

# コンクリート構造物の有限要素解析における 埋め込み鉄筋モデルについて

AN EMBEDDED MODEL OF REINFORCEMENT FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONCRETE STRUCTURES

山口栄輝\*・太田俊昭\*\*・奥石正巳\*\*\*・川野清\*\*\*\*

By Eiki YAMAGUCHI, Toshiaki OHTA, Masami KOSHIISHI and Kiyoshi KAWANO

An embedded model of steel reinforcement for finite element analysis of concrete structures is investigated. In this model, the reinforcement is considered to be an axial member built into an isoparametric element. To this end, the displacements of the reinforcement are assumed to be consistent with those of the element. Thus the model characteristically allows the element to have reinforcements anywhere in it, which makes it easy to discretize concrete structures for finite element analysis. Furthermore, through various numerical examples, the embedded model is shown to be very accurate and computationally efficient. It is also found that the model can be used within lower-order elements without any degradation in accuracy.

## 1. 緒言

コンクリート構造物を有限要素法で解析する際には、鉄筋に沿って要素分割を行い、コンクリートを固体要素、その境界面(辺)上に位置する鉄筋をトラス要素でモデル化する方法がよく用いられている。これは離散鉄筋モデル(discrete model of reinforcement)と呼ばれる鉄筋の取り扱い方法であるが、この手法によれば特別な工夫を要することなく通常の有限要素プログラムでコンクリート構造物を解析することが可能となる。しかしながら、コンクリート構造物には相当量の鉄筋が様々な方向に配置されており、鉄筋配置により要素分割が制約を受ける離散鉄筋モデルで実際の構造物の解析を行おうとすると、有限要素がいびつな形状となることに起因する解析精度の低下、要素数の増加に伴うデータ入力の煩雑化および計算効率の低下などの問題が生じる。

これに対し、実際には線材である鉄筋が有限要素内に一様に分散して存在していると仮定した上で、鋼・コンクリート複合材料の構成則を導き鉄筋をモデル化する分散鉄筋モデル(distributed model of rein-

\* Ph.D. 九州大学助手 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

\*\* 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

\*\*\* 工修 清水建設(株) 土木本部技術第一部 (〒108 東京都港区三田3-13-16)

\*\*\*\* 九州大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

forcement) が提案されている<sup>1)</sup>。また有限要素をいくつかの層に分割し、コンクリートの層ではコンクリートの構成則を、鉄筋の位置する層では分散鉄筋モデルによる構成則を用いて要素剛性行列を求める方法も考えられている<sup>2)</sup>。後者の方法は要素の深さ方向にひずみが増加する場合にも適用が可能であり、曲げ問題にも有効となる。これらの鉄筋取り扱い法を用いれば、要素分割が鉄筋配置により制約を受けることはなくなるが、分散鉄筋モデルはあくまで近似的に鉄筋の剛性を計算に入れるものであり解析精度の点に難がある。

ところで、有限要素解析におけるこうした問題はコンクリート構造物に特有のものではない。例えば船体には多くの防とう材が取り付けられており、その解析を行う場合にも同様の問題が生じる。しかしながら船体の構造解析に対しては、近年、アラン織り型要素 (Aranea-Element)<sup>3)</sup> が提案され成功をおさめている。通常の解析では、防とう材の配置により要素分割が制約を受けることとなるが、アラン織り型要素では要素内の任意の位置に防とう材が存在するのを許しており、要素分割に際し何ら制約を受けることはない。そのために防とう材の挙動はそれが位置する要素の形状関数に従うと仮定しているが、アラン織り型要素により得られた計算結果は十分に精度を有している。

この研究成果によると、アラン織り型要素の基本的な考え方を用いて鉄筋をモデル化すれば、要素分割が簡単でかつ精度のよいコンクリート構造物の有限要素解析を行える可能性は十分にあると思われる。その際には、アイソパラメトリック要素に鉄筋を埋め込み、その鉄筋の挙動はアイソパラメトリック要素の形状関数により規定されると仮定すればよいと考えられる。この鉄筋モデルの考え方自体は、実はそれ程新しいものではなく、文献4)に埋め込み鉄筋モデル (embedded model of reinforcement) として紹介されている。しかしながら、この文献4)は1981年当時の最新研究を集めた報告書であるにもかかわらず、埋め込み鉄筋モデルについてはその基本的概念を簡単に記しているだけで、この鉄筋モデルの定式化、計算法、解析例や精度などについては全く触れていない。また著者らの知る範囲において、1981年以降もこの鉄筋モデルに関する研究は行われておらず、埋め込み鉄筋モデルについては未だ十分に研究されていないようである。

以上の点を考慮し、本論文では埋め込み鉄筋モデルを取り上げ、その定式化および計算方法を示した上で鉄筋コンクリート (RC) 梁の解析を行い、埋め込み鉄筋モデルの精度、適用性について検討する。

## 2. 定式化および計算法

ここでは埋め込み鉄筋モデルの定式化を示すために、図-1に示すような、鉄筋を埋め込んだアイソパラメトリック要素の剛性行列をまず考える。この図には便宜上四角形要素を示しているが、以下で行う定式化は3次元要素を含むあらゆるタイプのアイソパラメトリック要素に適用可能である。

この鋼・コンクリート複合有限要素の剛性はコンクリートによる剛性と鉄筋による剛性の和で表されることとなるが、コンクリートの剛性の算出に際しては鉄筋による断面の減少は無視できるものと仮定する。鉄筋比が高々数パーセントであることを考えればこれは妥当な仮定であり、実際、多くのコンクリート構造物の解析でこの仮定が採用されている。この仮定に従えば、コンクリートの要素剛性行列は通常のアイソパラメトリック要素の剛性行列となり、次式で表現することができる。

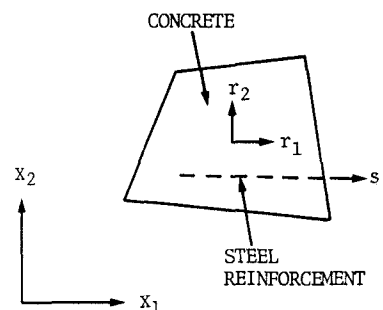


図-1 鉄筋を埋め込んだ有限要素

$$K_{Cij}^{ab} = \int_V N_i^a N_j^b C_{ijkl} N_k^c N_l^d dV \quad (1)$$

ここで  $i, j, k, l$  はテンソル指標,  $a, b$  は節点番号,  $N^a$  は節点  $a$  に対応した形状関数,  $C_{ijkl}$  はコンクリートの弾性テンソル,  $V^a$  は要素の領域を示している。

鉄筋を 1 次元部材とし、座標軸  $s$  を鉄筋に沿って定義する (図-1)。鉄筋に生じるひずみは軸線方向  $s$  の直ひずみ  $\varepsilon_s$  のみであり、埋め込み鉄筋モデルでは鉄筋の変形状態がアイソパラメトリック要素の形状関数で定義されるため、 $\varepsilon_s$  は次式で表されることとなる。

$$\varepsilon_s = T_{s,i} T_{s,j} N_{,i}^a U_j^a \quad (2)$$

ここに  $T_{s,i}$  は軸線  $s$  の向きを表す方向余弦ベクトル,  $U_j^a$  は節点  $a$  の変位ベクトルである。これより、鉄筋の要素剛性行列は次のように表示できる。

$$K_{ij}^{ab} = \int_{L^a} E_s A_s T_{s,i} T_{s,j} T_{s,k} T_{s,l} N_{,k}^a N_{,l}^b ds \quad (3)$$

この式で  $L^a$ ,  $E_s$ ,  $A_s$  はそれぞれ鉄筋の長さ、ヤング率、断面積を表しており、積分は鉄筋に沿った線積分となっている。

式(1)、(3)を用いれば、1本の鉄筋を埋め込んだ有限要素の剛性行列は

$$K_{ij}^{ab} = K_{c,ij}^{ab} + K_{s,ij}^{ab} \quad (4)$$

で表されることとなり、これがすなわち埋め込み鉄筋モデルを用いた場合の要素剛性行列となる。複数の鉄筋が埋め込まれている場合には、各鉄筋について式(3)の剛性行列を作成し、そのすべてを式(1)の剛性行列とたし合わせてやればよい。

式(1)、(3)の積分を閉じた形で求めるのは困難であるため、何らかの数値積分法で計算を行う必要がある。式(1)の剛性行列はごく普通のものであり、その積分には通常要素剛性行列作成に用いられるものをそのまま適用できる。これに対し式(3)の積分では、形状関数がアイソパラメトリック要素の局所座標系で定義されているため、この局所座標系における鉄筋の位置を知る必要がある。すなわち、ある全体座標  $x_i$  に対応する局所座標  $r_i$  を求める必要があり、次の連立方程式を  $r_i$  について解くことが要求される。

$$x_i = N^a(r) X_i^a \quad (5)$$

ここで  $X_i^a$  は節点  $a$  の全体座標を表しており、またこの式では  $a$  について総和規約を適用するものとする。

高次のアイソパラメトリック要素を用いた場合、式(5)は高次の連立方程式となるため閉じた形の解を求めるのは困難であり、その解法には何らかの数値解法を用いる必要がある。しかしながら、例えば、四角形の有限要素が直交性を保ち、かつ中間節点が辺を等分する点に位置する特別な場合には、式(5)は連立一次方程式に帰着し容易に解くことができる。これはかなり厳しい制限であるが、鉄筋配置に関係なく要素分割を行えるという埋め込み鉄筋モデルの利点を考えれば、この特別な場合というのはかなり多くの解析に当てはまるものと思われる。

8 節点を有する 2 次の四角形要素 (Q8 要素) を例にとり、式(5)が連立一次方程式に帰着する場合があることを具体的に示す。いま、この要素の形状および位置が図-2 のようであるとする。すなわち、局所座標軸  $r_1, r_2$  がそれぞれ全体座標軸  $x_1, x_2$  に平行で、要素形状は長方形、中間節点は各辺の中点に位置する

ものとする。Q8 要素においては、式(5)が次のように表示される。

$$\begin{aligned} x_1 &= N^q(r_1, r_2) X_1^q \\ x_2 &= N^q(r_1, r_2) X_2^q \end{aligned}$$

ここに

$$N^1(r_1, r_2) = -(1-r_1)(1-r_2)(r_1+r_2+1)/4$$

$$N^2(r_1, r_2) = (1-r_1^2)(1-r_2)/2$$

$$N^3(r_1, r_2) = (1+r_1)(1-r_2)(r_1-r_2-1)/4$$

$$N^4(r_1, r_2) = (1-r_1)(1-r_2^2)/2$$

$$N^5(r_1, r_2) = (1+r_1)(1-r_2^2)/2, \quad N^6(r_1, r_2) = (1-r_1)(1+r_2)(-r_1+r_2-1)/4 \quad (7)$$

$$N^7(r_1, r_2) = (1-r_1^2)(1+r_2)/2, \quad N^8(r_1, r_2) = (1+r_1)(1+r_2)(r_1+r_2-1)/4$$

(6)

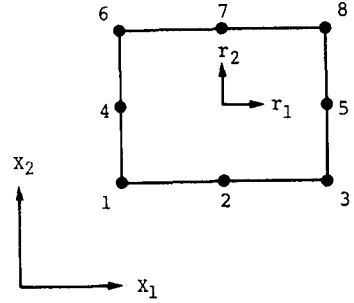


図-2 Q8 要素

ところで図-2の場合には、明らかに

$$X_1^1 = X_1^4 = X_1^6, \quad X_1^3 = X_1^5 = X_1^8, \quad X_1^2 = X_1^7 = (X_1^1 + X_1^3)/2 \quad (8)$$

という関係が成立するので、これを用いて式(6)の第一式を整理すると

$$x_1 = (X_1^3 - X_1^2) r_1 + X_1^2 \quad (9)$$

が得られる。同様の操作を式(6)の第二式に行うと次式が求められる。

$$x_2 = (X_2^6 - X_2^4) r_2 + X_2^4 \quad (10)$$

従って、図-2の場合には全体座標  $x_i$  から局所座標  $r_i$  を求めるのは非常に簡単な計算となる。

なお、以下の解析例においてはこの最も簡単な、制約条件の多い場合のみを取り扱うためその詳細は省略するが、先に記した条件のうち、局所座標軸  $r_1, r_2$  がそれぞれ全体座標軸  $x_1, x_2$  に平行、要素形状が長方形、という2つの条件を取り除いた場合においても、閉じた形の解を得ることは可能である。

### 3. 数値解析例

前節で示した定式化はどのようなアイソパラメトリック要素にも適用できるが、ここではまず平面解析でよく用いられる Q8 要素に埋め込み鉄筋モデルを適用し、その精度を検討する。

解析対象構造物としては図-3(a)に示す RC 梁を考えた。その寸法は図中に示しているが、これは構造実験でよく用いられる程度の大きさとなっている。材料特性としては  $E_c = 2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\nu_c = 0.2$ ,  $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  を仮定した。図-3(b)に示すように、本解析では対称性を利用し梁の 1/2 を 3 要素でモデル化したが、埋め込み鉄筋モデルの精度を検討する前に、まず無鉄筋の場合につきこの要素分割を用いた有限要素解析でどの程度の精度が得られるかを調べてみた。解析には低減次数積分、すなわち  $2 \times 2$  のガウス積分法を用いたが、得られた中央点のたわみは  $2.055 \text{ mm}$  であり、ベルヌーイ・オイラーの仮定に基づく

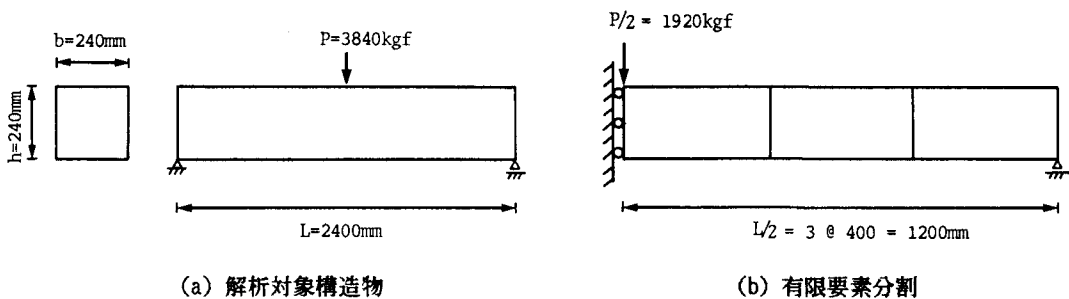


図-3 R C 梁

厳密解の 2 mm より 2.7 % 大きいものであった。この誤差が生じた理由として、有限要素解にはせん断ひずみによるたわみ量が含まれていることが挙げられる。実際、ティモシェンコ梁として厳密解を求めれば、中央点のたわみは 2.058 mm となり、有限要素解との差は 0.10 % となる。またせん断変形を小さくするために、せん断弾性係数をヤング率の  $10^5$  倍にして有限要素解析を行うと、たわみは 2.003 mm に減少し、ベルヌーイ・オイラー梁の厳密解に対する誤差はわずか 0.16 % となる。これらの解析結果より、3 要素を用いて有限要素解析を行えば高精度の解が得られ、離散化による誤差は十分に小さくなっていると結論づけることができる。図-3 (a)に示すような R C 梁の解析では、ほとんどの場合ベルヌーイ・オイラーの仮定が採用されることを考慮し、以下の有限要素解析では十分に大きなせん断弾性係数（ヤング率の  $10^5$  倍）を用いて計算を行い、結果をベルヌーイ・オイラーの仮定に基づく厳密解と比較する。また、式(3)の積分には  $2 \times 1$  のガウス積分法を用いることとする。

まず、総断面積  $10.13 \text{ cm}^2$  の鉄筋が全長にわたって配置されている R C 梁を考え、鉄筋の下縁からの距離  $h_s$  をパラメータとして解析を行った（図-4）。 $h_s$  には 6 個の値を与えて計算を行い、有限要素解として中央点のたわみを表-1 に厳密解とともに示している。厳密解は換算断面の図心軸に関する断面 2 次モーメント<sup>5)</sup>をもとに算出したものであるが、有限要素解の誤差はいずれの場合にも 0.20 % 程度であり、厳密解と非常によく一致した結果となっている。この誤差の大きさは離散化による誤差とほぼ同じ程度のものであり、これより埋め込み鉄筋モデルによる誤差は極めて小さいことが理解される。また図-5 には、図-4 に示す断面 A-A における軸線方向の直応力分布を図示している。図中に○で示す有限要素解はガウス積分点での応力であるが、これは実線で示す厳密解と非常によく一致しており、誤差はいずれの場合にも 0.05 % 以下となっている。

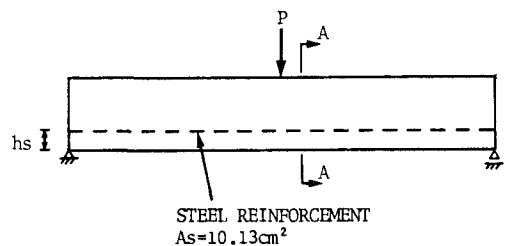


図-4 単鉄筋断面 R C 梁

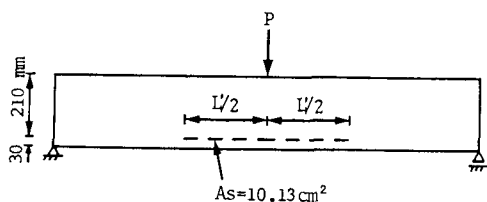
表-1 単鉄筋断面 R C 梁の中央点のたわみ

| hs/h | EXACT    | FEM      |
|------|----------|----------|
| 0.0  | 1.381 mm | 1.383 mm |
| 0.1  | 1.554    | 1.557    |
| 0.2  | 1.722    | 1.725    |
| 0.3  | 1.866    | 1.870    |
| 0.4  | 1.965    | 1.968    |
| 0.5  | 2.0      | 2.003    |

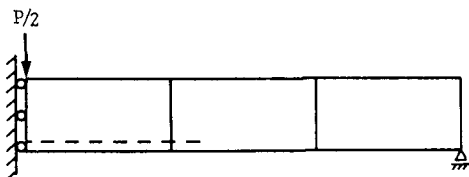
続いて複鉄筋断面の R C 梁を解析した（図-6）。この場合には、引張鉄筋の断面積  $A_s$  を  $10.13 \text{ cm}^2$  に保ったままで圧縮鉄筋の断面積  $A_s'$  を変化させて計算を行った。この解析においては、各要素に 2 本の鉄筋が埋め込まれていることになる。有限要素解として中央点のたわみに着目し、これを厳密解とともに示

したのが表-2であるが、この問題に対しても高精度の解が得られていることはこの表より明かである。この解析結果より、鉄筋数を増加させても埋め込み鉄筋モデルの解析精度は低下しないことが理解される。

以上の解析では、鉄筋が梁の全長にわたって配置され、各有限要素を貫いている場合のみを取り上げている。そこで、次に鉄筋の端点が要素の内部に位置する場合について埋め込み鉄筋モデルの精度を検討する。このために、図-7(a)に示すような、鉄筋が部分的に配置されているRC梁を先と同じ要素分割で解析した。図-7(b)からもわかるように、この解析では鉄筋の端点は必ずしも有限要素の境界边上に位置するわけではない。解析結果は、鉄筋の有無により断面2次モーメントが変化する変断面梁として算出した厳密解とともに表-3に示している。参考のために、鉄筋の端点がちょうど要素の境界边上にくる場合の解析も行った。表-3の結果のうち、 $L'/L = 0.3333, 0.6667, 1.0$  がこの場合に該当する。この計算結果からわかるように、鉄筋の端点が要素の内部に位置する場合においても精度が特に悪化するような傾向は認められない。これは、要素分割を行う際に、配置された鉄筋の位置を気にする必要が全



(a) 鉄筋配置



(b) 要素分割と鉄筋配置( $L'/L=0.4$ )

図-7 部分的に鉄筋を有するRC梁

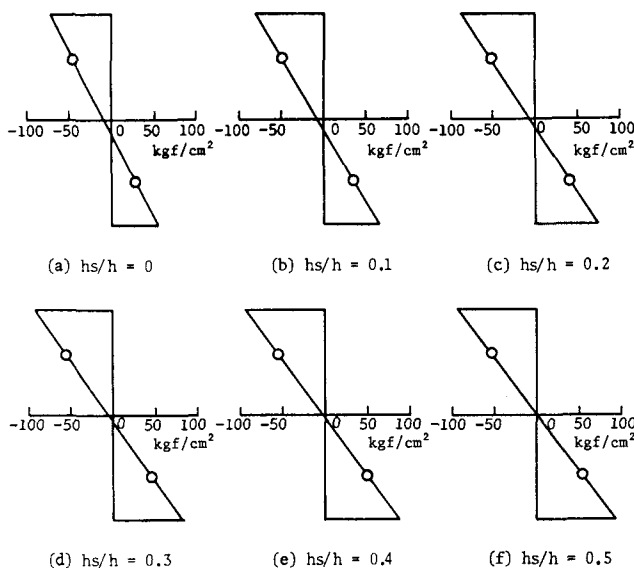


図-5 断面 A-A における直応力分布

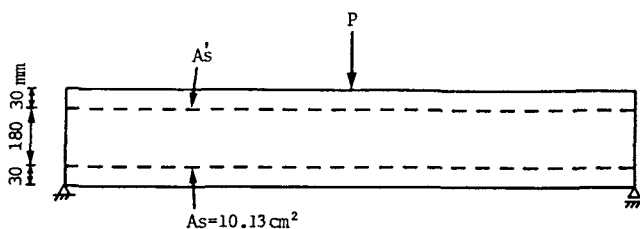


図-6 複鉄筋断面RC梁

表-2 複鉄筋断面RC梁の中央点のたわみ

| $As'/As$ | EXACT    | FEM      |
|----------|----------|----------|
| 0.2      | 1.505 ■■ | 1.509 ■■ |
| 0.4      | 1.428    | 1.432    |
| 0.6      | 1.362    | 1.366    |
| 0.8      | 1.305    | 1.309    |
| 1.0      | 1.255    | 1.259    |

表-3 部分的に鉄筋を有するRC梁の中央点のたわみ

| $L'/L$ | EXACT    | FEM      |
|--------|----------|----------|
| 0.2    | 1.803 ■■ | 1.801 ■■ |
| 0.4    | 1.684    | 1.682    |
| 0.6    | 1.623    | 1.625    |
| 0.8    | 1.600    | 1.604    |
| 0.3333 | 1.716    | 1.720    |
| 0.6667 | 1.612    | 1.616    |
| 1.0    | 1.597    | 1.600    |

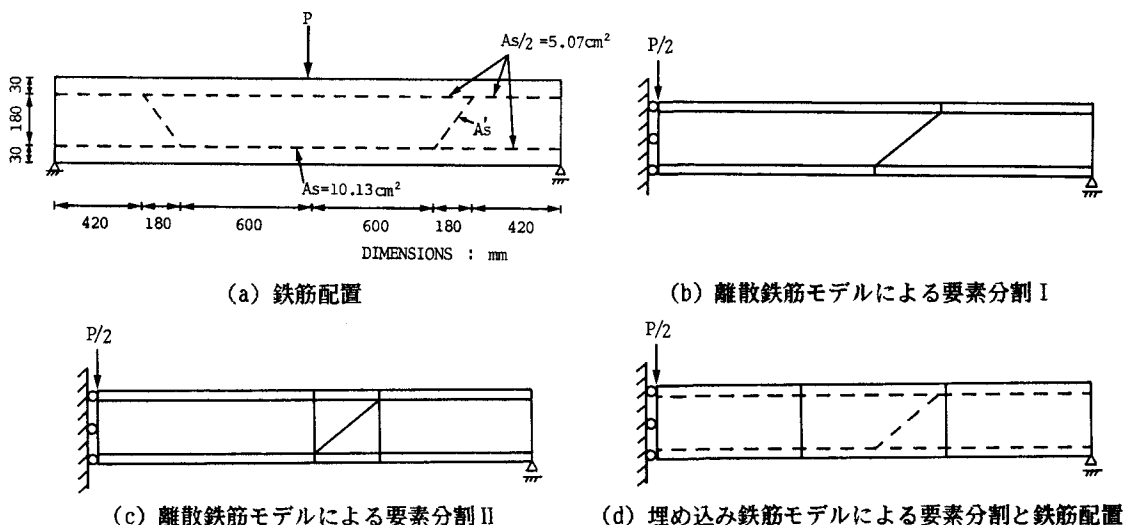


図-8 折曲鉄筋を有するRC梁

くないことを示唆するものであり、非常に有用な結論であると思われる。

さらに、引張鉄筋や圧縮鉄筋だけでなく折曲鉄筋をも有する、鉄筋配置が少し複雑になったRC梁の解析を行った(図-8(a))。ここでは、折曲鉄筋に対する埋め込み鉄筋モデルの精度を検討し、かつ埋め込み鉄筋モデルの利点を具体的に示すために、コンクリート構造物の解析によく用いられる離散鉄筋モデルでも解析を行った。離散鉄筋モデルでは鉄筋配置に沿って要素分割を行い、鉄筋はトラス要素で、コンクリートは固体要素でモデル化することとなる。トラス要素としては3節点を有する2次要素(T3要素)を用い、コンクリートの要素分割にはまずQ8要素のみを用いることを考えた。この場合、要素数、節点数を最小にしようとする、どうしても図-8(b)のようになり荒い要素分割にならざるを得ず、中段の2個の要素形状はいびつなものになってしまう。この要素分割で無鉄筋梁の解析を行ったが、中央点のたわみとしては1.926 mm が得られ、厳密解である2 mm より3.7%も小さな値となった。そこで、次に6節点の三角形要素で折曲鉄筋付近のコンクリートをモデル化することにし、図-8(c)に示す要素分割を行った。この場合には各四角形要素は直交性を保持しており、中央点のたわみも2.003 mm と厳密解によく一致した解を得ることができた。

図-8(c)の要素分割にT3要素でモデル化した鉄筋を組み込み離散鉄筋モデルで解析した結果と、埋め込み鉄筋モデルを用いて3要素(図-8(d))で計算した結果を比較したものが表-4である。図-8(a)のRC梁の鉄筋配置は、本来、曲げモーメントが半分になる断面で引張鉄筋の半分の曲げ上げたものであり、折曲鉄筋の断面積 $As'$ は引張鉄筋の断面積の半分になるべきははずのものである。しかしながら、折曲鉄筋は梁の曲げ剛性にあまり大きく寄与しないため、 $As'$ が小さい場合には、折曲鉄筋に対する埋め込み鉄筋モデルの解析精度を判断することは難しいと思われる。このことを考慮に入れ、ここでは $As'$ を変化させ、かなり大きな値の場合についても計算を行っている。表-4に示す結果から明らかなように、 $As'$ の値に関わらず、2つの鉄筋モデルによる解析結果は非常によく

表-4 折曲鉄筋を有するRC梁の中央点のたわみ

| $As'/As$ | DISCRETE MODEL | EMBEDDED MODEL |
|----------|----------------|----------------|
| 0.5      | 1.4156 mm      | 1.4150 mm      |
| 1.0      | 1.4148         | 1.4144         |
| 2.0      | 1.4133         | 1.4133         |
| 10.0     | 1.4073         | 1.4074         |

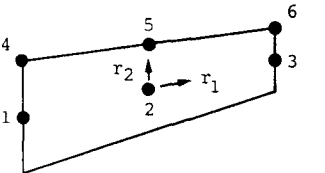
一致したものとなっており、折曲鉄筋に対しても埋め込み鉄筋モデルは有効であることがわかる。

ところで表-4の結果を得るために、離散鉄筋モデルによる有限要素解析では17要素（その内、トラス要素が7）、41節点を用いたのに対し、埋め込み鉄筋モデルを用いた解析ではわずか3要素、18節点を必要としたに過ぎない。有限要素解析では計算時間の多くが連立方程式の解法に費やされることを考慮すれば、必要とする節点数、ひいては自由度数が半分以下に過ぎないという本解析結果より、埋め込み鉄筋モデルを用いれば要素分割が簡単になるだけでなく、計算時間もかなり短縮できることが理解される。こうした埋め込み鉄筋モデルの利点は、鉄筋配置がさらに複雑なコンクリート構造物においてより顕著になると思われる。

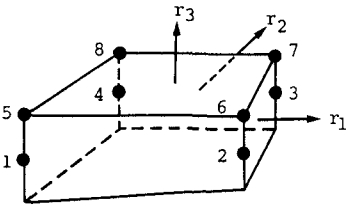
最後に、図-9の梁要素（B6要素）、板要素（P8要素）に埋め込み鉄筋モデルを適用して解析した結果を記す。これらは文献6)に提示されている degenerate 型の有限要素で、それぞれ梁、板/殻の有限変位解析に有効であることが検証されている。この2つの有限要素では、半分の節点が相対変位を節点変位として有するため、桁落ちによる精度の低下は非常に小さなものとなっている。またこれらの有限要素は、それぞれ通常の6節点四角形アイソパラメトリック要素、8節点六面体アイソパラメトリック要素から生成されたものであり、アイソパラメトリック要素としての性質を保持している。このため、本論文で示した埋め込み鉄筋モデルの定式化はこれら2つの要素にもそのまま適用できる。

先と同じRC梁を3要素の B6 要素および5要素の P8 要素で解析し、得られた結果のうち鉄筋位置をパラメーターとした際の計算結果（中央点のたわみ）を表-5に示している。この表からわかるように、B6 要素で解析を行うと極めて高精度の解が得られ、RC梁の解析を行う際には B6 要素が非常に有効であることがわかる。また P8 要素による解析の誤差は約 1 % となっている。これでも実用上は十分な精度であると思われるが、もしさらに高精度の解を得る必要があるならば解析に用いる要素数を増やせばよく、例えば  $hs/h = 0.0$  の場合に10要素で解析を行えば、中央点のたわみとして 1.377 mm が得られ誤差はわずか 0.25 % となる。ここで注意しておきたいのは、RC梁の解析で生じる誤差は、無鉄筋梁を解析する際に生じる誤差とほぼ同じ大きさであるという点である。これは解析誤差の大部分が離散化によるものであることを意味しており、埋め込み鉄筋モデルによる誤差は非常に小さいことを示している。従って、図-9の要素についても Q8 要素の場合と同じ結論が得られたことになる。

P8 要素は板や殻の解析に有効であるため、ここでの解析結果は埋め込み鉄筋モデルをこうした部材にも適用できることを示している。また文献4)では高次のアイソパラメトリック要素を用いることが示唆されているが、P8 要素が低次要素であることを考えれば、必ずしも高次の要素にこだわる必要はないことは明らかである。計算速度を問題とする場合にはどうしても低次の要素に頼らざるを得ないため<sup>7)</sup>、低次要素にも適用可能であるという結論は埋め込み鉄筋モデルの発展性を論じる際には重要になると思われる。



(a) B6 梁要素



(b) P8 板要素

図-9 degenerate 有限要素

表-5 degenerate 有限要素による解析結果

| hs/h | EXACT    | B6 x 3   | P8 x 5   |
|------|----------|----------|----------|
| 0.0  | 1.381 mm | 1.381 mm | 1.367 mm |
| 0.1  | 1.554    | 1.554    | 1.538    |
| 0.2  | 1.722    | 1.722    | 1.705    |
| 0.3  | 1.866    | 1.866    | 1.847    |
| 0.4  | 1.965    | 1.965    | 1.945    |
| 0.5  | 2.0      | 2.000    | 1.980    |

#### 4. 結言

本論文では、埋め込み鉄筋モデルの定式化、計算方法を示した後、数値計算例としてまず Q8 要素を用いて RC 梁の解析を行った。ここでは様々な鉄筋配置の RC 梁を取り上げたが、いずれの場合にも厳密解とよく一致した高精度の解が得られた。この RC 梁の解析精度は無鉄筋梁のものとほぼ同じであり、埋め込み鉄筋モデルによる誤差は非常に小さいことが判明した。また比較的複雑な鉄筋配置の RC 梁を、埋め込み鉄筋モデルと離散鉄筋モデルにより解析した。2つの鉄筋モデルによる計算結果は互いによく一致したものとなっているが、同じ程度の解析精度を得るのに離散鉄筋モデルでは2倍以上の節点数を必要とし、埋め込み鉄筋モデルを用いると要素分割が簡単になるだけでなく、計算効率も大きく改善されることが明らかとなった。さらに、他の2つの有限要素 (B6 要素, P8 要素) に埋め込み鉄筋モデルを適用し RC 梁の解析を行ったが、Q8 要素の場合と全く同じ結論が得られた。またこの解析では、B6 要素が RC 梁の解析に非常に有効であること、文献4)の記述に反し低次の要素にも埋め込み鉄筋モデルは適用できることが判明した。低次要素に適用可能であるという結論は、計算速度にこだわる際には非常に有用なものである。

以上のことより、埋め込み鉄筋モデルを用いれば、要素分割が簡単となり、かつ効率よく高精度の解析を行うことができると結論づけられる。しかしながら、ここでの結論は線形解析のみから導かれたものであり、今後は塑性やひびわれを考慮に入れた非線形構造解析に埋め込み鉄筋モデルを適用し、その有効性を検討していく必要がある。

#### 参考文献

- 1) 例えば, Suidan, M. and Schnobrich, W.C. : Finite element analysis of reinforced concrete, ST Div., ASCE, Vol.99, No.10, pp.2109-2122, 1973.
- 2) 例えば, Hand, F.R., Pecknold, D.A. and Schnobrich, W.C. : Nonlinear layered analysis of RC plates and shells, ST Div., ASCE, Vol.99, No.7, pp.1491-1505, 1973.
- 3) Lehmann E. und Hung, C.F. : Das Aranea-Element, Schiffstechnik, Bd.32, pp.84-96, 1985.
- 4) ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures : A state-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete, Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, ASCE Spec. Publ., 1981.
- 5) 水野高明 : 鉄筋コンクリート工学, 第2版, 森北出版, 1970年.
- 6) Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F. : Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE, Vol.3, No.1, pp.53s-61s, 1986.
- 7) 菊池昇 : 有限要素法とその応用-最近の話題と発展-, 土木学会論文集, 第392号/I-9, pp.1-11, 1988年.

(1989年10月2日受付)