

面内回転自由度を有する膜要素による 平面問題の幾何学的非線形解析

A Membrane Element with Drilling Degrees of Freedom for Geometrically
Nonlinear Analysis of Plane Problems

* **

井浦 雅司 · S.N.Atluri

By Masashi Iura and S.N.Atluri

A new formulation of membrane elements with drilling degrees of freedom has been developed for geometrically nonlinear analysis. Although the symmetry of the 2nd Piola-Kirchhoff stress tensor holds, the resulting stress tensors are no longer symmetric. The constitutive equations are written in terms of the unsymmetric resulting stress tensors and the conjugated strain tensors. A 9-noded isoparametric finite element has been used for numerical analysis. Numerical results demonstrate an excellent performance of the present membrane element without any locking.

1. はじめに

シェル構造物の有限要素解析に平面要素を用いることは古くから行なわれており、多くの参考書（例えば文献[1]）にもその方法は記述されている。その中で、主流とされている解析方法は、1節点3自由度を有する曲げ要素と1節点2自由度を有する膜要素を結合し、さらに人工的な剛性を面内回転角に加えることにより、合計で1節点6自由度を有するシェル要素を用いるものであろう。この内、面内回転角に関する剛性は何ら物理的な意味を持たず、経験からその値が決定される場合が多く、平面問題に限定すると、面内回転角が常に零となる矛盾を生じる。

これに対し、面内回転角の剛性を物理的に意味付け、1節点3自由度を有する膜要素の開発も古くから行なわれており、我が国でも、吉田・雨宮・増田[2]らの研究が報告されている。Allman[3]によれば、1960年、70年代の研究（文献[3]、[4]の参考文献を参照）では適合条件を満足させるために、ある拘束が変位場に課せられており、要素を小さくしても必ずしも厳密解に収束しない場合があることが報告されている。これらの問題点を解決したものに、Allman[3]とBergan・Felippa[5]の3角形要素がある。さらに、Cook[6]はAllmanの3角形要素を4角形要素に拡張した。1984年のAllmanの論文以降、多くの研究が報告されており、変位法[7~10]ばかりでなく、ハイブリッド法[11~13]、などに基づき数多くの膜要素が提案されてきた。これらは何れも、変位場に特別な工夫を凝らすことにより、面内回転を含む変位場を誘導しており、基礎となる変分原理は従来通り並進変位成分のみを含むものである。一方、Hughes・Brezzi[14]はReissner[15]の変分原理に基づき面内回転角を陽に含む変分原理を提案し数値解が収束することを証明しているが、数値計算例の報告はなされておらず、得られる剛性マトリックスがかなり剛となることが報告されているだけで

* 工博 東京電機大学助教授 理工学部建設工学科 (〒160 埼玉県比企郡鳩山町)

** Dr.Sci., Regents' Professor, Georgia Institute of Technology (Atlanta, GA 30332)

ある。また、鈴木・金子[16]らは、マイクロボウ理論に基づき面内剛性を有する平面要素を開発しているが、そこでは面内回転角が微小と仮定されており、非線形数値解析においては特別な手法（例えば剛体変位除去の手法）を用いざるを得ない。

以上の研究は、Lee・Yoo[9]、吉田・増田・松田[17]、鈴木・金子[16]らの研究を除き、線形理論に限定されている。Allmanらの要素を非線形理論に適用することは可能であり、通常の定式化に従って解析することができる。しかしながら、任意の節点数を有する膜要素の変位場を誘導することは簡単ではない。一方、線形理論ではあるがHughes・Brezzi の変分原理を用いたり、あるいは鈴木・金子らの手法のように、面内回転角を独立自由度として扱い、並進変位成分と同一の変位関数を用いることにすれば、任意の節点数を有する膜要素モデルは簡単に作成できる。しかしながら面内回転角を有する膜要素の幾何学的非線形性を含んだ変分原理に関する研究は少ない。

本論文では、まず、平面応力問題に限定し面内回転角を陽に含む2次元弾性理論より出発し、有限要素法の基礎となる変分原理を誘導している。そこでは、オイラーの方程式として、力の平衡方程式 (Linear Momentum Balance) の他に、モーメントの平衡方程式 (Angular Momentum Balance) が得られる。すなわち、古典理論と異なり、モーメントの平衡方程式（あるいは、オイラーの応力の対称条件）は初めから満足されているわけではなく、力の平衡方程式と同様に、本汎関数のオイラーの方程式として得られることになる。構成方程式も従来の形とは異なり、仕事率から求まるお互いに共役な応力テンソルとひずみテンソルを用いて記述されている。有限要素法の定式化には9節点アイソパラメトリック要素を用いており、従来の膜要素と同一の手法を用いており、何ら特別なところはない。

数値計算では、まず線形解析を行ない、ゼロエネルギーモードが存在しないことを確かめている。次にパッチテストを行ない、形状変化に依存することなく一定応力を表わすことが示されている。次に、既存のモデルの多くがロッキングを生じるような薄肉はりの解析を行ない、本モデルはロッキングが生じないことを示している。幾何学的非線形問題として、片持ちはりの大変形解析を行ない、本数値結果と解析解との比較を行なっている。

2. 面内回転を含む2次元弾性理論

ここでは、Lagrangeの記述法を用いる事とし、変形前の座標系として X^i 、 X^3 座標系を用い（但し $i=1, 2$ ）、その単位基底ベクトルを $\underline{A}_i$ 、 $\underline{A}_3$ とする。なお、 $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 \times \underline{A}_2 / |\underline{A}_1 \times \underline{A}_2|$ として、一般に $\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 \neq 0$ であるとする。点Pの変位ベクトルを $\underline{u}$ とおくと、変形後の基底ベクトル $\underline{a}_i$ （但し、平面問題に限定しているので $\underline{a}_3 = \underline{A}_3$ ）は

$$\underline{a}_i = \underline{A}_i + \underline{u}_{,i} \quad (1)$$

と表わされ、ここに $(\)_{,i} = d(\)/dX^i$ である。次に $\underline{A}_i$ が剛体回転し $\underline{b}_i$ と一致したとすれば、回転テンソル $\underline{R}$ を用いて、以下のように関係式が求まる。

$$\underline{b}_i = \underline{R} \cdot \underline{A}_i \quad (2)$$

ここに $\underline{R} = R^i{}_j \underline{A}_i \underline{A}_j$ である。ベクトル $\underline{a}_i$ とベクトル $\underline{b}_i$ との関係は、

$$\underline{a}_i = c_{ij} \cdot \underline{b}_j \quad (3)$$

と書ける。これより、 c_{ij} について求めると以下の式を得る。

$$c_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{b}_j = (\delta^m{}_i + u^m{}_{|i}) \underline{A}_m \cdot \underline{A}_n R^n{}_j \quad (4)$$

ここで $\delta^m{}_i$ はクロネッカーのデルタであり、 $(\)_{|i}$ は X^i に関する共変微分である。なお、 $\underline{A}_i$ から $\underline{b}_i$ への剛体回転は任意でなく、モーメントの平衡方程式を満足するように剛体回転角は決定される。また、後で示されるように、物理的考察により $c_{ij} > 0$ なる条件が課せられる。

仕事率 (M. P.) を求めるに当たり、第2 Piola-Kirchhoff の応力テンソルとGreen の歪テンソルを用

いると、以下のように書ける。

$$M. P. = \int \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dA dt \quad (5)$$

ここで、 $\varepsilon_{ij} = (\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j - \underline{A}_i \cdot \underline{A}_j)/2$ を式(5)に代入すると、 σ^{ij} の対称性により

$$M. P. = \int \sigma^{ij} \underline{a}_j \cdot \dot{\underline{a}}_i dA dt = \int \sigma^{ij} \underline{a}_j \cdot (\dot{\underline{c}}_{ik} \underline{b}^k + c_{ik} \dot{\underline{b}}^k) dA dt \quad (6)$$

となる。ここに式(3)を用いている。一方、 $\underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{I}$ より $\underline{R} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{b}_i = \underline{W} \times \underline{b}_i$ なる $\underline{W}$ が存在し、さらに σ^{ij} の対称性を利用すると次式を得る。

$$\sigma^{ij} \underline{a}_j \cdot c_{ik} \dot{\underline{b}}^k = \sigma^{ij} \underline{a}_j \cdot (\underline{W} \times \underline{b}^k c_{ik}) = \underline{W} \cdot (\underline{a}_i \times \underline{a}_j \sigma^{ij}) = 0 \quad (7)$$

よって、式(7)を用いると、式(6)のM. P. は以下のように表わせる。

$$M. P. = \int \underline{N}^i \cdot \underline{b}^k \dot{\underline{c}}_{ik} dA, \quad \underline{N}^i = \int \sigma^{ij} \underline{a}_j dt \quad (8)$$

ここで、 $\underline{N}^i = N^{ij} \underline{b}_j$ とおくと、

$$M. P. = \int N^{ij} \dot{\underline{c}}_{ij} dA \quad (9)$$

となり、 c_{ij} は応力 N^{ij} に対する共役なひずみテンソルであることが分かる。

平衡方程式を求めるに当たり、仮想仕事の原理を用いると、以下の式が得られる。

$$I V W = E V W, \quad I V W = \int \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dA dt, \\ E V W = \int \underline{P} \cdot \delta \underline{u} dA dt + \int \underline{\bar{P}} \cdot \delta \underline{u} dS \quad (10)$$

ここに、 $\underline{P}$ は物体力ベクトル、 $\underline{\bar{P}}$ は境界に作用する外力ベクトルである。内力による仮想仕事I V Wは、

$$I V W = \int N^{ij} \delta c_{ij} dA = \int \left[\underline{N}^i \cdot \delta \underline{u}_{,j} + (\underline{N}^i \times \underline{a}_i) \cdot \delta \underline{\Phi} \right] dA \quad (11)$$

と書け、ここに $\delta \underline{\Phi} \times \underline{I} = \delta \underline{R} \cdot \underline{R}^T$ である。部分積分を施し、さらに式(10)を用いると、平衡方程式として、

$$\underline{N}^i|_i + \underline{P} = 0 \quad (\delta \underline{u}), \quad (\underline{N}^i \times \underline{a}_i) \cdot \underline{a}_3 = 0 \quad (\delta \underline{\Phi}) \quad (12)$$

が得られる。ここに、式(12 a)は力の平衡方程式であり、式(12 b)はモーメントの平衡方程式である。境界条件としては、

$$\underline{N}^i \nu_i = \underline{\bar{P}} \quad \text{or} \quad \underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad (13)$$

が得られ、ここに $\underline{\bar{u}}$ は変位の規定量を表わす。ここで注意することは、平衡方程式には面内回転に関する釣合式が得られるのに対し、境界条件式には面内回転に関する式は表われないことである。

次に構成式を求めるに当たり、以下の3つの仮定を行なう：1) 材料は弾性でかつ等質等方である。2) 微小変形の際には従来の古典理論と同一の構成式となる。3) N^{ij} とそれに共役な c_{ij} との間に、比例関係式が成立する。以上の仮定の下に、ここではデカルト座標系を考えると、次のような構成式を用いる

こととする。

$$N^{11} = E t \left[\frac{c_{11} - 1 + \nu (c_{22} - 1)}{(1 - \nu^2)} \right]$$

$$N^{22} = E t \left[\frac{c_{22} - 1 + \nu (c_{11} - 1)}{(1 - \nu^2)} \right]$$

$$N^{12} = 2 G t c_{12} \quad , \quad N^{21} = 2 G t c_{21} \quad (14)$$

ここで、Eはヤング係数、 ν はポアソン比、 $G = E/2(1 + \nu)$ である。なお、ここでは N^{12} と N^{21} とはその定義より対称でないことから、構成方程式においても個別に定義している。

単軸引張の場合を考えると、工学的ひずみ（ $= \Delta L/L$ ）に相当するのは $c_{11} - 1$ （又は $c_{22} - 1$ ）であることがわかる。物理的に考え、 $\Delta L/L > -1$ なる不等号が成立することから、 $c_{11} > 0$ （又は $c_{22} > 0$ ）なる不等号が成立することがわかる。

物体力ベクトル $\underline{P}$ と外力ベクトル $\underline{\bar{P}}$ が変形に依存しないものとすれば、仮想仕事の原理は式（14）を用いることにより以下の変分原理と等価になる。

$$\delta U = 0$$

$$U = \left[\left[E t \left\{ (c_{11} - 1)^2 + (c_{22} - 1)^2 + 2 \nu (c_{11} - 1)(c_{22} - 1) \right\} / 2 (1 - \nu^2) \right. \right. \\ \left. \left. + G t (c_{12})^2 + G t (c_{21})^2 - \underline{P} \cdot \underline{u} \right] dA - \left[\underline{\bar{P}} \cdot \underline{u} dS \right] \quad (15)$$

なお、上記の汎関数のオイラーの方程式として、力の平衡方程式の他に、モーメントの平衡方程式が得られる。すなわち、応力の対称条件（モーメントの平衡方程式）は初めから満足されているわけではなく、汎関数の停留条件より得られることになる。

3. 9節点を有するアイソパラメトリック膜要素

ここでは、式（15）で表わされる変分原理を基に、Fig.1 に示す9節点を有する膜要素モデルを開発する。形状および変位関数に同一の関数を用いることにすれば、それぞれ以下のように表わされる。

$$X^i = \sum N_j X^i_j \quad , \quad u^i = \sum N_j u^i_j \quad , \quad \theta = \sum N_j \theta_j \quad (16)$$

ここに $j=1, 2, 3, \dots, 9$ であり、 N_j はそれぞれ自然座標系（ ξ, η ）により次式のように表わされる。

$$N_1 = \xi \eta (1 - \xi)(1 - \eta) / 4$$

$$N_2 = -\xi \eta (1 + \xi)(1 - \eta) / 4$$

$$N_3 = \xi \eta (1 + \xi)(1 + \eta) / 4$$

$$N_4 = -\xi \eta (1 - \xi)(1 + \eta) / 4$$

$$N_5 = -\eta (1 - \xi^2)(1 - \eta) / 2$$

$$N_6 = \xi (1 + \xi)(1 - \eta^2) / 2$$

$$N_7 = \eta (1 - \xi^2)(1 + \eta) / 2$$

$$N_8 = -\xi (1 - \xi)(1 - \eta^2) / 2$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

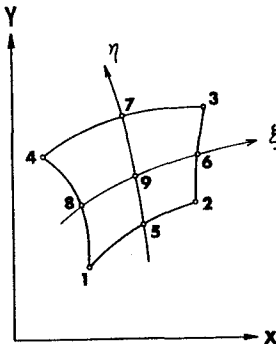


FIG. 1

(17)

座標系 X^i が直交するものと仮定すれば、回転テンソルは $R_{ij} = R^i_j$ となり、

$$R_{ij} = \left[\begin{array}{c} (\theta_0^2 - \theta^2) \delta_{ij} - 2 \varepsilon_{ijk} \theta_0 \theta \\ \end{array} \right] / (4 - \theta_0^2), \quad \theta_0 = (16 - \theta^2) / 8 \quad (18)$$

と与えられる。ここに ε_{ijk} は交代記号である。

以上の形状関数ならびに変位関数を用いて、式 (15) に基づき通常の有限要素法に従って計算することにより以下の関係式が得られる。

$$\underline{k}(u_i, \theta) = \underline{f} \quad (19)$$

ここで積分はガウスの積分公式を用いており積分点数は 3×3 としている。式 (19) は一般に高次の非線形方程式となり、ここではNewton-Raphson法を用いて解を求めている。収束の判断は、不平衡力のユークリッドノルムが規定の値以内に収まったときに収束とし、次の段階に進むこととする。

4. 数値計算例

ここでは、平面応力問題に限定して考えることとし、まず線形問題を解くことにより、既存の膜要素と比較しかなり精度が向上していることを示す。すなわち、既存のモデルで問題となっているロッキング現象（剪断ロッキング、要素形状のゆがみから来るロッキング等）は存在しないこと、およびゼロエネルギーモードは発生しないことを示す。次に非線形問題を解き、本モデルの妥当性を明らかにする。

4. 1 線形問題

まず、Fig. 2 に示すモデルの剛性マトリックスの固有値を計算し、それをTable 1 に示す。なお、線形問題においても積分点数は 3×3 である。Table 1 からわかるように本モデルは3個の零固有値をもち、これらは全て剛性変位に関係していることから、ゼロエネルギーモードの発生は生じないことがわかる。次にFig. 3 に示すパッチテストを行ないその結果をTable 2 に示す。純引張問題においては、点 (1, 0) における u , v , θ を固定し、純剪断問題においては点 (0, 0) における u , v , θ を固定した。Table 2 より、回転角はほぼ零とみなせることから、本モデルは c。パッチテストを合格していることがわかる。

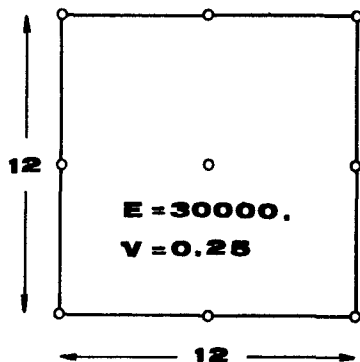


FIG. 2

Table 1 Eigen Values

No.		No.		No.	
1	$0.2137 \cdot 10^7$	10	$0.9685 \cdot 10^5$	19	$0.1930 \cdot 10^5$
2	$0.7012 \cdot 10^6$	11	$0.6620 \cdot 10^5$	20	$0.1702 \cdot 10^5$
3	$0.7012 \cdot 10^6$	12	$0.6352 \cdot 10^5$	21	$0.1349 \cdot 10^5$
4	$0.3112 \cdot 10^6$	13	$0.4651 \cdot 10^5$	22	$0.7730 \cdot 10^4$
5	$0.3104 \cdot 10^6$	14	$0.4651 \cdot 10^5$	23	$0.7730 \cdot 10^4$
6	$0.2266 \cdot 10^6$	15	$0.4583 \cdot 10^5$	24	$0.4563 \cdot 10^4$
7	$0.1604 \cdot 10^6$	16	$0.3426 \cdot 10^5$	25	$-0.1347 \cdot 10^{-10}$
8	$0.1604 \cdot 10^6$	17	$0.2535 \cdot 10^5$	26	$-0.4425 \cdot 10^{-10}$
9	$0.9685 \cdot 10^5$	18	$0.1930 \cdot 10^5$	27	$0.4694 \cdot 10^{-11}$

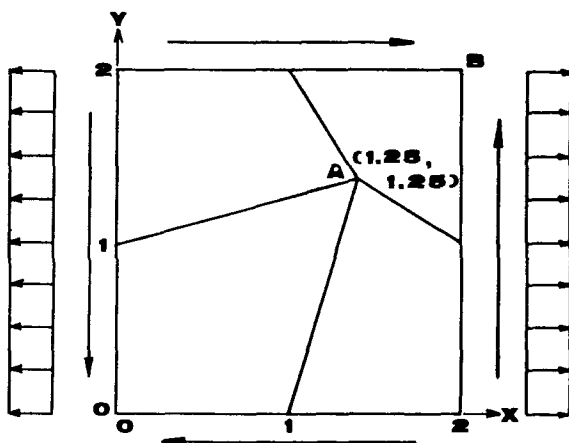


FIG. 3

次にロッキング現象の発生の有無を調べるため、薄肉はりの純曲げ問題を考える (Fig. 4)。この問題は、剪断ロッキングと同時に要素形状のゆがみから生じるロッキングを調べるためにYunus [11] により提案されたものである。使用した材料定数は $E=3 \times 10^7$, $\nu=0.3$, $t=1$ であり、Table 3 に数値解と厳密解との比を示したが、その際に厳密解のたわみと回転角はそれぞれ 1.8×10^{-4} と 0.6×10^{-4} である。Table 3 に示すように、本モデルは従来のモデルよりはるかに精度が高いことがわかり、ロッキング現象が回避されていることがわかる。

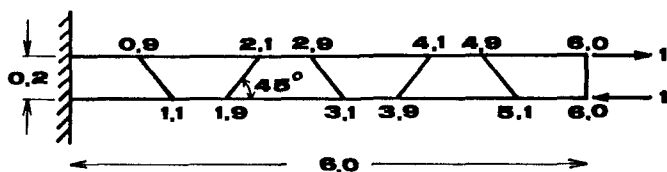


FIG. 4

Table 2 Patch Test

Pure Stretch				
A		B		
	Present	Exact	Present	Exact
u	1.00	1.00	1.00	1.00
v	1.00	1.00	1.00	1.00
θ	-0.42×10^{-7}	0.00	-0.20×10^{-6}	0.00

Pure Shear				
A		B		
	Present	Exact	Present	Exact
u	1.00	1.00	1.00	1.00
v	1.00	1.00	1.00	1.00
θ	0.26×10^{-11}	0.00	0.26×10^{-11}	0.00

Table 3 Thin Beam

Element	Tip Defl.	Tip Rotat.
Yunus [13] (Mixed AT)	0.50	-----
Yunus [13] (Mixed AQ)	0.85	-----
Allman *	0.21	-----
Pian *	0.16	-----
Cook *	0.82	-----
Present	0.997	0.998

* These values are given in [13]

次に膜要素の精度の検証に多用されている厚肉はりおよびCookの問題を考える。Fig. 5 に厚肉はりの形状および材料定数を、Fig. 6 にCookの問題における片持はりの形状および材料定数を示した。数値解と厳密解

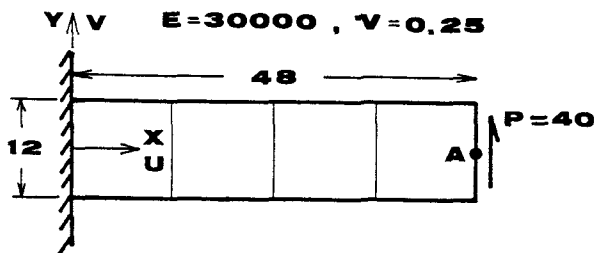


FIG. 5

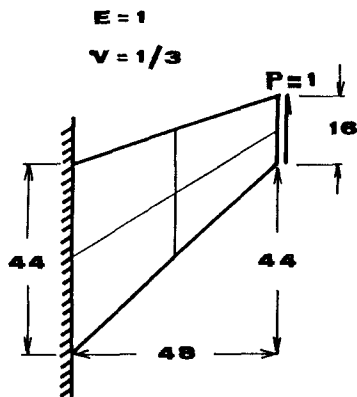


FIG. 6

との比をそれぞれTable 4 及びTable 5 に示したが、その際に厳密解として厚肉はりでは 0.35583 をCookの問題では23.91 を用いた。これらより、本モデルは他の膜要素に比較し、かなり精度が高いことが確認されたものと思われる。

Table 4 Thick Beam

Element	No. of D.O.F.	Tip Defl.
Allman [3]	81	0.9164
Bergan [5]	81	0.9772
MacNeal [4]	30 a	0.9776
MacNeal [4]	30 b	0.9581
Cook [6]	30	0.9226
Sabir [7]	81	0.9707
Bergan [8]	81	0.9995
Cook [11]	30	1.0490
Lee [9]	81	0.8313
Allman [10]	81	0.9089
Yunus [13]	30 c	1.0140
Yunus [13]	30 d	0.9308
Present	45	0.9724
Present	81	0.9895

a: Spurious modes are not controlled
b: Spurious modes are controlled
c: Mixed AT d: Mixed AQ

Table 5 Cook's Problem

Element	No. of D.O.F.	Tip Defl.
Bergan [5]	75	0.9377
Bergan [8]	75	0.9665
Cook [11]	75	0.9682
Yunus [13]	75 a	0.9594
Yunus [13]	75 b	0.9728
Present	75	0.9730
Present	243	0.9971

a: Mixed AT b: Mixed AQ

4. 2 非線形問題

ここでは片持ちはりの大変形問題を、本膜要素を用いて解析する。既に4. 1で示したように、本要素は剪断ロッキングを生じることなく厚肉のはりから薄肉のはりまで解析することが確認されている。数値計算には、はり高を1、はり長を5、要素数を5、 $E=300$ 、 $\nu=0.0$ 、としており、不平衡力のユークリッドノルムが増分荷重の 10^{-4} 以内になった時収束と判断している。なお、本解析では各段階において3～5回の収束演算を行なった。Fig. 7にはり理論による解析解（但し剪断変形の影響を無視している）と本数値解の比較を行なっており、参考のため文献[18]において得られている剪断変形を考慮したはり理論の有限要素解も示した。図からもわかるように、本数値解は剪断変形を考慮したはりの数値解とよく一致しており、これより本モデルの妥当性が示された。

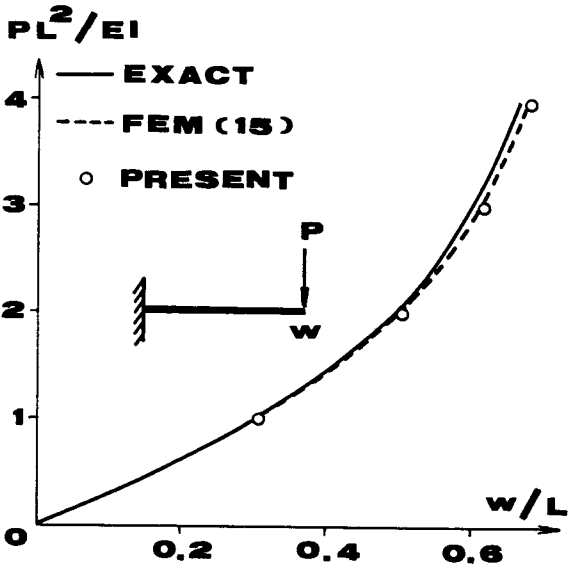


FIG. 7

5. おわりに

本論文では幾何学的非線形性を考慮し、さらに面内回転角を自由度に含む膜要素について考察した。これまでの並進変位成分だけを含む古典理論ではなく、新たに面内回転角を自由度として含む2次元弾性理論に基づき、9節点を有する膜要素モデルを提案した。このモデルは曲げ要素と組み合わせることは非常に容易であり、これまでの有限要素法と何ら変わる所は無く、シェル構造物の解析を容易なものとしている。特に曲面要素で問題となる Membrane Locking は自動的に回避されると共に、従来の人工的な回転角と異なり、物理的な意味を有している。このことは、数値解析からも明らかであり、本数値解は変位ばかりでなく面内回転角についても良い近似を与えていることが確認された。

なお、本論文の作成に当り、東京電機大学理工学部 福島良和君の助力を得た。ここに記して感謝の意を表す。本研究の一部は、文部省科学研究費の援助によって行なわれたものである。

6. 参考文献

- [1] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
- [2] 吉田・雨宮・増田: 立体構造解析のための薄板有限要素, 土木学会論文報告集, 第 211号, 19-28, 1973.
- [3] Allman, D. J.: A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, Computers and Structures, 19, No. 1-2, 1-8, 1984.
- [4] MacNeal, R. H. and R. L. Harder: A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom, Computers and Structures, 28, No. 1, 75-84, 1988.
- [5] Bergan, P. G. and C. A. Felippa: A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 50, 25-69, 1985.
- [6] Cook, R. D.: On the Allman triangle and a related quadrilateral element, Computers and Structures, 22, No. 6, 1065-1086, 1986.
- [7] Sabir, A. B.: A Rectangular and a triangular plane elasticity element with drilling degree of freedom, Proc. of 2nd Int. Conf. on Variational Method in Eng., Ed. C. A. Brebbia, 9-17 - 9-26, Univ. of Southampton, 1985, Springer-Verlag.
- [8] Bergan, P. G. and M. K. Nygard: A quadrilateral membrane element with rotational freedoms, Proc. of ICCM, Ed. by G. Yagawa and S. N. Atluri, I-41 - I-50, Tokyo, 1986, Springer-Verlag.
- [9] Lee, S. C. and C. H. Yoo: A novel shell element including in-plane torque effect, Computers and Structures, 28, No. 4, 505-522, 1988.
- [10] Allman, D. J.: Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations, Int. J. Numer. Methods Eng., 26, 2645-2655, 1988.
- [11] Cook, R. D.: A plane hybrid element with rotational D.O.F. and adjustable stiffness, Int. J. Numer. Methods Eng., 24, 1499-1508, 1987.
- [12] Yunus, S. M.: A study of different hybrid elements with and without rotational D.O.F. for plane stress/plane strain problems, Computers and Structures, 30, No. 5, 1127-1133, 1988.
- [13] Yunus, S. M., S. Saigal and R. D. Cook: On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom, Int. J. Numer. Methods Eng., 28, 785-800, 1989.
- [14] Hughes, T. J. R. and F. Brezzi: On drilling degrees of freedom, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 72, 105-121, 1989.
- [15] Reissner, E.: A note on variational principles in elasticity, Int. J. Solids and Structures,

1, 93-95, 1965.

[16] 鈴木・金子：有限要素法による部材構成板要素の座屈及び座屈後挙動の大変形解析，日本建築学会論文報告集，第 316号，9-17, 1982.

[17] 吉田・増田・松田：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大变位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第 288号，41-55, 1979.

[18] Chaisomphob, T., F. Nishino, A. Hasegawa and A. G. A. Abdel-Shafy: An elastic finite displacement analysis of plane beams with and without shear deformation, Proc. of JSCE, No. 368/I-5, PP. 157-165, 1986.

(1989年10月 2日受付)