

混合境界値帯板法による両端自由の 薄肉立体構造物の応力解析

Stress Analysis of Three-Dimensional Structures of Thin Plates
with Two Free Edges by Means of Finite Strip Method with Mixed Boundary.

岩崎 正二* 能町 純雄** 木田 哲量***

By Shoji IWASAKI, Sumio NOMACHI and Tetsukazu KIDA

To deal with the mixed boundary problem of three-dimensional structure by means of FSM, formulas for boundary forces at the ends on the long side and four corners of the strip are introduced by virtue of principle of minimum total potential energy. As numerical examples with these formulas, deflections in the rectangular plate with two opposite sides simply supported and remaining two free sides, the box-girder and the cylindrical shell with two opposite free ends, are analyzed.

1. ま え が き

従来より有限帯板法で平板要素からなる立体的な構造物を解析する場合には、未知変位は分割した帯板要素の節線変位成分となるため、有限要素法に比べて未知変位を少なくできる反面、節線変位を長手方向端部の境界条件を満足する関数で近似するため汎用性に乏しいきらいがあった。

本論文は、この点を考慮して有限帯板法のより一般的な解析理論を提示し薄肉立体構造物への適用を論じたものであり、従来の有限帯板法とは以下の2点について異なっている。

まず全ポテンシャルエネルギーの最小原理を用いることにより帯板要素の節線力に関する剛性方程式を求め、同時に帯板要素隅点に作用する節点力に関する剛性方程式も誘導する。この節点力に関する帯板公式を導入することで、隅点境界条件を一貫して組織的に取り扱うことが可能となる。

次に節線変位を隅点の境界値を含んだフーリエ級数で近似することにより、節線力および節点力の帯板公式の未知変位は、帯板の節線変位成分のみでなく隅点の境界値を含めたものとなる。これらの隅点境界値は、構造物全体の節線力および節点力のつりあい方程式を連立させることにより求められる。

以上のことから種々の境界条件を有する立体的な構造物の解析が可能となる。

このように本論文の目的は、帯板要素隅点の境界値を考慮した有限帯板要素公式を導き、この公式による

* 工修 岩手大学助手 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

** 工博 日本大学教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1丁目2-1)

*** 工博 日本大学助教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1丁目2-1)

箱型はりや円筒型シェルなど面内面外作用が共存するような薄肉立体構造物の解法を示すとともに、これらの構造物が両端自由の境界条件の場合どのような弾性挙動を示すかを明らかにしようとするものである。なお、このような隅点境界値を考慮した帯板法には林¹⁾の節点帯板法の研究がある。

2. 解析理論

2.1 有限帯板要素公式

図-1に示すような長さ l 、幅 b 、厚さ h の任意の帯板要素において、 x, y, z 方向変位を u, v, w とし、 y 方向たわみ角を θ とする。 r 辺、 $r+1$ 辺の節線力を面内力に関しては $\{T_{r \cdot r+1}, S_{r \cdot r+1}, T_{r+1 \cdot r}, S_{r+1 \cdot r}\}^T$ で表わし、面外力に関しては $\{Q_{r \cdot r+1}, M_{r \cdot r+1}, Q_{r+1 \cdot r}, M_{r+1 \cdot r}\}^T$ で表わす。これらの節線力に対応する節線変位をそれぞれ $\{u_r, v_r, u_{r+1}, v_{r+1}\}^T$ 及び $\{w_r, \theta_r, w_{r+1}, \theta_{r+1}\}^T$ とする。

帯板要素隅点の節点力についても同様に、図-2のように表わす。

また、図-3に示すように $u_r^0, v_r^0, w_r^0, \theta_r^0$ は $(0, 0)$ 点の変位成分、 $u_r^l, v_r^l, w_r^l, \theta_r^l$ は $(l, 0)$ 点の変位成分を表わす。同様に、 $u_{r+1}^0, v_{r+1}^0, w_{r+1}^0, \theta_{r+1}^0$ は $(0, b)$ 点、 $u_{r+1}^l, v_{r+1}^l, w_{r+1}^l, \theta_{r+1}^l$ は (l, b) 点の値である。

以下、帯板要素公式の誘導にあたっては微小変形を仮定しているので面内変形に関するものと面外変形に関するものに分離して取り扱う。

面内変形に関する帯板の全ポテンシャルエネルギー U_p は、次式のようになる。

$$U_p = \frac{N}{2} \int_0^l \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy - \int_0^l \{T\}^T \{u\} dx - \{T^0\}^T \{u^0\} - \{T^l\}^T \{u^l\} \quad (1)$$

ここで、 $\{T\}^T = \{T_{r \cdot r+1}, S_{r \cdot r+1}, T_{r+1 \cdot r}, S_{r+1 \cdot r}\}$,
 $\{u\}^T = \{u_r, v_r, u_{r+1}, v_{r+1}\}$,
 $\{T^0\}^T = \{T_{r \cdot r+1}^0, S_{r \cdot r+1}^0, T_{r+1 \cdot r}^0, S_{r+1 \cdot r}^0\}$,
 $\{u^0\}^T = \{u_r^0, v_r^0, u_{r+1}^0, v_{r+1}^0\}$,
 $\{T^l\}^T = \{T_{r \cdot r+1}^l, S_{r \cdot r+1}^l, T_{r+1 \cdot r}^l, S_{r+1 \cdot r}^l\}$,
 $\{u^l\}^T = \{u_r^l, v_r^l, u_{r+1}^l, v_{r+1}^l\}$,

$$N = Eh / (1 - \nu^2).$$

E, ν はそれぞれ板のヤング率、ポアソン比を表わす。

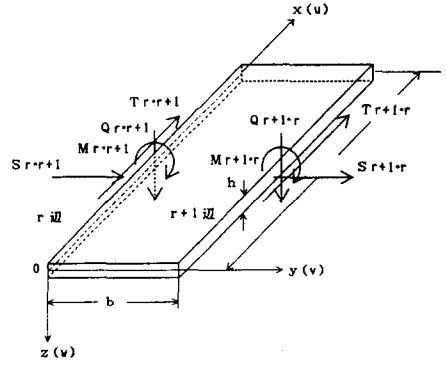


図-1 帯板要素の局所座標

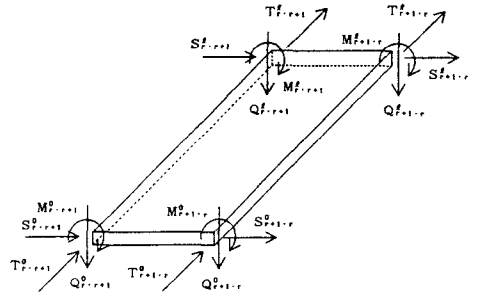


図-2 隅点の節点力

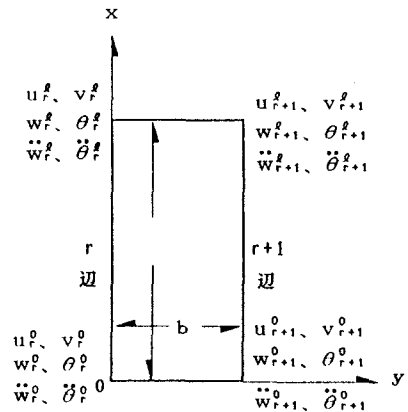


図-3 境界変位

面内変形に対して、帯板要素内の任意点の変位を次のように仮定する。

$$u = (1 - \eta) u_r + \eta u_{r+1}, \quad v = (1 - \eta) v_r + \eta v_{r+1}, \quad \eta = y/b. \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し部分積分を行なうと全ポテンシャルエネルギー最小の原理より次式が求められる。

$$\begin{aligned} \delta U_p = & \int_0^l [-N \{\ddot{u}_i\}^T [B_1] - \nu N \{\dot{v}_i\}^T [B_4] + Gh \{u_i\}^T [B_2] + Gh \{\dot{v}_i\}^T [B_3]] \{\delta u_i\} dx \\ & + \int_0^l [-Gh \{\ddot{v}_i\}^T [B_1] + \nu N \{\dot{u}_i\}^T [B_3] + N \{v_i\}^T [B_2] - Gh \{\dot{u}_i\}^T [B_4]] \{\delta v_i\} dx \\ & + N \{\dot{u}_i\}^T [B_1] \{\delta u_i\} \Big|_{x=0}^{x=l} + \nu N \{v_i\}^T [B_4] \{\delta u_i\} \Big|_{x=0}^{x=l} + Gh \{u_i\}^T [B_4] \{\delta v_i\} \Big|_{x=0}^{x=l} \\ & + Gh \{\dot{v}_i\}^T [B_1] \{\delta v_i\} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \{T\}^T \{\delta u\} dx - \{T^0\}^T \{\delta u^0\} - \{T^l\}^T \{\delta u^l\} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\{u_i\}^T = \{u_r, u_{r+1}\}$, $\{v_i\}^T = \{v_r, v_{r+1}\}$, $G = E/2(1 + \nu)$,

$$[B_1] = b \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad [B_2] = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B_3] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B_4] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし、ドットはxに関する微分を表わしている。

式(3)より、節線力に関しては次のようなxに関する2階の線形連立偏微分方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} T_{r \cdot r+1} \\ S_{r \cdot r+1} \\ T_{r+1 \cdot r} \\ S_{r+1 \cdot r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ -K_{12} & K_{22} & K_{14} & K_{24} \\ K_{13} & -K_{14} & K_{11} & -K_{12} \\ -K_{14} & K_{24} & K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ u_{r+1} \\ v_{r+1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $K_{11} = -\frac{bN}{3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{Gh}{b}$, $K_{12} = (\frac{\nu N}{2} - \frac{Gh}{2}) \frac{\partial}{\partial x}$, $K_{13} = -\frac{bN}{6} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{Gh}{b}$,

$$K_{14} = -(\frac{\nu N}{2} + \frac{Gh}{2}) \frac{\partial}{\partial x}, \quad K_{22} = -\frac{Ghb}{3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{N}{b}, \quad K_{24} = -\frac{Ghb}{6} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{N}{b}.$$

同様に式(3)より帯板隅点の節点力に関して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} T_{r \cdot r+1}^0 &= [-\frac{bN}{6} (2 \dot{u}_r + \dot{u}_{r+1}) + \frac{\nu N}{2} (v_r - v_{r+1})]_{x=0} \\ S_{r \cdot r+1}^0 &= [\frac{Gh}{2} (u_r - u_{r+1}) - \frac{Ghb}{6} (2 \dot{v}_r + \dot{v}_{r+1})]_{x=0} \\ T_{r+1 \cdot r}^0 &= [-\frac{bN}{6} (\dot{u}_r + 2 \dot{u}_{r+1}) + \frac{\nu N}{2} (v_r - v_{r+1})]_{x=0} \\ S_{r+1 \cdot r}^0 &= [\frac{Gh}{2} (u_r - u_{r+1}) - \frac{Ghb}{6} (\dot{v}_r + 2 \dot{v}_{r+1})]_{x=0} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

上式において $x=0$ を $x=l$ とし、右辺に負号を乗じると $T_{r \cdot r+1}^l$, $S_{r \cdot r+1}^l$, $T_{r+1 \cdot r}^l$, $S_{r+1 \cdot r}^l$ に関する式となる。

本論文では、帯板要素のr辺の節線変位をx方向に関して次のように級数展開する。

$$\left. \begin{aligned} u_r(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^r \cos \frac{m\pi}{l} x - \frac{(l-x)^2}{2l} \dot{u}_r^0 + \frac{x^2}{2l} \dot{u}_r^l \\ &= -\frac{l}{6} \dot{u}_r^0 + \frac{l}{6} \dot{u}_r^l + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ U_m^r - \frac{2l}{(m\pi)^2} \dot{u}_r^0 + (-1)^m \frac{2l}{(m\pi)^2} \dot{u}_r^l \right\} \cos \frac{m\pi}{l} x \\ v_r(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m^r \sin \frac{m\pi}{l} x + (1 - \frac{x}{l}) v_r^0 + \frac{x}{l} v_r^l = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ V_m^r + \frac{2}{m\pi} v_r^0 - (-1)^m \frac{2}{m\pi} v_r^l \right\} \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)を式(4)に代入し、x方向に有限フーリエ変換を行なうと節線力に関する剛性方程式が求まる。

$$\begin{Bmatrix} T_m^{r \cdot r+1} \\ S_m^{r \cdot r+1} \\ T_m^{r+1 \cdot r} \\ S_m^{r+1 \cdot r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ & t_{22} & -t_{14} & t_{24} \\ \text{Sym.} & & t_{11} & -t_{12} \\ & & & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m^r \\ V_m^r \\ U_m^{r+1} \\ V_m^{r+1} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & -r_{11} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -r_{22} \\ -r_{11} & 0 & r_{11} & 0 \\ -r_{23} & -r_{22} & -r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^0 \\ v_r^0 \\ \dot{u}_{r+1}^0 \\ v_{r+1}^0 \end{Bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & -r_{11} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -r_{22} \\ -r_{11} & 0 & r_{11} & 0 \\ -r_{23} & -r_{22} & -r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^\ell \\ v_r^\ell \\ \dot{u}_{r+1}^\ell \\ v_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $T_{r \cdot r+1}^0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell T_{r \cdot r+1} \cos \frac{m\pi}{\ell} x$, $S_{r \cdot r+1}^0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell S_{r \cdot r+1} \sin \frac{m\pi}{\ell} x$, 他もこれに準ずる。

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{bN}{3} \alpha^2 + \frac{Gh}{b}, \quad t_{12} = \left(\frac{\nu N}{2} - \frac{Gh}{2} \right) \alpha, \quad t_{13} = \frac{bN}{6} \alpha^2 - \frac{Gh}{b}, \\ t_{14} &= - \left(\frac{\nu N}{2} + \frac{Gh}{2} \right) \alpha, \quad t_{22} = \frac{Ghb}{3} \alpha^2 + \frac{N}{b}, \quad t_{24} = \frac{Ghb}{6} \alpha^2 - \frac{N}{b}, \quad r_{11} = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{Gh}{b} \alpha^2, \\ r_{21} &= \frac{2}{\ell} \alpha \left(\frac{\nu N}{2} - \frac{Gh}{2} \right), \quad r_{22} = -\frac{2}{\ell} \cdot \frac{N}{b} \alpha, \quad r_{23} = \frac{2}{\ell} \alpha \left(\frac{\nu N}{2} + \frac{Gh}{2} \right), \quad \alpha = \frac{m\pi}{\ell}. \end{aligned}$$

また式(6)を式(5)に代入すると (0, 0)点, (0, b)点の節点力に関して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_{r \cdot r+1}^0 \\ S_{r \cdot r+1}^0 \\ T_{r+1 \cdot r}^0 \\ S_{r+1 \cdot r}^0 \end{Bmatrix} &= \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & -S_{21} & S_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{24} & -S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m^r \\ V_m^r \\ U_m^{r+1} \\ V_m^{r+1} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & -n_{12} \\ n_{21} & n_{22} & -n_{21} & n_{24} \\ n_{13} & n_{12} & n_{11} & -n_{12} \\ n_{21} & n_{24} & -n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^0 \\ v_r^0 \\ \dot{u}_{r+1}^0 \\ v_{r+1}^0 \end{Bmatrix} &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 & n_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{24} & 0 & n_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^\ell \\ v_r^\ell \\ \dot{u}_{r+1}^\ell \\ v_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

同様に $(\ell, 0)$, (ℓ, b) 点の節点力に関しては次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_{r \cdot r+1}^\ell \\ S_{r \cdot r+1}^\ell \\ T_{r+1 \cdot r}^\ell \\ S_{r+1 \cdot r}^\ell \end{Bmatrix} &= - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & -S_{21} & S_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{24} & -S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m^r \\ V_m^r \\ U_m^{r+1} \\ V_m^{r+1} \end{Bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 & n_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{24} & 0 & n_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^0 \\ v_r^0 \\ \dot{u}_{r+1}^0 \\ v_{r+1}^0 \end{Bmatrix} &+ \begin{bmatrix} -n_{11} & -n_{12} & -n_{13} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} & -n_{21} & n_{24} \\ -n_{13} & -n_{12} & -n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{24} & -n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^\ell \\ v_r^\ell \\ \dot{u}_{r+1}^\ell \\ v_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 $S_{21} = \frac{Gh}{2}$, $S_{22} = -\frac{Ghb}{3} \alpha$, $S_{24} = -\frac{Ghb}{6} \alpha$, $\alpha = \frac{m\pi}{\ell}$, $n_{11} = -\frac{bN}{3}$,

$$n_{12} = \frac{\nu N}{2}, \quad n_{13} = -\frac{bN}{6}, \quad n_{21} = -\frac{Gh\ell}{4}, \quad n_{22} = \frac{Ghb}{3\ell}, \quad n_{24} = \frac{Ghb}{6\ell}.$$

次に面内変形と同様にして面外曲げ変形に対する帯板公式を誘導する。面外曲げ変形に対する帯板要素の全ポテンシャルエネルギー U_b は次式のようになる。

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{D}{2} \int_0^\ell \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{kw^2}{D} \right\} dx dy \\ &- \int_0^\ell \{Q\}^T \{w\} dx - \{Q^0\}^T \{w^0\} - \{Q^\ell\}^T \{w^\ell\} - \{M^0\}^T \{\dot{w}^0\} - \{M^\ell\}^T \{\dot{w}^\ell\} \quad (10) \end{aligned}$$

ここで、 $\{Q\}^T = \{Q_{r \cdot r+1}, M_{r \cdot r+1}, Q_{r+1 \cdot r}, M_{r+1 \cdot r}\}$, $\{w\}^T = \{w_r, \theta_r, w_{r+1}, \theta_{r+1}\}$,

$\{Q^0\}^T = \{Q_{r \cdot r+1}^0, M_{r \cdot r+1}^0, Q_{r+1 \cdot r}^0, M_{r+1 \cdot r}^0\}$, $\{w^0\}^T = \{w_r^0, \theta_r^0, w_{r+1}^0, \theta_{r+1}^0\}$,

$\{M^0\}^T = \{M_{r \cdot r+1}^0, bM_{y \cdot r \cdot r+1}^0, M_{x \cdot r+1 \cdot r}^0, bM_{y \cdot r+1 \cdot r}^0\}$.

ただし、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性を表す。また、 M_x , M_y はそれぞれ y 軸, x 軸まわりのモーメントを表す。

ここで帯板要素内の任意点のたわみを次のように仮定する。

$$w = (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)w_r + b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3)\theta_r + (3\eta^2 - 2\eta^3)w_{r+1} + b(\eta^3 - \eta^2)\theta_{r+1} \quad (11)$$

式(11)を式(10)に代入し全ポテンシャルエネルギー最小の原理より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta U_b = & D \int_0^g [\{\ddot{w}\}^T [B_1] + \{w\}^T [B_2] + \nu \{\ddot{w}\}^T [B_3] + \nu \{\dot{w}\}^T [B_4] - 2(1-\nu)\{\ddot{w}\}^T [B_5] \\ & + \frac{k}{D} \{w\}^T [B_1]] \cdot \{\delta w\} dx + D \{\ddot{w}\}^T [B_1] \{\delta \dot{w}\} \Big|_{x=0}^{x=g} - D \{\ddot{w}\}^T [B_1] \{\delta w\} \Big|_{x=0}^{x=g} \\ & + \nu D \{w\}^T [B_4] \{\delta \dot{w}\} \Big|_{x=0}^{x=g} - \nu D \{\dot{w}\}^T [B_4] \{\delta w\} \Big|_{x=0}^{x=g} + 2(1-\nu) D \{\dot{w}\}^T [B_5] \{\delta w\} \Big|_{x=0}^{x=g} \\ & - \int_0^g \{Q\}^T \{\delta w\} dx - \{Q^0\}^T \{\delta w^0\} - \{Q^g\}^T \{\delta w^g\} - \{M^0\}^T \{\delta \dot{w}^0\} - \{M^g\}^T \{\delta \dot{w}^g\} = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}b & \frac{11}{210}b^2 & \frac{9}{70}b & -\frac{13}{420}b^2 \\ & \frac{1}{105}b^3 & \frac{13}{420}b^2 & -\frac{1}{140}b^3 \\ & & \frac{13}{35}b & -\frac{11}{210}b^2 \\ \text{Sym.} & & & \frac{1}{105}b^3 \end{bmatrix}, [B_2] = \begin{bmatrix} \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} & -\frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} \\ & \frac{4}{b} & -\frac{12}{b^2} & \frac{2}{b} \\ & & \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} \\ \text{Sym.} & & & \frac{4}{b} \end{bmatrix},$$

$$[B_3] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5b} & -\frac{11}{10} & \frac{6}{5b} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2b}{15} & \frac{1}{10} & \frac{b}{30} \\ \frac{6}{5b} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5b} & \frac{11}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{b}{30} & \frac{1}{10} & -\frac{2b}{15} \end{bmatrix}, [B_4] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5b} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5b} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{11}{10} & -\frac{2b}{15} & \frac{1}{10} & \frac{b}{30} \\ \frac{6}{5b} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5b} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{b}{30} & \frac{11}{10} & -\frac{2b}{15} \end{bmatrix}, [B_5] = \begin{bmatrix} \frac{6}{5b} & \frac{11}{10} & -\frac{6}{5b} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2b}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{b}{30} \\ & & \frac{6}{5b} & -\frac{1}{10} \\ \text{Sym.} & & & \frac{2b}{15} \end{bmatrix}$$

式(12)より節線力に関しては、次のようなxに関する4階の線形連立偏微分方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{r \cdot r+1} \\ M_{r \cdot r+1} \\ Q_{r+1 \cdot r} \\ M_{r+1 \cdot r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & -K_{14} & K_{24} \\ \text{Sym.} & & K_{11} & -K_{12} \\ & & & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r \\ \theta_r \\ w_{r+1} \\ \theta_{r+1} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{ここで、} K_{11} = D \left(\frac{13}{35}b \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{12}{5b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{12}{b^3} + \frac{13}{35} \frac{k b}{D} \right),$$

$$K_{12} = D \left(\frac{11}{210}b^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{5} + \nu \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{6}{b^2} + \frac{11}{210} \frac{k b^2}{D} \right), K_{13} = D \left(\frac{9}{70}b \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{12}{5b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{12}{b^3} + \frac{9}{70} \frac{k b}{D} \right)$$

$$K_{14} = D \left(-\frac{13}{420}b^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{6}{b^2} - \frac{13}{420} \frac{k b^2}{D} \right), K_{22} = D \left(\frac{1}{105}b^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{4}{15b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{b} + \frac{1}{105} \frac{k b^3}{D} \right)$$

$$K_{24} = D \left(-\frac{1}{140}b^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{15b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{b} - \frac{1}{140} \frac{k b^3}{D} \right), \text{ただし、} k \text{は地盤反力係数である。}$$

同様に式(12)より帯板隅点の節点力に関して次式が得られる。

$$\{Q^0\} = D [B_1] \{\ddot{w}\}_{x=0} - D [B_5] \{\dot{w}\}_{x=0}, \{Q^g\} = -D [B_1] \{\ddot{w}\}_{x=g} + D [B_5] \{\dot{w}\}_{x=g}. \quad (14)$$

$$\{M^0\} = -D [B_1] \{\ddot{w}^0\} - \nu D [B_4] \{w^0\}, \{M^g\} = D [B_1] \{\ddot{w}^g\} + \nu D [B_4] \{w^g\}. \quad (15)$$

ここで、

$$[B_5] = \begin{bmatrix} (2-\nu)\frac{6}{5b} & (2+9\nu)\frac{1}{10} & -(2-\nu)\frac{6}{5b} & (2-\nu)\frac{1}{10} \\ (2-\nu)\frac{1}{10} & (2-\nu)\frac{2b}{15} & -(2-\nu)\frac{1}{10} & -(2-\nu)\frac{b}{30} \\ -(2-\nu)\frac{6}{5b} & -(2-\nu)\frac{1}{10} & (2-\nu)\frac{6}{5b} & -(2+9\nu)\frac{1}{10} \\ (2-\nu)\frac{1}{10} & -(2-\nu)\frac{b}{30} & -(2-\nu)\frac{1}{10} & (2-\nu)\frac{2b}{15} \end{bmatrix}$$

次に帯板要素の r 辺の節線変位を、 x 方向に次のように級数展開する。

$$\left. \begin{aligned} w_r(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n^r \sin \frac{m\pi}{\ell} x + (1 - \frac{x}{\ell}) w_r^0 + \frac{x}{\ell} w_r^\ell - \frac{2\ell^2 x}{6\ell} w_r'' - \frac{3\ell x^2 + x^3}{6\ell} \ddot{w}_r^0 + \frac{x^3 - \ell^2 x}{6\ell} \ddot{w}_r^\ell \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ W_n^r + \frac{2}{m\pi} w_r^0 - (-1)^n \frac{2}{m\pi} w_r^\ell - \frac{2\ell^2}{(m\pi)^3} \ddot{w}_r^0 + (-1)^n \frac{2\ell^2}{(m\pi)^3} \ddot{w}_r^\ell \right\} \sin \frac{m\pi}{\ell} x \\ \theta_r(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^r \sin \frac{m\pi}{\ell} x + (1 - \frac{x}{\ell}) \theta_r^0 + \frac{x}{\ell} \theta_r^\ell - \frac{2\ell^2 x}{6\ell} \theta_r'' - \frac{3\ell x^2 + x^3}{6\ell} \ddot{\theta}_r^0 + \frac{x^3 - \ell^2 x}{6\ell} \ddot{\theta}_r^\ell \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(16)を式(13)に代入し x 方向に有限フーリエ変換を施すと節線力に関する剛性方程式が求まる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_{m \cdot r+1}^r \\ M_{m \cdot r+1}^r \\ Q_{m \cdot r+1 \cdot r}^0 \\ M_{m \cdot r+1 \cdot r}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & -k_{14} & k_{24} \\ \text{Sym.} & & k_{11} & -k_{12} \\ & & & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m^r \\ \Theta_m^r \\ W_{m+1}^r \\ \Theta_{m+1}^r \end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} & \ell_{14} \\ & \ell_{22} & -\ell_{14} & \ell_{24} \\ \text{Sym.} & & \ell_{11} & -\ell_{12} \\ & & & \ell_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r^0 \\ \theta_r^0 \\ w_{r+1}^0 \\ \theta_{r+1}^0 \end{Bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} & \ell_{14} \\ & \ell_{22} & -\ell_{14} & \ell_{24} \\ \text{Sym.} & & \ell_{11} & -\ell_{12} \\ & & & \ell_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{r+1}^\ell \\ \theta_{r+1}^\ell \\ w_{r+1}^0 \\ \theta_{r+1}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & -m_{14} & m_{24} \\ \text{Sym.} & & m_{11} & -m_{12} \\ & & & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_r^0 \\ \ddot{\theta}_r^0 \\ \ddot{w}_{r+1}^0 \\ \ddot{\theta}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} - (-1)^n \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & -m_{14} & m_{24} \\ \text{Sym.} & & m_{11} & -m_{12} \\ & & & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_r^\ell \\ \ddot{\theta}_r^\ell \\ \ddot{w}_{r+1}^\ell \\ \ddot{\theta}_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

ここで、 $Q_{m \cdot r+1}^r = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell Q_{r \cdot r+1}(x) \sin \frac{m\pi}{\ell} x dx$ 、他もこれに準ずる。

$$\begin{aligned} k_{11} &= D \left(\frac{13}{35} b \alpha^4 + \frac{12}{5} b \alpha^2 + \frac{12}{b^3} + \frac{13}{35} \cdot \frac{k b}{D} \right), \quad k_{12} = D \left(\frac{11}{210} b^2 \alpha^4 + \left(\frac{1}{5} + \nu \right) \alpha^2 + \frac{6}{b^2} + \frac{11}{210} \cdot \frac{k b^2}{D} \right), \\ k_{13} &= D \left(\frac{9}{70} b \alpha^4 - \frac{12}{5} b \alpha^2 - \frac{12}{b^3} + \frac{9}{70} \cdot \frac{k b}{D} \right), \quad k_{14} = D \left(-\frac{13}{420} b^2 \alpha^4 + \frac{1}{5} \alpha^2 + \frac{6}{b^2} - \frac{13}{420} \cdot \frac{k b^2}{D} \right), \\ k_{22} &= D \left(\frac{1}{105} b^3 \alpha^4 + \frac{4}{15} b \alpha^2 + \frac{4}{b} + \frac{1}{105} \cdot \frac{k b^3}{D} \right), \quad k_{24} = D \left(-\frac{1}{140} b^3 \alpha^4 - \frac{1}{15} b \alpha^2 + \frac{2}{b} - \frac{1}{140} \cdot \frac{k b^3}{D} \right), \\ \ell_{11} &= -\frac{2}{\ell \alpha} \left(\frac{12}{b^3} D + \frac{13}{35} k b \right), \quad \ell_{12} = -\frac{2}{\ell \alpha} \left(\frac{6}{b^2} D + \frac{11}{210} k b^2 \right), \quad \ell_{13} = \frac{2}{\ell \alpha} \left(\frac{12}{b^3} D - \frac{9}{70} k b \right), \\ \ell_{14} &= -\frac{2}{\ell \alpha} \left(\frac{6}{b^2} D - \frac{13}{420} k b^2 \right), \quad \ell_{22} = -\frac{2}{\ell \alpha} \left(\frac{4}{b} D + \frac{1}{105} k b^3 \right), \quad \ell_{24} = -\frac{2}{\ell \alpha} \left(\frac{2}{b} D - \frac{1}{140} k b^3 \right), \\ m_{11} &= \frac{2D}{\ell \alpha} \left\{ -\frac{12}{5b} - \left(\frac{12}{b^3} + \frac{13}{35} \cdot \frac{k b}{D} \right) \frac{1}{\alpha^2} \right\}, \quad m_{12} = \frac{2D}{\ell \alpha} \left\{ -\left(\frac{1}{5} + \nu \right) - \left(\frac{6}{b^2} + \frac{11}{210} \cdot \frac{k b^2}{D} \right) \frac{1}{\alpha^2} \right\}, \\ m_{13} &= \frac{2D}{\ell \alpha} \left\{ \frac{12}{5b} + \left(\frac{12}{b^3} - \frac{9}{70} \cdot \frac{k b}{D} \right) \frac{1}{\alpha^2} \right\}, \quad m_{14} = \frac{2D}{\ell \alpha} \left\{ -\frac{1}{5} - \left(\frac{6}{b^2} - \frac{13}{420} \cdot \frac{k b^2}{D} \right) \frac{1}{\alpha^2} \right\}, \\ m_{22} &= \frac{2D}{\ell \alpha} \left\{ -\frac{4b}{15} - \left(\frac{4}{b} + \frac{1}{105} \cdot \frac{k b^3}{D} \right) \frac{1}{\alpha^2} \right\}, \quad m_{24} = \frac{2D}{\ell \alpha} \left\{ \frac{b}{15} - \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{140} \cdot \frac{k b^3}{D} \right) \frac{1}{\alpha^2} \right\}. \end{aligned}$$

このようにして求めた帯板の剛性方程式は、式(16)に示すように節線変位を境界値を含めた級数展開を行なっているため、後で示す数値計算例(図-4)では著者らが以前求めた帯板公式²⁾を使った場合より要素分割数の収束状態はよくなった。

同様に式(16)を式(14)に代入すると節点力に関して次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{m \cdot r+1}^0 \\ M_{m \cdot r+1}^0 \\ Q_{m \cdot r+1 \cdot r}^0 \\ M_{m \cdot r+1 \cdot r}^0 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & -u_{14} & u_{24} \\ u_{13} & -u_{14} & u_{11} & -u_{12} \\ u_{14} & u_{24} & -u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_m^r \\ \Theta_m^r \\ W_{m+1}^r \\ \Theta_{m+1}^r \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & -V_{11} & V_{14} \\ V_{14} & V_{22} & -V_{14} & V_{24} \\ -V_{11} & -V_{14} & V_{11} & -V_{12} \\ V_{14} & V_{24} & -V_{14} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_r^0 \\ \theta_r^0 \\ W_{r+1}^0 \\ \theta_{r+1}^0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & -V_{11} & V_{14} \\ V_{14} & V_{22} & -V_{14} & V_{24} \\ -V_{11} & -V_{14} & V_{11} & -V_{12} \\ V_{14} & V_{24} & -V_{14} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_r^\ell \\ \theta_r^\ell \\ W_{r+1}^\ell \\ \theta_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & -W_{14} & W_{24} \\ W_{13} & -W_{14} & W_{11} & -W_{12} \\ W_{14} & W_{24} & -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{W}_r^0 \\ \ddot{\theta}_r^0 \\ \ddot{W}_{r+1}^0 \\ \ddot{\theta}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & -Z_{14} & Z_{24} \\ Z_{13} & -Z_{14} & Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{14} & Z_{24} & -Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{W}_r^\ell \\ \ddot{\theta}_r^\ell \\ \ddot{W}_{r+1}^\ell \\ \ddot{\theta}_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \quad (18)
\end{aligned}$$

ここで、 $u_{11}=D\{-\frac{13}{35}b\alpha^3-(2-\nu)\frac{6}{5b}\alpha\}$, $u_{12}=D\{-\frac{11}{210}b^2\alpha^3-(2+9\nu)\frac{1}{10}\alpha\}$,
 $u_{13}=D\{-\frac{9}{70}b\alpha^3+(2-\nu)\frac{6}{5b}\alpha\}$, $u_{14}=D\{\frac{13}{420}b^2\alpha^3-(2-\nu)\frac{1}{10}\alpha\}$,
 $u_{21}=D\{-\frac{11}{210}b^2\alpha^3-(2-\nu)\frac{1}{10}\alpha\}$, $u_{22}=D\{-\frac{1}{105}b^3\alpha^3-(2-\nu)\frac{2}{15}b\alpha\}$,
 $u_{24}=D\{\frac{1}{140}b^3\alpha^3+(2-\nu)\frac{1}{30}b\alpha\}$. $v_{11}=D(2-\nu)\frac{6}{5b\ell}$, $v_{12}=D(2+9\nu)\frac{1}{10\ell}$,
 $v_{14}=D(2-\nu)\frac{1}{10\ell}$, $v_{22}=D(2-\nu)\frac{2b}{15\ell}$, $v_{24}=-D(2-\nu)\frac{b}{30\ell}$.
 $w_{11}=D\{-\frac{13}{35}b\frac{1}{\ell}+(2-\nu)\frac{2\ell}{5b}\}$, $w_{12}=D\{-\frac{11}{210}b^2\frac{1}{\ell}+(2+9\nu)\frac{\ell}{30}\}$,
 $w_{13}=D\{-\frac{9}{70}b\frac{1}{\ell}-(2-\nu)\frac{2\ell}{5b}\}$, $w_{14}=D\{\frac{13}{420}b^2\frac{1}{\ell}+(2-\nu)\frac{\ell}{30}\}$,
 $w_{21}=D\{-\frac{11}{210}b^2\frac{1}{\ell}+(2-\nu)\frac{\ell}{30}\}$, $w_{22}=D\{-\frac{1}{105}b^3\frac{1}{\ell}+(2-\nu)\frac{2\ell}{45}b\}$,
 $w_{24}=D\{\frac{1}{140}b^3\frac{1}{\ell}-(2-\nu)\frac{\ell}{90}b\}$. $z_{11}=D\{-\frac{13}{35}b\frac{1}{\ell}-(2-\nu)\frac{\ell}{5b}\}$,
 $z_{12}=D\{-\frac{11}{210}b^2\frac{1}{\ell}-(2+9\nu)\frac{\ell}{60}\}$, $z_{13}=D\{-\frac{9}{70}b\frac{1}{\ell}+(2-\nu)\frac{\ell}{5b}\}$,
 $z_{14}=D\{\frac{13}{420}b^2\frac{1}{\ell}-(2-\nu)\frac{\ell}{60}\}$, $z_{21}=D\{-\frac{11}{210}b^2\frac{1}{\ell}-(2-\nu)\frac{\ell}{60}\}$,
 $z_{22}=D\{-\frac{1}{105}b^3\frac{1}{\ell}-(2-\nu)\frac{\ell}{45}b\}$, $z_{24}=D\{\frac{1}{140}b^3\frac{1}{\ell}+(2-\nu)\frac{\ell}{180}b\}$.

また $\{Q_r^{\ell, r+1}, M_r^{\ell, r+1}, Q_{r+1}^{\ell, r}, M_{r+1}^{\ell, r}\}^T$ についても、式(16)を式(14)の第2式に代入することにより同様に求められる。

2. 2 解式

薄肉箱型はりや円筒型シェルなどの立体構造物を有限帯板法で解析する場合、面内変形と面外曲げ変形の作用を同時に受けるので、面内及び面外の剛性方程式を結合する必要がある。いま、簡単な例として $x=\ell/2$ で対称な変形を行なう場合を取り扱おうと節線力に関する帯板の剛性方程式は、

$$\{f_m\} = [k_m]\{\delta_m\}_0 - [\ell_m]\{\delta_m\}_0 + [m_m]\{\ddot{\delta}^0\}_0. \quad (19)$$

ここで、 $\{f_m\}^T = \{T_m^{\ell, r+1}, S_m^{\ell, r+1}, Q_m^{\ell, r+1}, M_m^{\ell, r+1}, T_m^{r+1, \ell}, S_m^{r+1, \ell}, Q_m^{r+1, \ell}, M_m^{r+1, \ell}\}$,

$$\{\delta_m\}_0^T = \{U_m^0, V_m^0, W_m^0, \theta_m^0, U_m^{r+1}, V_m^{r+1}, W_m^{r+1}, \theta_m^{r+1}\},$$

$$\{\delta^0\}_0^T = \{\dot{u}_r^0, v_r^0, w_r^0, \theta_r^0, \dot{u}_{r+1}^0, v_{r+1}^0, w_{r+1}^0, \theta_{r+1}^0\},$$

$$\{\ddot{\delta}^0\}_0^T = \{\ddot{v}_r^0, \ddot{w}_r^0, \ddot{\theta}_r^0, \ddot{v}_{r+1}^0, \ddot{w}_{r+1}^0, \ddot{\theta}_{r+1}^0\}.$$

マトリックスの中の係数は式(7)と式(17)を組み合わせたものであるので省略する。また対称条件より、 $\dot{u}_r^0 = -\dot{u}_r^0$, $v_r^0 = v_r^0$, $w_r^0 = w_r^0$, $\theta_r^0 = \theta_r^0$ となっており、 $r+1$ 辺についても同様である。

ただし、2つの式を結合するに際して $\ddot{v}_r^0$, $\ddot{v}_{r+1}^0$ の未知量を新たに導入する。この項はひずみエネルギーに無関係であるから剛性方程式中では $\ddot{v}_r^0$, $\ddot{v}_{r+1}^0$ にかかる係数の位置に0を入れておけばよい。この項は局所座標系では必要ないが、同一平面上にない要素が集まってできる立体構造物の解析においては、全体座標系に変換する際に必要となる⁴⁾ また、節点力に関する剛性方程式は、式(8)と式(18)を組み合わせることにより求めることができる。

$$\{f^0\} = \sum_{m=1}^{\infty} [u_m] \{\delta_m\} - [v] \{\delta^0\} + [w] \{\ddot{\delta}^0\}. \quad (20)$$

ここで、 $\{f^0\}^T = \{T_{r-r+1}^0, S_{r-r+1}^0, Q_{r-r+1}^0, M_{r-r+1}^0, T_{r+1-r}^0, S_{r+1-r}^0, Q_{r+1-r}^0, M_{r+1-r}^0\}$.

さらに、式(15)より

$$\{M^0\} = [s] \{\ddot{\delta}^0\} - [t] \{\delta^0\}. \quad (21)$$

ここで、 $\{M^0\} = \{M_{r-r+1}^0, M_{r-r+1}^0, b M_{r-r+1}^0, M_{r+1-r}^0, M_{r+1-r}^0, b M_{r+1-r}^0\}$.

ただし、 $\ddot{v}_r^0$, $\ddot{v}_{r+1}^0$ を未知量に加えるとともに、座標変換によって生ずるz軸まわりの仮想のモーメント M_{r-r+1}^0 , M_{r+1-r}^0 を新たに導入する⁴⁾ 以上の式は局所座標で導かれたものであるから、全体座標への変換を行ない、全要素について重ね合わせを行なうと全体の剛性マトリックスの式が得られる。拘束節線及び拘束節点処理を行なった後の式(19), (20), (21)をそれぞれ次のように表わす。

$$\{F_m\} = [K_m] \{\delta_m\} - [L_m] \{\delta^0\} + [M_m] \{\ddot{\delta}^0\} \quad (22)$$

$$\{F^0\} = \sum_{m=1}^{\infty} [U_m] \{\delta_m\} + [V] \{\delta^0\} + [W] \{\ddot{\delta}^0\} \quad (m=1, 3, 5, \dots) \quad (23)$$

$$\{M^0\} = [S] \{\ddot{\delta}^0\} - [T] \{\delta^0\} \quad (24)$$

両端自由の場合は帯板隔点には力が生じないので $\{F^0\} = \{M^0\} = 0$ となる。式(22), (24)を式(23)に代入することにより、自由端の境界変位を求めるための連立1次方程式が得られる。

$$[A] \{\delta^0\} = \{F\} \quad (25)$$

$$\text{ここで、} [A] = - \sum_{m=1}^{\infty} [U_m] [K_m]^{-1} [L_m] + \sum_{m=1}^{\infty} [U_m] [K_m]^{-1} [M_m] [S]^{-1} [T] - [V] - [W] [S]^{-1} [T],$$

$$\{F\} = \sum_{m=1}^{\infty} [U_m] [K_m]^{-1} \{F_m\}.$$

以上の式より $\{\delta^0\}$, $\{\ddot{\delta}^0\}$, $\{\delta_m\}$ を求め、式(6), (16)に代入することにより各節線の変位 u_r , v_r , w_r , θ_r を求めることができる。

3. 数 値 計 算 例

最初に、本論文で使用した有限帯板法の精度を調べるため2辺が単純支持、他の2辺が自由の矩形板に等分布荷重が載荷された場合を計算し厳密解³⁾と比較した。荷重強度は $q = 0.1 \text{ kgf/cm}^2$ で計算に際しては各節線に等価な線荷重に換算した。数値計算に用いた数値は次のとおりである。 $E = 2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$, $h = 0.5 \text{ cm}$, $l = 100 \text{ cm}$, $l' = n b = 100 \text{ cm}$, n は分割数、 m はフーリエ級数の項数。

$\bar{w} (x 10^{-1})$

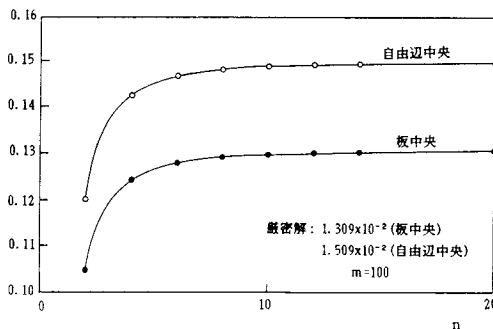


図-4 要素分割数による板中央と自由辺中央のたわみ

$\bar{w} (x 10^{-1})$

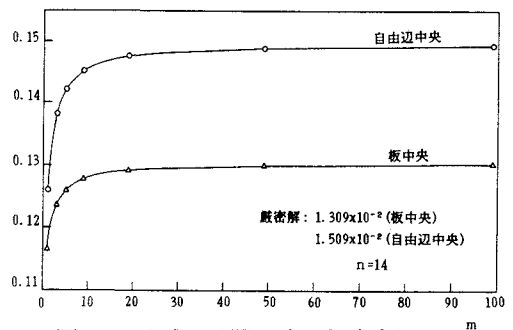


図-5 級数の項数による板中央と自由辺中央のたわみ

図-4は板中央点と自由辺中央のたわみの要素分割数による収束状態を表わしたものである。いずれも14分割程度で十分な精度が得られ、収束の状況は満足できるものである。図-5は同じく板中央点と自由辺中央のたわみのmの項数による収束状態を表わしたものである。

ここで図中の $\bar{\alpha}$ はたわみ係数で実際のたわみは次式のようなになる。 $w = \bar{\alpha} (q l'^4 / D)$ 。

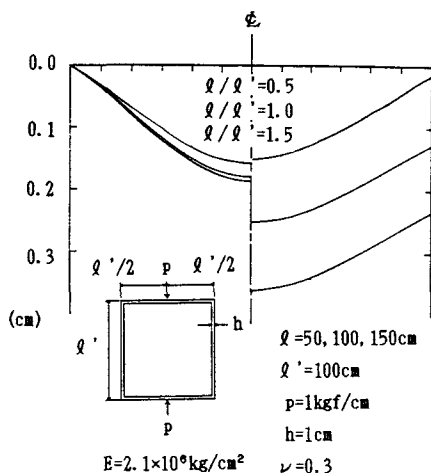


図-6 箱型はり

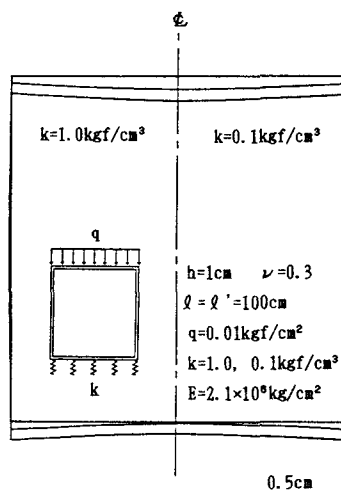


図-7 弾性床上箱型はり

次に図-6に、両端自由の箱型はりの上下フランジ中央に対称に線荷重が作用した場合のたわみ性状を、はりの高さとし支間長の比を変えて示す。計算にあたってはフランジ、ウェブともに14分割とした。境界条件は、構造形状と荷重の対称性を考慮して上下フランジ中央点の節点及び節線の横方向変位とたわみ角を拘束した。またウェブについても同様に中央点の横方向変位を拘束した。左半分には自由端断面の上フランジの垂直変位を、右半分には支間中央断面の変位を表わしている。図-7は弾性床上箱型はりに等分布荷重が作用した場合の自由端断面の変形状態が地盤反力係数 k の変化によってどの様に変化するかを示したものである。 k の値が大きくなるとともに自由端の断面変形は小さくなる傾向にある。図-8は両端自由の円筒形シェルの上端下端に対称に線荷重が作用した場合のたわみ性状を表わしたものである。境界条件は上下左右の対称点での節点及び節線の横方向変位とたわみ角を拘束した。左半分には自由端断面の変形状態を、右半分には支間中央断面の変形状態を、20分割と24分割について表わしている。

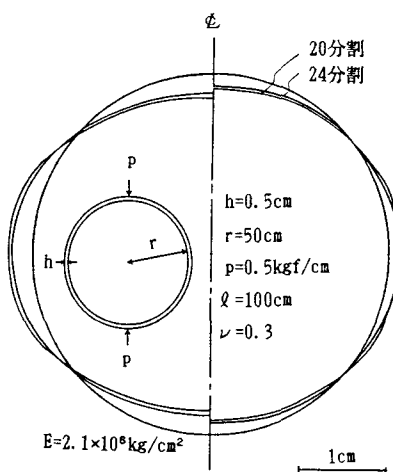


図-8 円筒形シェル

4. まとめ

本論文では帯板要素の面内変形及び面外曲げ変形に対する要素隅点の境界値を考慮した帯板公式を提案し、面内面外両作用が共存するような薄肉立体構造物へのこの公式の応用を示している。この手法の特徴は隅点の節点力に関する帯板公式を導入することで種々の境界条件を有する薄肉立体構造物の解析が一貫して組織

的に取り扱えることである。

この公式により矩形平板の問題を解いた結果は厳密解とよく一致しており、種々の境界を有する矩形平板の応力解析には非常に有効な手法であると考えられる。

本論文では理論式の誘導と解法について主に論じているが、応用例として示した両端自由の箱型はりとは円筒型シェルの数値計算結果から、本論文の有限帯板法がこの種の薄肉立体構造物の応力解析に適用した場合にも十分適用できる有効な手段であることがわかった。

また、本論文では薄板要素に関してのみ帯板要素公式を誘導したが、せん断変形の影響を考慮したE. Reissnerの平板の曲げ理論に従うなら厚板要素に関しても要素隅点の境界値を考慮した帯板要素公式を誘導することができる。今後の課題としては厚板要素からなる立体構造物の解析に本論文の手法の拡張を試みたい。

謝 辞

本研究において数値計算を実施するにあたっては、岩手大学大学院生の村上康裕君に協力を頂いた。また原稿の作成にあたり、岩手大学文部技官教務員出戸秀明氏の協力を得た。ここに、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 林 正：節点帯板法による薄肉構造物の解析，土木学会第42回年次学術講演会講演概要集第1部，pp. 2-3, 1989
- 2) 岩崎・能町・木田：有限帯板法によるランガードプレートの応力解析，構造工学論文集Vol. 35A，pp. 203-212, 1989
- 3) Stephan P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959
- 4) O. C. ツィエンギーヴィッツ：基礎工学におけるマトリックス有限要素法，培風館，pp. 217-222, 1975
(1989年10月 2日受付)