、 n 個のベクトル $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ に対して線形変換を $T_{p \dots q}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_p \dots \mathbf{w}_q \rightarrow R$ (実数) によって表すと、 T の平面 $x_i = 0$ に関する鏡像対称・非対称性を

$$T_{p \dots q}(\mathbf{x}^i) (\mathbf{v}^i)_p \dots (\mathbf{w}^i)_q = \pm T_{p \dots q}(\mathbf{x}^4) (\mathbf{v}^4)_p \dots (\mathbf{w}^4)_q \quad (3.3)$$

によって定義する (+: 鏡像対称, -: 鏡像非対称)。いま、鏡像係数 α^{ij} を用いて、与えられた T から8つのテンソル場 T^i が次のように定義できる。

$$(T^i)_{p \dots q}(\mathbf{x}^4) (\mathbf{v}^4)_p \dots (\mathbf{w}^4)_q = \sum \alpha^{ij} / 8 T_{p \dots q}(\mathbf{x}^j) (\mathbf{v}^j)_p \dots (\mathbf{w}^j)_q. \quad (3.4a)$$

各テンソル場 T^i は鏡像対称・非対称性を3つの平面それぞれに満足する。すなわち、

$$(T^i)_{p \dots q}(\mathbf{x}^k) (\mathbf{v}^k)_p \dots (\mathbf{w}^k)_q = \alpha^{ik} (T^i)_{p \dots q}(\mathbf{x}^4) (\mathbf{v}^4)_p \dots (\mathbf{w}^4)_q. \quad (3.5a)$$

これは以下のように証明される。 k を固定すると、 $(\mathbf{x}^k)_j$ は各 j に対しある特定の鏡像点 $\mathbf{x}^{\pm 1 \sim \pm 4}$ の1点と一致するので、 $j' = j'$ (j, k) 及び $\alpha^{j'q} = \alpha^{jq} \alpha^{kq}$ とおくと、 $(\mathbf{x}^k)_j = \mathbf{x}^{j'}$ と $(\mathbf{v}^k)_j = \mathbf{v}^{j'}$ である。次に $\alpha^{ik} \alpha^{ik} = 1$ を用いて、(3.4a)の右辺は、

$$\alpha^{ik} \sum \alpha^{ij'} / 8 T_{p \dots q}(\mathbf{x}^{j'}) (\mathbf{v}^{j'})_p \dots (\mathbf{w}^{j'})_q. \quad (3.5b)$$

したがって、(3.4a)で定義される T^i が、(3.3)を満足することがわかる。テンソル T^i の成分は、 $(\mathbf{v}^j)_p = \alpha^{jp} (\mathbf{v}^4)_p$ を用いて次のように与えられる。

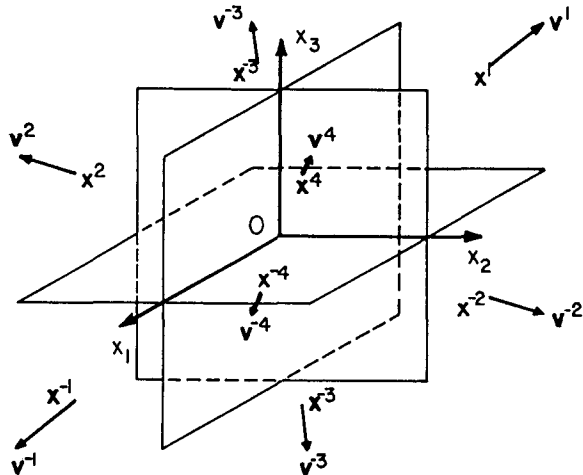


図2 鏡像点と鏡像ベクトル

$$(T^i)_{p\dots q}(x^k) = \sum \alpha^{i'j}/8 T_{p\dots q}(x^{j'}). \quad (3.4b)$$

ここで、 $i' = i'(i, p, \dots, q)$ は上で与えられた j' を拡張して次のように定義される。

$$\alpha^{i'j} = \alpha^{ij} \alpha^{pj} \dots \alpha^{qj}. \quad (3.6)$$

3つの平面 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ に対する鏡像対称性・非対称性には $2^3 = 8$ の組合せがある。8つのテンソル場 $\{T^i\}$ は、(3.5a) から明らかなようにその組合せ一つ一つに対応する。したがって、 T^i を第 i 鏡像対称・非対称性を満足する ' T の第 i 鏡像対称・非対称部分' と呼ぶことができる。 $i \neq j$ について $T^i = T^j$ であれば、 T^i と T^j はともに 0 であるから、 T の $\{T^i\}$ への分解は一意である。逆に $\{T^i\}$ はその和によって T を唯一定める。したがって、鏡像対称・非対称分解は一意的である。また (3.4b) に示されるように、テンソル場 T^i の成分 $(T^i)_{p\dots q}$ はもとのテンソル場 T の成分 $T_{p\dots q}$ の第 i' 鏡像対称・非対称部分である。定義 (3.6) より、 i' は i と必ずしも一致しないことに注意すべきである (補 A に 1 階と 2 階のテンソル場の例を示す)。

テンソル場の鏡像対称・非対称性は、偏微分されても変わらない。すなわち、任意の x_r に関して、

$$\partial/\partial x_r (T^i)(x^k)_{p\dots q} = \sum \alpha^{i'j'} \alpha^{rj'}/8 \partial/\partial x_r T_{p\dots q}(x^{j'}) \quad (3.7a)$$

となり、 $\nabla \otimes T^i = (\nabla \otimes T)^i$ と $\nabla \cdot T^i = (\nabla \cdot T)^i$ が成立する。さらに、テンソル積とコントラクションに対して鏡像対称・非対称部分は次のような関係満足する。任意のテンソル場 S と共に、

$$(T^i * S^k)(x^q) = \alpha^{jq} \alpha^{kq} T^i(x^4) * S^k(x^4) = \alpha^{j'q} (T^i * S^k)(x^4). \quad (3.7b)$$

ここで、 $*$ はテンソル積ないし任意の適当な階のコントラクションを表す。特に、 $j = 4$ である場合には、 $(T^4 * S^k)(x^q) = \alpha^{kq} (T^4 * S^k)(x^4)$ より $T^4 * S^k$ は第 k 鏡像対称・非対称性を満足することになる。

4. 単位体 (UC) の境界条件

第3章で示されたテンソル場の鏡像対称・非対称性は、UC 内の変位・歪・応力場、 $\{u, \varepsilon, \sigma\}$ 、に適用できる。簡単のため、UC の物理場の全体を M 、そして平面 $x_i = 0$ に関する鏡像変換を施した物理場の全体を M_i として表す。物理場の第 i 鏡像対称・非対称部分から成る $\{u^i, \varepsilon^i, \sigma^i\}$ を M にとると、

$$M = \alpha^{i1} M_1 = \alpha^{i2} M_2 = \alpha^{i3} M_3 \quad (4.1)$$

が成立する。テンソル場の鏡像対称・非対称性は積や偏微分に関して保存されることを考えると、物理場の支配方程式 (2.3) から、 $\{u^i, \varepsilon^i, \sigma^i\}$ に対して次の関係が常に成立する。

$$\varepsilon^i = \text{sym}(\nabla \otimes u^i), \quad \nabla \cdot \sigma^i = 0. \quad (4.2a, b)$$

弾性テンソル場 C' が第4鏡像対称・非対称性を満足する、すなわち、 $C' = (C')^4$ であると仮定する (この条件から UC の適当な位置が決定できる)。この時、各鏡像対称・非対称部分 $\{u^i, \varepsilon^i, \sigma^i\}$ に対して

$$\sigma^i = C' : \varepsilon^i \quad (4.2c)$$

が成立する。したがって、物理場全体の第 i 鏡像対称・非対称部分は、他の鏡像対称・非対称部分と独立して支配方程式 (2.3) の対応する第 i 鏡像対称・非対称部分である支配方程式 (4.2) を満足することがわかる。

UC の物理場は周期性を常に満足しなければならない。例えば、UC の2つの境界面 $x_1 = \pm a_1/2$ での変位 u と力 t は次の関係を満たす。

$$(u_1, u_2, u_3)(x^1) = (u_1, u_2, u_3)(x^4),$$

$$(t_1, t_2, t_3)(\mathbf{x}^1) = -(t_1, t_2, t_3)(\mathbf{x}^4), \quad \mathbf{x}^4 \text{ on } x_1 = a_1/2. \quad (4.3)$$

ここで、 t は ν を面の外向き法線として $\nu \cdot \sigma$ と与えられる。この物理場は $M = +M_1$ であれば、

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3)(\mathbf{x}^1) &= (-u_1, u_2, u_3)(\mathbf{x}^4), \\ (t_1, t_2, t_3)(\mathbf{x}^1) &= (-t_1, t_2, t_3)(\mathbf{x}^4), \quad \mathbf{x}^4 \text{ on } x_1 = a_1/2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

これから、周期性(4.3)と鏡像対称・非対称性(4.4)から変位と力の0成分が次のように定まる(図3参照)。

$$u_1 = 0, \quad t_2 = t_3 = 0. \quad (4.5a)$$

また、物理場が $M = -M_1$ であれば、

$$t_1 = 0, \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (4.5b)$$

となる。同様な境界条件は他の境界面にも定められる。一般に、 $M = \pm M_i$ であれば、

$$\begin{aligned} u^n &= 0, \quad t^t = 0, \quad \text{or} \\ u^t &= 0, \quad t^n = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

が成立する。ここで、添字 n と t は境界面 $x_i = \pm a_i/2$ に鉛直と平行な方向の変位と力を表す。

UCを有限体と見た場合、(4.2)を満足する $\{u^i, \varepsilon^i, \sigma^i\}$ に対して(4.6)は必要十分な境界条件である。さらに、一様場 $\{u^0, \varepsilon^0, \sigma^0\}$ が与えられていれば、(4.6)は

$$\begin{aligned} u^n &= (u^0)^n, \quad t^t = (t^0)^t, \quad \text{or} \\ u^t &= (u^0)^t, \quad t^n = (t^0)^n, \end{aligned} \quad (4.7)$$

となり、これも必要十分な境界条件である。したがって、周期場の各鏡像対称・非対称部分が一様場に対し唯一存在することが示される(鏡像対称・非対称分解の一意性から、任意の一様場に対する周期場の唯一性が証明される)。

周期場の各鏡像対称・非対称部分 $\{u^i, \varepsilon^i, \sigma^i\}$ にはUCの境界面で境界条件(4.7)が与えられるが、その和の周期場全体 $\{u, \varepsilon, \sigma\}$ には適当なUCでの境界条件が記述できない。これは、各鏡像対称・非対称部分の(4.7)の和が境界条件としては意味を持たないためである。したがって、PS問題は、‘与えられた一様場 $\{u^0, \varepsilon^0, \sigma^0\}$ に対して唯一決定される周期場 $\{u, \varepsilon, \sigma\}$ を求める’こととして与えるべきである。これによって周期場の無限PS内の平滑性が保証される(UCを単に有限体と見なした場合と根本的に異なる)。

鏡像対称・非対称部分が独立であれば、与えられた一様場に対応する周期場の鏡像対称・非対称性を以下のように整理できる。均一な歪場 ε^0 を鏡像対称・非対称分解することから、

$$\begin{aligned} \text{直歪}(\varepsilon^0)_{pp}: & \quad \text{第4鏡像対称・非対称部分} \quad (M = +M_1 = +M_2 = +M_3), \\ \text{せん断歪}(\varepsilon^0)_{23}: & \quad \text{第1鏡像対称・非対称部分} \quad (M = +M_1 = -M_2 = -M_3), \\ \text{せん断歪}(\varepsilon^0)_{31}: & \quad \text{第2鏡像対称・非対称部分} \quad (M = -M_1 = +M_2 = -M_3), \\ \text{せん断歪}(\varepsilon^0)_{12}: & \quad \text{第3鏡像対称・非対称部分} \quad (M = -M_1 = -M_2 = +M_3). \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon^0 = (\varepsilon^0)^4$ とは限らない。尚、一様場は他の鏡像対称・非対称部分(第1, 2, 3, -4鏡像対称・非対称部分)を伴わない。

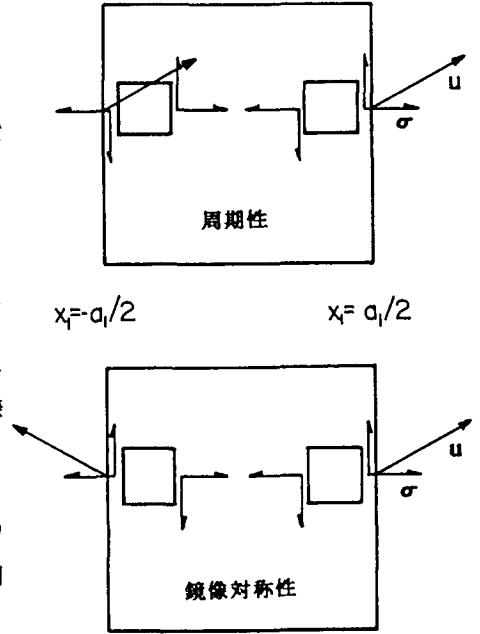


図3 境界面の変位と力の周期性と鏡像対称・非対称性

5. 等価周期構造と物理場のフーリエ展開

不均一な周期構造PSの変位場 u は $\nabla \cdot \{C' : (\nabla \otimes u)\} = 0$ を満足するが、弾性 C' が一定でないためこの支配方程式を直接解くことは難しい。そこで、PSの代わりに、均質な弾性 C とアイゲン応力を持つ等価周期構造、Equivalent Periodic Structure (EPS)、を導入する。EPSを V^{**} とし、 V^{**} の U と同一の U^* を V^{**} の単位体とする。EPSの問題は、‘与えられた周期・均一アイゲン応力 s^* と s^{*0} に対し、

$$(\sigma + \sigma^0) = C : (\varepsilon + \varepsilon^0) + (s^* + s^{*0}), \quad (5.1)$$

を満足する V^{**} の物理場 $\{u + u^0, \varepsilon + \varepsilon^0, \sigma + \sigma^0\}$ を求める’ことである。適当なアイゲン応力 $\sigma^* + \sigma^{*0}$ をとると V^{**} の物理場が V^{**} の物理場と一致する。このアイゲン応力 $\sigma^* + \sigma^{*0}$ の満たす条件は、整合条件

$$C' : (\varepsilon + \varepsilon^0) = C : (\varepsilon + \varepsilon^0) + (\sigma^* + \sigma^{*0}) \quad (5.2)$$

である。最初にEPSの問題を(5.1)から解き、ついで整合条件(5.2)を用いてPSの問題を解く。

単位体 $U^*(= U)$ の規則性ベクトル $\{a_i\}$ を用いて、周期的な u と s^* を次のように複素数フーリエ展開する。フーリエ変数 ξ を整数 n_i に対し $\xi_i = \pi n_i / a_i (i = 1, 2, 3)$ として定義すると、

$$u(x) = \sum' \mathcal{F}u(\xi) \exp(i\xi \cdot x), \quad s^*(x) = \sum' \mathcal{F}s^*(\xi) \exp(i\xi \cdot x). \quad (5.3)$$

ここで、 $\sum'$ は $\xi = 0$ を除く全ての ξ について無限和である。また、単位体 U^* での体積平均を $\langle \rangle$ で表すと、フーリエ係数は $\mathcal{F}u(\xi) = \langle u(x) \exp(i\xi \cdot x) \rangle$ と $\mathcal{F}s^*(\xi) = \langle s^*(x) \exp(i\xi \cdot x) \rangle$ で与えられる。構成則(5.1)を用いて、与えられた周期アイゲン応力 s^* によって生じる周期変位場 u の支配方程式は、

$$\nabla \cdot \sigma = \nabla \cdot \{C : (\nabla \otimes u) + s^*\} = 0, \quad (5.4a)$$

となる¹⁾。さらに(5.3)を用いて支配方程式(5.4a)をフーリエ展開すると、

$$- \xi \cdot C : \{\xi \otimes \mathcal{F}u(\xi)\} + i\xi \cdot \mathcal{F}s^*(\xi) = 0. \quad (5.4b)$$

尚、 V^{**} の任意の一樣場が支配方程式(2.3a, b)と(5.1)を満たすので、一樣場はこのままでは不定である。

前章のように弾性場 C が第4鏡像対称・非対称性を満足すると仮定する。 s^* の第 i 鏡像対称・非対称部分を s^{*i} で表すと、 u の支配方程式(5.4a)から第 i 鏡像対称・非対称部分 u^i の支配方程式、

$$\nabla \cdot \sigma^i = \nabla \cdot \{C : (\nabla \otimes u^i) + s^{*i}\} = 0 \quad (5.5a)$$

が導ける。点とベクトルの鏡像と同様に ξ フーリエ変数 ξ の鏡像 ξ^i を $\xi^4 = \xi, (\xi^i)_i = \alpha^{ij}(\xi^4)_j$ で定義し、テンソル場 T のフーリエ係数 $\mathcal{F}T$ の ξ に関する鏡像対称・非対称部分 $(\mathcal{F}T)^i$ を

$$((\mathcal{F}T)^i)_{p \dots q}(\xi^4) = \sum' \alpha^{i'j} (\mathcal{F}T)_{p \dots q}(\xi^j) \quad ((\xi^4)_p \geq 0) \quad (5.6)$$

と決める。ここで、 $\sum'$ は ξ^4 の相異なる鏡像 ξ^j についてのみ和を取ることを意味する。定義(5.6)を用いて場の支配方程式(5.5a)から、次のフーリエ係数の支配方程式が導ける⁵⁾。 $(\xi^4)_p \geq 0$ に対して、

$$- \xi^4 \cdot C : \{\xi^4 \otimes (\mathcal{F}u)^i(\xi^4)\} + i\xi^4 \cdot (\mathcal{F}s^*)^i(\xi^4) = 0. \quad (5.5b)$$

ここで、(5.5a)が(5.4a)の x に関する第 i 鏡像対称・非対称部分であるのと同様に、(5.5b)は(5.4b)の ξ に関する第 i 鏡像対称・非対称部分である。

フーリエ展開を施しても鏡像対称・非対称性が保存されるのは、次の関係が成立するからである。

$$\exp(i\xi \cdot x^i) = \exp(i\xi^i \cdot x). \quad (5.7)$$

核関数 $\exp(i\xi \cdot x)$ の第 i 鏡像対称・非対称部分を $\exp^i(i\xi \cdot x)$ として、実際に、任意のベクトル v を用いて(5.5a)を鏡像対称・非対称分解し、フーリエ展開すると

$$\sum' \sum \alpha^{ij} / 8 \{-\xi \cdot C : (\xi \otimes \mathcal{F}u(\xi)) + i\xi \cdot \mathcal{F}s^*(\xi)\} \cdot v^j \exp(i\xi \cdot x^j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum' \{ -\xi \cdot C : (\xi \otimes \mathcal{F} u(\xi)) + \xi \cdot \mathcal{F} s^*(\xi) \} \cdot v^j \exp^{i'}(\xi \cdot x^4) \\
&= \sum' \{ -\xi^4 \cdot C : (\xi^4 \otimes \mathcal{F} u^i(\xi^4)) + \xi^4 \cdot \mathcal{F} s^{*i}(\xi^4) \} \cdot v^j \exp^{i'}(\xi^4 \cdot x^4).
\end{aligned} \quad (5.8)$$

ここで、 $\mathcal{F} u^i$ の I は i' と同様各テンソルの添字によって値を変えるが、 $C = C^4$ の時は常に $I = i$ である。よって(5.5b)が導ける。 V^{∞} の均一弾性 C は必ずしも $C = C^4$ を満足するとは限らないが、4解のテンソル場の鏡像対称・非対称性より C_{ppqq} と $C_{pqpp} = C_{pqqp}$ (p, q not summed)以外の成分が0であれば、この条件は満たされる(補Bに(5.5a, b)の複素数フーリエ展開と実数フーリエ展開の具体的な例を示す)。

フーリエ展開された U^* 内の周期場 $\{u, \varepsilon, \sigma\}$ とその第 i 鏡像対称・非対称部分 $\{u^i, \varepsilon^i, \sigma^i\}$ は全く同一の構造を持つフーリエ係数の連立線形方程式(5.4b)と(5.5b)に支配されている。しかし、

$$\begin{aligned}
\exp(i \xi^4 \cdot x^4) &= \{C_1 C_2 C_3 - C_1 S_2 S_3 - S_1 C_2 S_3 - S_1 S_2 C_3\} - i \{S_1 S_2 S_3 - S_1 C_2 C_3 - C_1 S_2 C_3 - C_1 C_2 S_3\} \\
&\quad (s_i \equiv \sin(\xi_i x_i), c_i \equiv \cos(\xi_i x_i); i \text{ not summed})
\end{aligned} \quad (5.9)$$

であるから、フーリエ展開の核関数は、前者が複素数 $\exp(i \xi \cdot x)$ であるのに対し、後者は純実数ないし純虚数の $\exp^{i'}(i \xi^4 \cdot x^4)$ である。また、対応するフーリエ係数も前者は複素数であるのに対し、後者が純実数ないし純虚数である。フーリエ変数も、前者は0を除く全ての ξ であるのに対し、後者は正の ξ^4 に制限できる。したがって、数値計算においてフーリエ展開の無限和(5.3)を打ち切って近似する場合、未知フーリエ変数の数は、鏡像対称・非対称分解を物理場に施す結果、実部か虚部が省けることで1/2、さらに8つの関連する鏡像フーリエ係数 $\{\xi^i\}$ から ξ^4 だけを取ることで1/8に減らすことが可能である。

この鏡像対称・非対称分解はEPSの問題を解くことばかりでなく、整合条件(5.2)を通してPSの問題を解くことにもきわめて有効である。従来、(5.4b)から周期アイゲン応力 σ^* によって、周期歪 ε は、

$$\mathcal{F} \varepsilon(\xi) = -\text{sym}(\xi \otimes \{(\xi \cdot C \cdot \xi) \cdot \mathcal{F} \sigma^*(\xi)\}) \quad (5.10a)$$

と与えられることから、複素数フーリエ展開を整合条件(5.2)に施して、アイゲン応力の支配方程式、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \sigma^*(\xi) &= - \sum \mathcal{F}(C' - C)(\xi - \eta) : (\eta \otimes \{(\eta \cdot C \cdot \eta) \cdot \mathcal{F} \sigma^*(\eta)\}) \\
&\quad + \mathcal{F}(C' - C)(\xi) : \varepsilon^0
\end{aligned} \quad (5.11a)$$

が得られた。ここで均一アイゲン応力 σ^{*0} は、 $\mathcal{F} \sigma^*(0) = \sigma^{*0}$ として(5.11a)に含まれている。

鏡像対称・非対称分解によって、従来の(5.10a)の代わりに(5.5b)から ε^i が次のように求まる。

$$\mathcal{F} \varepsilon^i(\xi^4) = -\text{sym}(\xi^4 \otimes \{(\xi^4 \cdot C \cdot \xi^4) \cdot \mathcal{F} s^{*i}(\xi^4)\}) \quad (5.10b)$$

見かけ上(5.10a)と(5.10b)は同一であるが、前者は複素数の式であるのに対し、後者は純実数ないし純虚数の式である。整合条件のフーリエ展開(5.11a)を鏡像対称・非対称分解することで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \sigma^{*i}(\xi^4) &= - \sum \mathcal{F}(C' - C)(\xi^4 - \eta^4) : (\eta^4 \otimes \{(\eta^4 \cdot C \cdot \eta^4) \cdot \mathcal{F} \sigma^{*i}(\eta^4)\}) \\
&\quad + \mathcal{F}(C' - C)(\xi^4) : (\varepsilon^0)^i.
\end{aligned} \quad (5.11b)$$

ここで、 $\xi^4 - \eta^4$ が正である η^4 に対して和が取られている。したがって、EPSの問題と同様に、整合条件に対して鏡像対称・非対称分解を施すことでPSの問題を解く際の計算効率が大幅に上がることが期待できる。(ここで注意すべきことは、鏡像対称・非対称分解によって物理場の複素フーリエ展開が適当な複素共役をとられ実数フーリエ展開に帰着することが可能となっていることである)。

6. 周期構造の平均弾性

PSの全体挙動はその物理場の体積平均で代表されるので、鏡像対称・非対称分解によって平均弾性でも効率的に推定できる。この場合、PSの周期歪 ε と周期応力 σ の体積平均は常に0であるから、 $\overline{\varepsilon}$ は一

様歪 ε° と一様応力 σ° によって次のように定義される。

$$\sigma^\circ \equiv \bar{C} : \varepsilon^\circ \equiv C : \varepsilon^\circ + \sigma^{*\circ}. \quad (6.1)$$

ここで、(6.1)の右辺の $\sigma^{*\circ}$ は整合条件(5.2)を満たすE P S問題から決定される。

平均歪と平均応力の関係(6.1)以外に、弾性エネルギーの体積平均からもP Sの平均弾性は定義できる。

$$\varepsilon^\circ : \bar{C} : \varepsilon^\circ / 2 \equiv \langle (\varepsilon + \varepsilon^\circ) : C' : (\varepsilon + \varepsilon^\circ) / 2 \rangle \equiv \langle (\sigma + \sigma^\circ) : (\varepsilon + \varepsilon^\circ) / 2 \rangle. \quad (6.2)$$

P Sが材料モデルであるためには、2つの定義(6.1)と(6.2)が一致しなければならない。これには、

$$\langle (\sigma + \sigma^\circ) : (\varepsilon + \varepsilon^\circ) \rangle = \sigma^\circ : \varepsilon^\circ \leftrightarrow \langle \sigma : \varepsilon \rangle = 0, \quad (6.3)$$

すなわち、周期歪と周期応力の内積の体積平均が消えることが必要十分である。

周期歪と周期応力は2階のテンソル場であるから、 $i \neq j$ に対して ε^i と σ^j の対応する成分は相異なる核関数、 $\exp^i(i\xi^4 \cdot x^4)$ と $\exp^j(i\xi^4 \cdot x^4)$ によってフーリエ展開される。ここで、(5.9)から、

$$\langle \exp^i(i\xi^4 \cdot x^4) \exp^j(i\xi^4 \cdot x^4) \rangle \equiv 0. \quad (6.4)$$

したがって、 $\langle \varepsilon^i : \sigma^j \rangle = 0$ であり、(6.3)の右辺は $\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \sum \langle \sigma^i : \varepsilon^i \rangle$ となる。

歪と応力の鏡像対称・非対称部分はそれぞれ歪一変位関係式(2.3a)と平衡式(2.3b)を満足するから、

$$\int_U \sigma^i : \varepsilon^i dV = \int_U \sigma^i : (\nabla \otimes u^i) dV = \int_{\partial U} (\nu \cdot \sigma^i) \cdot u^i dS. \quad (6.5)$$

各境界面で成立する境界条件(4.6)から、 $(\nu \cdot \sigma^i) \cdot u^i = t^i \cdot u^i = 0$ が成立する。したがって、(6.4)と(6.5)より、(6.3)が証明できる。すなわち、P Sの平均弾性の2つの定義(6.1)と(6.2)は一致する。

第1章で述べられたR V Eの平均弾性もP Sと同様2通りの定義の仕方がある。通常、R V Eモデルでは境界条件を適当に選ぶことで2つの定義を同等にしているが⁶⁾、与えられる異なる境界条件下のR V Eの全体挙動が等しいという仮定が必要である。一方、上で示されたようにP Sモデルでは、鏡像対称・非対称分解を許す $C' = C'^4$ である限り常に2つの定義は同等で、与えられる均一解に依存しない。

7. 結論

周期構造モデルの基本的な特性として周期性と共に鏡像対称・非対称性を用いることで、周期構造内の物理場の性質が明確になる。また、従来よりきわめて効率的な物理場の定式化が見い出せた。さらに、複合材料や損傷を受けた材料の巨視挙動を解析するモデルとしての周期構造の有効性が示された。

参考文献

- 1) Mura, T. (1982), Micromechanics of defects in solids, Martinus Nijhoff, The Hague.
- 2) Hutchinson, J.W. (1987), Micromechanics of damage in deformation and fracture, Technical University of Denmark, Denmark.
- 3) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S. (1983), "Composites with periodic microstructure," Comp. & Structures, Vol. 16, No. 1-4, pp. 13.
- 4) Sahasakmontri, K., Horii, H., Hasegawa, A., and Nishino, F. (1987), "Mechanical properties of solids containing a doubly periodic rectangular array of cracks," Structure Eng./Earthquake Eng., Vol. 4, No.1, pp. 125s.
- 5) Hori, M. and Nemat-Nasser, S. "Some considerations on periodic structures," (to be

published).

- 6) Hill, R. (1965), "A self-consistent mechanics of composite materials," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp. 213.

補A テンソル場の鏡像対称・非対称性

1階と2階のテンソル場、 t と T 、の鏡像対称・非対称部分の成分はそれぞれ特定の鏡像対称・非対称性を満足する。以下にそれを各鏡像対称・非対称部分に対して示す。尚、 T の対称性、 $T_{ij} = T_{ji}$ 、を仮定する。

	$(t^i)_1$	$(t^i)_2$	$(t^i)_3$	$(T^i)_{11}$	$(T^i)_{22}$	$(T^i)_{33}$	$(T^i)_{23}$	$(T^i)_{31}$	$(T^i)_{12}$
$i = 4$	1	2	3	4	4	4	-1	-2	-3
3	-2	-1	4	3	3	3	2	1	-4
2	-3	4	-1	2	2	2	3	-4	1
1	4	-3	-2	1	1	1	-4	3	2
-1	-4	3	2	-1	-1	-1	4	-3	-2
-2	3	-4	1	-2	-2	-2	-3	4	-1
-3	2	1	-4	-3	-3	-3	-2	-1	4
-4	-1	-2	-3	-4	-4	-4	1	2	3

ここで $\pm 1 \sim \pm 4$ 第 $\pm 1 \sim \pm 4$ 鏡像対称・非対称性を満足することを意味する。

補B 等方弾性等価周期構造

周期構造の物理場の鏡像対称・非対称部分を実数フーリエ展開したものは、従来の複素フーリエ展開と同一の支配方程式に帰着することを示す。簡単のため、一様弾性 C が等方である等価周期構造を選ぶ。ラメの定数を λ と μ と置くと($\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$, $\mu = E/2(1+\nu)$)、 $C = \lambda \delta \otimes \delta + \mu I$ と表せる。ここで、 δ はクロネッカーのデルタ、 I は4階の対称単位テンソルである。複素数フーリエ展開(5.4b)は、

$$- \{(\lambda + \mu) \xi \otimes \xi + \mu (\xi \cdot \xi) \delta\} \cdot \mathcal{F}u(\xi) + \xi \cdot \mathcal{F}s^*(\xi) = 0. \quad (B.1)$$

ここで核関数は $\exp(i \xi \cdot x)$ であり、 $\mathcal{F}u$ と $\mathcal{F}s^*$ は複素数のフーリエ係数である。

物理場が第4鏡像対称・非対称性を満足すると仮定して、周期変位場と周期アイゲン応力場を u^4 と s^{*4} とおく。各成分は補Aで示す鏡像対称・非対称性を満足するので、次のように実数フーリエ展開できる。

$$\begin{aligned} (u^4)_1 &= \sum (\mathcal{F}u^4)_1 s_1 c_2 c_3, & (u^4)_2 &= \sum (\mathcal{F}u^4)_2 c_1 s_2 c_3, \\ (u^4)_3 &= \sum (\mathcal{F}u^4)_3 c_1 c_2 s_3, & & \\ (s^{*4})_{11} &= \sum (\mathcal{F}s^{*4})_{11} c_1 c_2 c_3, & (s^{*4})_{23} &= \sum -(\mathcal{F}s^{*4})_{23} c_1 s_2 s_3, \\ (s^{*4})_{22} &= \sum (\mathcal{F}s^{*4})_{22} c_1 c_2 c_3, & (s^{*4})_{31} &= \sum -(\mathcal{F}s^{*4})_{31} s_1 c_2 s_3, \\ (s^{*4})_{33} &= \sum (\mathcal{F}s^{*4})_{33} c_1 c_2 c_3, & (s^{*4})_{12} &= \sum -(\mathcal{F}s^{*4})_{12} s_1 s_2 c_3. \end{aligned} \quad (B.2)$$

直接、このフーリエ展開(B.2)を変位場の支配方程式(5.5a)に代入して整理すると、 $(\xi^4)_p \geq 0$ に対して、

$$- \{(\lambda + \mu) \xi^4 \otimes \xi^4 + \mu (\xi^4 \cdot \xi^4) \delta\} \cdot \mathcal{F}u^4(\xi^4) + \xi^4 \cdot \mathcal{F}s^{*4}(\xi^4) = 0. \quad (B.3)$$

ここで、核関数は第1、第2、第3成分に対し各々 $s_1 c_2 c_3$ 、 $c_1 s_2 c_3$ 、 $c_1 c_2 s_3$ である。

実数フーリエ展開(B.3)の核関数はそれぞれ $\exp^1(i\xi^4 \cdot x^4)$ 、 $\exp^2(i\xi^4 \cdot x^4)$ 、 $\exp^3(i\xi^4 \cdot x^4)$ に対応する。したがって、(B.2)は鏡像対称・非対称分解の(5.5b)と全く同等である。他の鏡像対称・非対称部分についても(5.5b)と同等の実数フーリエ展開が可能である。したがって、複素数フーリエ展開(B.1)が、鏡像対称・非対称分解によって実数フーリエ展開(B.3)に帰着することが確かめられる。

(1989年10月2日受付)