

有限扇形帯板法による補剛扇形板の曲げ解析

BENDING ANALYSIS OF STIFFENED RING SECTOR PLATES BY A FINITE STRIP METHOD

芳村 仁* 日下部毅明**

By Jin YOSHIMURA and Takaaki KUSAKABE

A finite strip method is presented for the analysis of the bending of polar orthotropic ring sector plates with arbitrary boundary conditions along circular and radial edges. The development is based on the Kantrovich method which is used for reducing a partial differential equation to an ordinary differential equation. A stiffness matrix of the finite strip is obtained. Applying this finite strip method, ring sector plates with full or partial load and sector plates stiffened by ribs are analysed. The versatility and accuracy are illustrated through these numerical examples.

1. まえがき

2直線辺が単純支持された有限扇形帯板法は従来より解法は確立され¹⁾, 曲線橋構造の解析に広く用いられ, 汎用性のある計算機プログラムも提案されている。しかしそれは扇形要素の2直線辺が単純支持という限られた境界条件であるためその適用範囲は制限されざるを得ない。たとえば, 縦方向リブと横リブまたは横桁で補強された扇形板のような曲線鋼床板では円周方向の縦リブは密に配置されているが, 放射方向の横リブ間隔は広くとられており, 両方向とも巨視的に見た直交異方性理論を適用するのは無理があると思われる。補剛された扇形板に関する研究は近年, 有限要素法による解析²⁾や円周方向帯板要素と円弧梁の組合せによる解析法³⁾などが発表されている。ここでは放射方向に長い扇形帯板要素を提案し, それと放射方向の梁との組合せにより補剛扇形板の解析を行い, その有効性の検討を行った。

2. 有限扇形帯板の解析

極座標における曲線直交異方性板の曲げの基本微分方程式は $w(\rho, \theta)$ をたわみとすると次のように表す

* 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 工修 建設省土木研究所構造橋梁部構造研究室 (〒305 茨城県つくば市大字旭1)

ことができる⁴⁾。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{2c}{\rho^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \frac{2c}{\rho^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \theta^2} + \frac{2(c^2+c)}{\rho^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{c^2}{\rho^3} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{c^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{c^2}{\rho^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = \frac{q_0(\rho, \theta) a^4}{D_r} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\rho = \frac{r}{a}$, $c^2 = \frac{D_\theta}{D_r}$, $q_0(\rho, \theta)$ = 荷重

D_r , D_θ はそれぞれ r, θ 方向の板剛度であり, a は扇形板の内側半径である。
式(1)の誘導において, 文献4)では, ねじりモーメント $M_{r\theta}$ を

$$-(1-\sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{D_r D_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (\nu_r, \nu_\theta = r, \theta \text{ 方向のポアソン比})$$

と表し, $c^2 = D_\theta / D_r$ をパラメータとして数値計算を行っているの
で本論文でもこの基本方程式より出発して扇形帯板の解析を行い, 同じ条件で
ここで提案する方法の有効性を確認する。

基礎方程式(1)の解を次式のようにとる。

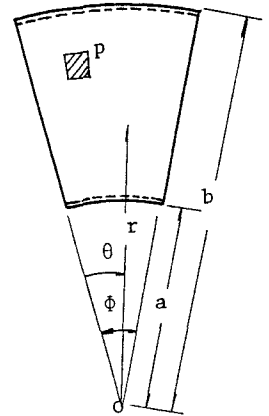


図-1

$$w(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\rho) \cdot T_m(\theta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで $W_m(\rho)$ は 2 円弧辺の境界条件を満足しているものを採用する。

4 階の偏微分方程式である式(1)に式(2)を代入し, Kantrovich法を適用して常微分方程式を得た後,
有限扇形帯板要素の解析を進める。

2 円弧辺の支持条件は単純支持, 固定, 自由の 3 種類が考えられ, たとえば 2 円弧辺とも単純支持の
場合は

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ において } w=0, M_r=0 \\ r=b \text{ において } w=0, M_r=0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで M_r は r 方向曲げモーメントである。

$W_m(\rho)$ としては, 扇形平板の放射方向の特性を反映し得る変位関数として等方性円環板の振動の固有関
数を用いることとする。この振動の一般解は次のように表される⁵⁾。

$$w(r) = C_1 J_n(k' r) + C_2 Y_n(k' r) + C_3 I_n(k' r) + C_4 K_n(k' r) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで J_n, Y_n は Bessel 関数, I_n, K_n は変形 Bessel 関数である。 $k' = \omega \sqrt{\gamma} / D$, ω = 円環板の円振動数,
 γ = 質量, D = 等方性円環板の板剛性である。今後の定式化の便宜のため $\rho = r/a$, $k = ak'$ (a = 円環板の
半径) とおき, $n=0$ の場合の解を採用することにする。式(4)に 2 円弧辺の境界条件を適用することによ
って, 任意の境界に対する固有値が得られ, 扇形帯板法の変位関数としては, 次式のようになる。

$$W_m(\rho) = J_0(k_m \rho) + \alpha_m Y_0(k_m \rho) + \beta_m I_0(k_m \rho) + \gamma_m K_0(k_m \rho) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで k_m は固有値であり, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ は円環板の諸量, 境界条件および固有振動モードによって決定
される定数である。

さて式(5)を考慮した式(2)を基礎微分方程式(1)に代入し, Kantrovichの方法を適用する。すなわち

Lを微分演算子， $\rho^* = b/a$ とするととき，

$$\int_1^{\rho^*} L[W(\rho)T(\theta)]W(\rho)\rho d\rho = \int_1^{\rho^*} q_0 a^4 W(\rho)\rho d\rho \quad \dots\dots\dots (6)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \int_1^{\rho^*} \{ [W'''' + \frac{2}{\rho} W''' - \frac{c^2}{\rho^2} W'' + \frac{c^2}{\rho^3} W'] T(\theta) + [-\frac{2c}{\rho^2} W'' - \frac{2c}{\rho^3} W' + \frac{2(c^2+c)}{\rho^4} W] \ddot{T}(\theta) \\ + \frac{c^2 W}{\rho^4} \ddot{\ddot{T}}(\theta) \} W(\rho)\rho d\rho = \int_1^{\rho^*} \frac{q_0}{D_r} a^4 W(\rho)\rho d\rho \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに $(\quad)'$ は ρ に関する偏微分， $(\quad)^\bullet$ は θ に関する偏微分を表している。便宜上，式(7)の被積分関数の $T(\theta)$ ， $\ddot{T}(\theta)$ ， $\ddot{\ddot{T}}(\theta)$ にかかる係数を D_1 ， D_2 ， D_3 とするとそれらの具体的な内容は次のようになる。

$$\begin{aligned} D_1 = [k^4 + \frac{k^2}{\rho^2} (c^2 - 1)] [J_0(k\rho) + Y_0(k\rho)] + [k^4 - \frac{k^2}{\rho^2} (c^2 - 1)] [\beta I_0(k\rho) + \gamma K_0(k\rho)] \\ + \frac{2k}{\rho^3} (1 - c^2) [J_1(k\rho) + \alpha Y_1(k\rho) - \beta I_1(k\rho) + \gamma K_1(k\rho)] \quad \dots\dots\dots (8. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = [-\frac{2c}{\rho^2} k^2 + \frac{2(c^2+c)}{\rho^4}] [J_0(k\rho) + \alpha Y_0(k\rho)] + [-\frac{2c}{\rho^2} k^2 + \frac{2(c^2+c)}{\rho^4}] [\beta I_0(k\rho) + \gamma K_0(k\rho)] \\ + \frac{4ck}{\rho^3} [J_1(k\rho) + \alpha Y_1(k\rho) - \beta I_1(k\rho) + \gamma K_1(k\rho)] \quad \dots\dots\dots (8. b) \end{aligned}$$

$$D_3 = \frac{c^2}{\rho^4} [J_0(k\rho) + \alpha Y_0(k\rho) + \beta I_0(k\rho) + \gamma K_0(k\rho)] \quad \dots\dots\dots (8. c)$$

これらの記号を用いて式(7)を書きかえると次のようになる。

$$\begin{aligned} T(\theta) \int_1^{\rho^*} D_1 W(\rho)\rho d\rho + \ddot{T}(\theta) \int_1^{\rho^*} D_2 W(\rho)\rho d\rho + \ddot{\ddot{T}}(\theta) \int_1^{\rho^*} D_3 W(\rho)\rho d\rho \\ = \int_1^{\rho^*} \frac{q_0 a^4}{D_r} W(\rho)\rho d\rho \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

さらに簡略化して表すと

$$A\ddot{\ddot{T}}(\theta) + B\ddot{T}(\theta) + CT(\theta) = F \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここでA，BおよびCは式(9)の $\ddot{\ddot{T}}(\theta)$ ， $\ddot{T}(\theta)$ および $T(\theta)$ にかかる定積分で表示されている係数である。この積分は $W(\rho)$ とその導関数などを含む関数の ρ に関する定積分であり，本論文ではGaussの数値積分公式を用いて求めた。

T(θ)の決定

T(θ)は式(10)により求められるが，本解析においてT(θ)に要求されるのは形状関数としての役割であるので右辺を考慮しない同次解を採用する。すなわち

$$A\ddot{\ddot{T}}(\theta) + B\ddot{T}(\theta) + CT(\theta) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

の解をとる。いま

$$T(\theta) = e^{\lambda\theta}$$

とおき式(11)に代入し解を求めると次のようになる。

$$T(\theta) = e^{p\theta} (C_1 \cos q\theta + C_2 \sin q\theta) + e^{-p\theta} (C_3 \cos q\theta + C_4 \sin q\theta) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで C_1, C_2, C_3 および C_4 は任意定数である。また p, q は $D = B^2 - 4AC$ として次のように表される。

$$p = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{ここに} \quad a = \frac{-B}{2A}, \quad b = \frac{\sqrt{-D}}{2A}$$

式(13)中の $D = B^2 - 4AC$ の値は実際に考えられる構造では負になることが試算で確認されている。

3. 曲線直交異方性有限扇形帯板法の定式化

3.1 未知数の設定

有限扇形帯板の変位は前項より

$$w = \sum_{m=1}^r W_m(\rho) T_m(\theta) \quad \dots\dots\dots (14)$$

式中の $W_m(\rho)$ は式(5), $T_m(\theta)$ は式(12)でそれぞれ与えられる。 m は m 番目の円環板の振動の固有値 k_m に対応する。

図-2に示すように放射方向の節線1および節線2ではそれぞれ変位 W_1, W_2 , 回転角 φ_1, φ_2 が生じ、一つの帯板に4個の自由度を考える。

いま、これらの節線における $T(\theta)$ と $T'(\theta)$ を $\theta = 0$ においてはそれぞれ $W_1, a\varphi_1$, $\theta = \Phi$ においてはそれぞれ $W_2, a\varphi_2$ とおくと式(12)より次式が成立する。なお Φ は帯板要素の中心角を表す。

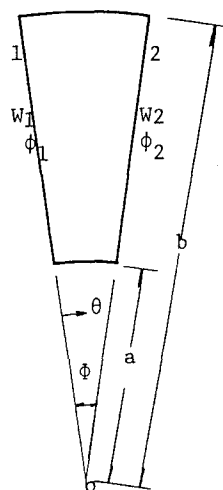


図-2

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ a\varphi_1 \\ W_2 \\ a\varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{p}{\rho} & \frac{q}{\rho} & -\frac{p}{\rho} & -\frac{q}{\rho} \\ e^{p\Phi} \cos q\Phi & e^{p\Phi} \sin q\Phi & e^{-p\Phi} \cos q\Phi & e^{-p\Phi} \sin q\Phi \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

あるいは

$$\{\delta\} = [N] \{C\} \quad \dots\dots\dots (15')$$

ここで

$$\{\delta\} = [W_1 \quad a\varphi_1 \quad W_2 \quad a\varphi_2]^T$$

$$\{C\} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4]^T$$

[N] は式(15)の4x4の正方マトリックスである。また

$$E_1 = \frac{e^p}{\rho} (p \cos q\Phi - q \sin q\Phi), \quad E_2 = \frac{e^p}{\rho} (p \sin q\Phi + q \cos q\Phi) \quad \dots\dots\dots \}$$

$$\left. \begin{aligned} E_3 &= \frac{e^{-p\theta}}{\rho} (-p \cos q\Phi - q \sin q\Phi), & E_4 &= \frac{e^{-p\theta}}{\rho} (-p \sin q\Phi + q \cos q\Phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

3.2 ひずみマトリックスと応力マトリックス

扇形平板の曲率 $\{\varepsilon\}$ は次のように表される。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} x_r \\ x_\theta \\ x_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \\ -\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \\ -\frac{2}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$w=W(\rho) \cdot T(\theta)$ を上式に代入するとひずみマトリックスが次のようになる。

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{a^2} [B] \{C\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに $[B]$ は 3 行 4 列のマトリックスでありその要素 B_{ij} は次のようである。

$$\begin{aligned} B_{11} &= -W''G_1, & B_{12} &= -W''G_2, & B_{13} &= -W''G_3, & B_{14} &= -W''G_4 \\ B_{21} &= -W \{ (p^2 - q^2)G_1 - 2pqG_2 \} \frac{1}{\rho^2} - \frac{W'G_1}{\rho} \\ B_{22} &= -W \{ (p^2 - q^2)G_2 + 2pqG_1 \} \frac{1}{\rho^2} - \frac{W'G_2}{\rho} \\ B_{23} &= -W \{ (p^2 - q^2)G_3 + 2pqG_4 \} \frac{1}{\rho^2} - \frac{W'G_3}{\rho} \\ B_{24} &= -W \{ (p^2 - q^2)G_4 - 2pqG_3 \} \frac{1}{\rho^2} - \frac{W'G_4}{\rho} \\ B_{31} &= 2 \left(\frac{W'}{\rho} - \frac{W}{\rho^2} \right) (pG_1 - qG_2), & B_{32} &= 2 \left(\frac{W'}{\rho} - \frac{W}{\rho^2} \right) (pG_2 + qG_1) \\ B_{33} &= 2 \left(\frac{W'}{\rho} - \frac{W}{\rho^2} \right) (-pG_3 - qG_4), & B_{34} &= 2 \left(\frac{W'}{\rho} - \frac{W}{\rho^2} \right) (-pG_4 + qG_3) \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

ここで $G_1 = e^{p\theta} \cos q\theta$, $G_2 = e^{p\theta} \sin q\theta$, $G_3 = e^{-p\theta} \cos q\theta$, $G_4 = e^{-p\theta} \sin q\theta$

一方、曲げモーメント、ねじりモーメントと曲率の関係式は次のように表される⁴⁾。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = D_r \begin{bmatrix} 1 & \nu_\theta & 0 \\ \nu_\theta & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c - \nu_\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_\theta \\ x_{r\theta} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

または

$$\{\sigma\} = D_r [D^*] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots (20')$$

3.3 剛性マトリックスと荷重マトリックス

最小ポテンシャルエネルギーの原理により剛性マトリックスと荷重マトリックスを求める。

扇形板のひずみエネルギー U は次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} \int_{A_0} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA_0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで $\{\varepsilon\}$ と $\{\sigma\}$ は式(18)と式(20)に示したものである。式(15)より

$$\{C\} = [N]^{-1} \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

が得られ、これを式(18)と式(20)のそれぞれに代入すると

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{a^2} [B] [N]^{-1} \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\{\sigma\} = \frac{D_r}{a^2} [D^*] [B] [N]^{-1} \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。これらの式を式(21)に代入すると ($dA_0 = a^2 \rho d\rho d\theta$)、扇形帯板のひずみエネルギーは次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \frac{D_r}{a^2} \int_1^{p^*} \int_0^{2\pi} \{\delta\}^T [N]^{-1T} [B]^T [D^*] [B] [N]^{-1} \{\delta\} \rho d\rho d\theta \quad \dots\dots\dots (25)$$

荷重のポテンシャルエネルギー $-V$ は

$$V = - \int_{A_0} w^T q(\rho, \theta) dA_0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで $q(\rho, \theta)$ は帯板上に作用する荷重強度である。

さて帯板要素の任意の位置での変位 $w(\rho, \theta)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} w(\rho, \theta) &= [W(\rho)e^{p\theta} \cos q\theta, W(\rho)e^{p\theta} \sin q\theta, W(\rho)\bar{e}^{p\theta} \cos q\theta, W(\rho)\bar{e}^{p\theta} \sin q\theta] \{C\} \\ &= [L] \{C\} = [L] [N]^{-1} \{\delta\} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

式(27)を式(26)に代入すると

$$V = -a^2 \int_1^{p^*} \int_0^{2\pi} \{\delta\}^T [N]^{-1T} [L]^T q(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad \dots\dots\dots (28)$$

全ポテンシャルエネルギー ϕ_0 は

$$\phi_0 = U + V \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。これまでの誘導過程では便宜上 $w(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^r W_m(\rho) T_m(\theta)$ のうちの代表的な m の一項を $W(\rho)T(\theta)$ として扱ってきたが完全な形の ϕ_0 は次のように書くことができる。

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \frac{D_r}{a^2} \int_1^{\rho^*} \int_0^{\Phi} \left\{ \sum_{m=1}^r \{\delta\}_m^T [N]^{-1}_m [B]_m^T \right\} \left\{ \sum_{n=1}^r [D]^* [B]_n [N]^{-1}_n \{\delta\}_n \right\} \rho d\rho d\theta \\ - a^2 \int_1^{\rho^*} \int_0^{\Phi} \left\{ \sum_{m=1}^r \{\delta\}_m^T [N]^{-1}_m [L]_m^T \right\} q(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad \dots\dots\dots (30)$$

便宜上次のようにおく。

$$[S]_m = [B]_m [N]_m^{-1} \quad \dots\dots\dots (31)$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \delta} = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

を適用すると結局

$$\frac{D_r}{a^2} \int_1^{\rho^*} \int_0^{\Phi} [S]_m^T [D]^* \left\{ \sum_{n=1}^r [S]_n \{\delta\}_n \right\} \rho d\rho d\theta = a^2 \int_1^{\rho^*} \int_0^{\Phi} [N]^{-1}_m [L]_m q(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad \dots\dots\dots (33)$$

式(33)は次の形で表現される。

$$\sum_{n=1}^r [K]_{mn} \{\delta\}_n = [F]_m \quad (m=1, 2, \dots, r) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで

$$[K]_{mn} = \frac{D_r}{a^2} \int_1^{\rho^*} \int_0^{\Phi} [S]_m^T [D]^* [S]_n \rho d\rho d\theta \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$[F]_m = a^2 \int_1^{\rho^*} \int_0^{\Phi} [N]^{-1}_m [L]_m q(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(35)で表される $[K]_{mn}$ が有限扇形帯板要素の剛性マトリックスであり、式(36)の $[F]_m$ が荷重ベクトルである。

4. 横リブの剛性マトリックス

横リブは梁として扱うことにするのでその剛性マトリックスは本質的には従来用いられているものと同じである。しかしデッキプレート（扇形板）との適合条件を満たすためには、変位関数がデッキプレートのそれと同じである必要がある。そのために特別な定式化が必要となり以下曲げに対する梁について述べる。

梁の変位を次の形に仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^r \delta_m w_m(\rho) \quad \dots\dots\dots (37)$$

$w_m(\rho)$ は前述の式(5)を用いる。次に式(37)より、横リブの曲率 ε が次のように表される。

$$\begin{aligned}\varepsilon = & -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \\ = & -\sum_{m=1}^r \delta_m \frac{k_m^2}{a^2} \left\{ -J_0(k_m \rho) + \frac{J_1(k_m \rho)}{k_m \rho} + \alpha \left[-Y_0(k_m \rho) + \frac{Y_1(k_m \rho)}{k_m \rho} \right] \right. \\ & \left. + \beta \left[I_0(k_m \rho) - \frac{I_1(k_m \rho)}{k_m \rho} \right] + \gamma \left[K_0(k_m \rho) + \frac{K_1(k_m \rho)}{k_m \rho} \right] \right\} \dots\dots\dots (38)\end{aligned}$$

あるいは

$$\varepsilon = \sum \delta_m G_m(\rho) \dots\dots\dots (38')$$

ここで $G_m(\rho) = -\frac{W''(\rho)}{a^2}$

また曲げモーメントMと曲率との関係はEIを曲げ剛性として

$$M = EI \varepsilon = EI \sum \delta_m G_m(\rho) \dots\dots\dots (39)$$

となる。したがってひずみエネルギーUは

$$U = \frac{1}{2} EI a \int_1^{\rho^*} \{ \sum \delta_m G_m(\rho) \} \{ \sum \delta_n G_n(\rho) \} d\rho \dots\dots\dots (40)$$

一方、外荷重によるポテンシャルエネルギーは

$$F = -a \int_1^{\rho^*} \{ \sum \delta_n G_n(\rho) \} q(\rho) d\rho \dots\dots\dots (41)$$

以上より全ポテンシャルエネルギー ϕ が求まり、それに最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \delta_m} &= \frac{\partial}{\partial \delta_m} (U + F) \\ &= a EI \int_1^{\rho^*} G_m(\rho) [\sum \delta_n G_n(\rho)] - a \int_1^{\rho^*} W_m(\rho) q(\rho) d\rho = 0\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{mn} \delta_n = F_m \dots\dots\dots (42)$$

ここで

$$K_{mn} = a EI \int_1^{\rho^*} G_m(\rho) G_n(\rho) d\rho \dots\dots\dots (43)$$

この K_{mn} が横リブ（梁）の曲げに対する剛性マトリックスである。

5. 数値計算例

本論文で提案する解析法の有効性を確認するため、横リブを有するものを含め5個の数値計算例を実施した。

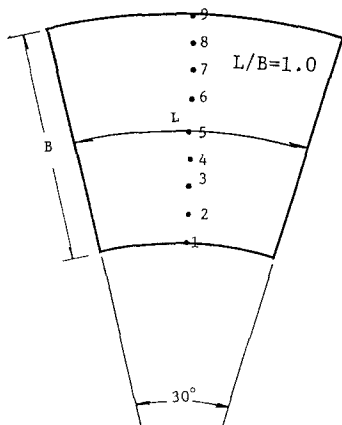


図-3

表-1.1 全周単純支持、等方性、満載等分布荷重
分割数 $N = 8$ 、採用した固有値数 $r = 8$

	α_0	β_0	γ_0
1	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	-0.0875(-0.0883)
3	0.2762(0.2772)	0.2468(0.2492)	0.2862(0.2859)
5	0.4026(0.4038)	0.3707(0.3732)	0.3621(0.3637)
7	0.3034(0.3041)	0.3531(0.3543)	0.2472(0.2526)
9	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0585(0.075)

()内は厳密解

表-1.2 収束の状況

	$\alpha_0(0.4038)$		$\beta_0(0.3732)$		$\gamma_0(0.3637)$	
	4	8	4	8	4	8
6	0.4024	0.4027	0.3656	0.3707	0.3646	0.3640
8	0.4023	0.4026	0.3656	0.3707	0.3628	0.3621

5.1 横リブのない扇形平板

計算例で用いた扇形平板の形状寸法はすべて図-3に示すようなものである。载荷条件、板剛度 D_r と D_θ の比、境界条件を変化させた場合を扱い厳密解と比較した。計算結果は図-3の1~9の各点について、たわみ、 r 方向曲げモーメント M_r 、 θ 方向曲げモーメント M_θ を求め表で示した。表中の()内の数字は既発表の文献からのもので比較のため示した。

5.1.a 等方性、全周単純支持、等分布満載荷重

結果を表-1.1に、分割数、採用した固有値数を変化させた収束の傾向を表-1.2に示した。なおポアソン比は0とした。表には $w = \alpha_0 \times 10^{-2} \times q l^4 / D_r$ 、 $M_r = \beta_0 \times 10^{-1} \times q l^2$ 、 $M_\theta = \gamma_0 \times 10^{-1} \times q l^2$ としたときの α_0 、 β_0 、 γ_0 の値を示した。()内は厳密解の値である⁴⁾。

5.1.b 全周単純支持、等方性、部分分布荷重

図-4の载荷条件の解析結果を表-

2.1、収束状況を表-2.2に示す。なお()内の値は文献⁴⁾の方法を応用して求めたものである。

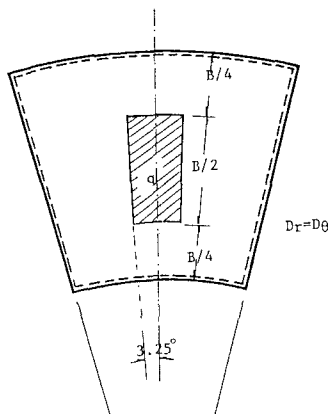


図-4

表-2.1 部分分布荷重载荷の全周単純支持扇形板 $N = 16$ 、 $r = 8$

	α_0	β_0	γ_0
1	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	-0.0224(-0.0225)
2	0.0394(0.0395)	0.0111(0.0118)	-0.0224(-0.0225)
3	0.0765(0.0768)	0.0552(0.0560)	0.1069(0.1061)
4	0.1050(0.1052)	0.1064(0.1051)	0.1454(0.1447)
5	0.1173(0.1176)	0.1251(0.1270)	0.1557(0.1548)
6	0.1102(0.1104)	0.1275(0.1260)	0.1398(0.1392)
7	0.0838(0.0840)	0.0833(0.0841)	0.1015(0.1012)
8	0.0445(0.0447)	0.0319(0.0322)	0.0557(0.0553)
9	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.0150(0.0151)

表-2.2 中央点5についての収束の状況

	$\alpha_0(0.1176)$		$\beta_0(0.1270)$		$\gamma_0(0.1548)$	
	4	8	4	8	4	8
8	0.1175	0.1173	0.1331	0.1253	0.1628	0.1612
16	0.1175	0.1173	0.1331	0.1251	0.1570	0.1557

5.1.c 全周単純支持，等分布満載荷重，

$C^2 = D_\theta / D_r = 4.0$

$D_\theta / D_r = 4.0$ の曲線直交異方性扇形板

の結果を表-3に示す。

5.1.d 全周固定，等方性，等分布満載荷重

表-4.1に結果を示した。また他の解法による結果^{6), 7)}を中央点(5の点)について比較したのが表-4.2である。

5.2 横リブで補剛された異方性扇形板 (周辺単純支持)

本解析法の横リブで補剛された扇形板に対する有効性を確認するため図-5のような例をとり数値計算を行った。通常縦リブは密に配置されるが，放射方向の横リブ間隔は広くとられるので，円周方向の縦リブは平均化して板剛度に換算する異方性板として扱い，横リブについては梁として有限帯板解析の中に組み込むことにする。板の形状寸法は中央円弧長が400cm，直線辺が200cmの辺比 $L/B=2.0$ の曲線補剛板を考えた。縦リブは20cm間隔で9本，横リブは図のように3本入れそれぞれ横リブⅠ，Ⅱ，Ⅲとする。縦リブ，横リブとも図に示す断面を用いた。なおここでは本論文で述べた有限扇形帯板法の有効性の確認が目的であるのでリブの重心と板の中央面と一致させた構造について数値計算を実施した。荷重条件としては図示のように部分分布荷重を中央の位置(A)と偏心位置(B)の2種とし，それぞれの場合について載荷位置の横リブのたわみとそこでの縦リブの曲げモーメントを求め，表-5に示した。また比較すべき結果がないので同じ辺比の矩形板が同様なリブで補剛された板について計算しその値を()内に記した。

表-3 $D_\theta / D_r = 4.0$ の全周単純支持板，等分布満載 $N = 8, r = 8$

	α_0	β_0	γ_0
1	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	-0.1476(-0.1485)
3	0.1172(0.1175)	0.0862(0.0884)	0.5004(0.4973)
5	0.1794(0.1798)	0.1533(0.1522)	0.6608(0.6592)
7	0.1456(0.1459)	0.1968(0.1986)	0.4857(0.4886)
9	0.0 (0.0)	0.0 (0.0)	0.1175(0.1333)

表-4.1 全周固定，等方性，等分布荷重満載 $N = 12, r = 8$

	α_0	β_0	γ_0
1	0.0	-0.4942	0.0
3	0.0725	0.0590	0.1180
5	0.1252	0.1739	0.1744
7	0.0767	0.0838	0.0938
9	0.0	-0.4836	0.0

表-4.2 解の比較

方法	α_0	β_0
文献 6	0.1272	0.1768
文献 7	0.124	0.1774
本解解法	0.1252	0.1739

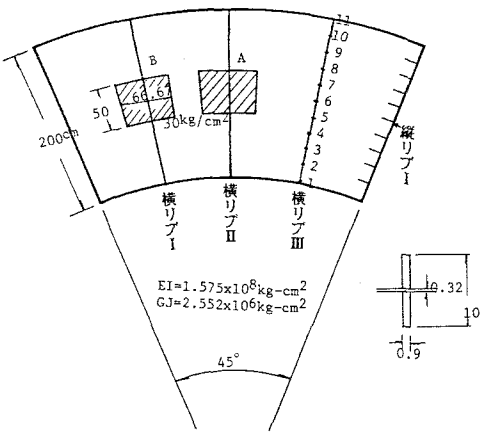


図-5

6. まとめ

曲線直交異方性扇形板の曲げ解析において、2円弧辺、2直線辺において任意の境界条件をとり得る有限扇形帯板法を提案した。この解法の精度および有効性についていくつかの数値計算例によりその確認を行った。その結果、扇形平板の解析に有効であることがわかった。また横リブで補剛されている異方性板解析にも応用でき、かなり広い範囲の問題に適用できると考えられる。

表-5 横リブで補剛された異方性扇形板 $N = 12$, $r = 8$

	中央載荷 (A)		偏心載荷 (B)	
	横リブ II 上		横リブ I 上	
	たわみ (cm)	縦リブ B.M. ($10^4 \text{kg} \cdot \text{cm}$)	たわみ (cm)	縦リブ B.M. ($10^4 \text{kg} \cdot \text{cm}$)
1	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)	—
2	1.094(1.164)	-0.012(1.582)	0.739(0.799)	0.894(1.818)
3	2.124(2.252)	1.988(3.218)	1.455(1.558)	2.962(3.656)
4	3.011(3.174)	3.979(4.877)	2.102(2.222)	4.942(5.463)
5	3.649(3.820)	4.620(4.714)	2.594(2.704)	5.413(5.319)
6	3.902(4.056)	4.792(5.130)	2.806(2.883)	5.390(5.739)
7	3.698(3.820)	5.218(4.714)	2.666(2.704)	5.645(5.319)
8	3.089(3.174)	5.439(4.877)	2.217(2.222)	5.693(5.463)
9	2.200(2.252)	4.062(3.218)	1.569(1.558)	4.082(3.656)
10	1.140(1.164)	2.756(1.582)	0.809(0.799)	2.531(1.818)
11	0.0 (0.0)	—	0.0 (0.0)	—

()内は矩形板

参考文献

- 1) Cheung, Y. K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
- 2) Bhimaraddi, A., Moss, P. J. and Carr, A. J.: Finite element analysis of orthogonally stiffened annular sector plates, J. EM Proc. ASCE, Vol. 115, No. 9, pp.2074~2088, 1989.
- 3) Harik, I. E. and Haddad, B. F.: ASM solution of stiffened sector plates, J. EM Proc. ASCE, Vol. 113, No. 12, pp.1809~1825, 1987.
- 4) 芳村 仁: 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて, 土木学会論文集, 第82号, pp.1~10, 1962.
- 5) Vogel, S. M. and Skinner, D. W.: Natural frequencies of transversely vibrating uniform annular plates, J. Appl. Mech., Vol. 32, pp.926~931, 1965.
- 6) 奥村 勇: 曲線直交異方性扇形平板の階差法による解法, 土木学会論文集, 第140号, pp.55~58, 1967.
- 7) 井浦雅司・平嶋政治: 任意の境界条件に適用し得る扇形直交異方性板のフーリエ級数解, 構造工学論文集, Vol. 31A, pp.171~181, 1985.

(1989年10月2日受付)