

動弾性解析のための 境界要素・有限要素時間領域結合手法

A TIME DOMAIN COUPLING PROCESS OF BOUNDARY AND FINITE ELEMENT
FOR ELASTODYNAMIC ANALYSIS

阿部和久*

Kazihisa ABE

An efficient time domain coupling process of boundary and finite element for elastodynamic analysis is presented. In this approach, the ratio of time increment of boundary element method to the one of finite element method is chosen to be an integer and the interporation of boundary element equations in two successive time steps is combined with the finite element equation. Wave propagation in a half-infinite rod and response of an alluvial valley to vertically incident SV wave are employed to check the performance of this method. Comparisons between this coupling process and a case having a common time increment in both boundary and finite element method, based on the above-mentioned numerical analysis, show that improvement in accuracy and stability of the solution is achieved through implementation of the proposed strategy.

1. はじめに

現在、弾性問題を初めとする多くの工学的問題において、有限要素法や境界要素法などの数値解法が広く用いられている。有限要素法は、不均一な領域を対象とする場合や対象領域の形状が複雑な場合、または系の挙動が非線形性を有する場合などの解析に適した解法である。一方、境界要素法は無限または半無限領域を解析対象とする場合や、き裂先端のように解が急激に変化する場合の解析などに有効な解法である。いずれの解法においても一長一短があり、対象とする問題に合わせた柔軟な解法の選択が望ましいといえる。また、一部に不均一性を有する無限な領域や、複雑な境界形状を一部にもつ無限領域などを解析対象とする場合には、領域の一部分を有限要素法で表現し、他の部分に境界要素法を適用した結合解法が有効な手法となりうる^{1), 2), 3)}。

弾塑性解析において境界要素法と有限要素法との結合法を適用した例としては、岸本⁴⁾らによるものがあり、き裂先端の塑性域を含む領域を有限要素法で表現し、他の領域に対し境界要素法が用いられている。また、無限および半無限領域の解析に対し結合解法を用いた例は多く、特に波動問題の解析において境界要素解は散乱波の放射条件を自動的にみたすため、この分野における結合解法の適用は盛んである。

境界要素法と有限要素法との結合解法を波動解析に適用する場合、周波数領域での結合と時間領域での結合とがあげられるが、適用例の大部分は周波数領域におけるものである^{5) - 10)}。時間領域での結合解法^{11) - 13)}には、解の安定性や、境界要素法において必要となる記憶容量および計算時間の時間ステップの進行に伴う増加、といった問題点があるが、その反面、非定常解析や非線形応答解析等に直接適用可能であるとい

*工修 新潟大学助手 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050番地)

った利点もある。また、時間領域での動弾性解析に境界要素法や有限要素法を単独に用いた場合の解の精度や安定性に関しては多くの報告があるが、結合時に対する検討は少ない。

そこで、本研究では動弾性解析に時間領域型の境界要素法と有限要素法の結合解法を適用する際に、特に時間方向の扱い方が解の挙動へ与える影響について検討を行なった。結合の際の時間方向の取り扱い方は、境界要素法における時間ステップ幅を有限要素法の時間ステップ幅より長くとり両者を結合して解く方法^{1,2)}と、境界要素法と有限要素法の両者に対し同一の時間ステップ幅を与えて解く方法の2通りに分けることができる。以下では、前者の手法の下で境界要素方程式の線形補間と有限要素方程式とを結合して解く方法を示し、解の精度の比較を通して、その適用性について調べる。また、有限要素法の時間積分方法にNewmarkの β 法を用いたが、 β のとり方が結合解法へ及ぼす影響についても解析例を通していくらかの検討を行なった。

2. 解析方法

(1) 基礎方程式

本研究では二次元面内波動問題について考える。

解析対象領域 Ω は図-1に示すように、境界要素領域 Ω_B と有限要素領域 Ω_F とから成っているものとし、相互の結合境界を Γ_C とする。また、変位が与えられている境界を Γ_u 、表面力の規定されている境界を Γ_p とすれば、動弾性問題に対する基礎方程式は以下の式(1)～(3)で与えられる。

支配方程式

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots(1)$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(x, t) \quad (x \in \Gamma_u) \\ (\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}))n_j &= p_i(x, t) = \bar{p}_i(x, t) \quad (x \in \Gamma_p) \end{aligned} \right\} \quad \dots(2)$$

初期条件

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, 0) &= u_{0i}(x) \\ \dot{u}_i(x, 0) &= v_i(x, 0) = v_{0i}(x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots(3)$$

ここで、 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ 、 $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$ 、 δ_{ij} はKroneckerのデルタ、 λ 、 μ はLame定数、 u_i 、 p_i はそれぞれ変位および表面力成分、 ρ は密度、 b_i は物体力、 n_i は境界外向き単位法線ベクトルである。なお、繰り返し指標については総和規約に従うものとする。また、式(3)で u_{0i} 、 v_{0i} は変位と速度成分の時刻 $t=0$ における初期値である。以下においては簡単のため $b_i = u_{0i} = v_{0i} = 0$ とする。

(2) 有限要素方程式

式(1)の支配方程式に対する有限要素法による離散化は次式のようにになる。

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad \dots(4)$$

ここで、 M は質量行列、 K は剛性行列、 u は節点変位ベクトル、 F は節点力ベクトルである。また、系に粘性抵抗が働く場合には式(4)の左辺に減衰項 $C\dot{u}$ が付加される。ここで C は減衰行列である。以下では簡単のため非減衰系について考える。なお、本研究では、有限要素に三節点三角形要素を用い、質量行列にはコンシステント・マス・マトリックスを用いた。

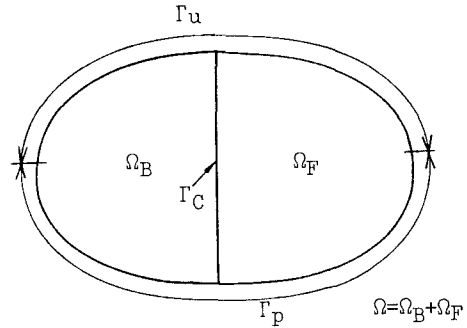


図-1 境界要素と有限要素との結合

式(4)は時間に関する2階常微分方程式となっている。この方程式の数値積分法として、ここではNewmarkの β 法¹⁴⁾を用いることとする。すると、第 n 時間ステップでの解 u_n と第 $n+1$ ステップの解 u_{n+1} との関係は次式で与えられることとなる。

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + ((1-\gamma)\ddot{u}_n + \gamma\ddot{u}_{n+1})h \quad \cdots(5)$$

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n h + ((\frac{1}{2}-\beta)\ddot{u}_n + \beta\ddot{u}_{n+1})h^2 \quad \cdots(6)$$

ここで、 h は時間ステップ幅であり、 γ 、 β は $\ddot{u}_{n+1}$ の u_{n+1} および $\dot{u}_{n+1}$ への寄与の度合いを示すパラメータである。式(5)で $\gamma < 1/2$ の場合には解に負の減衰が生じ、 $\gamma > 1/2$ では逆に正の減衰を生ずることとなる¹⁴⁾ので、ここでは $\gamma = 1/2$ とする。

式(5)、(6)より、 $\ddot{u}_{n+1}$ 、 $\dot{u}_{n+1}$ を u_{n+1} 、 u_n 、 $\dot{u}_n$ 、 $\ddot{u}_n$ で表すと次のようになる。

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} u_{n+1} + \alpha_n \quad \cdots(7)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} u_{n+1} + \delta_n \quad \cdots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{1}{\beta h^2} u_n - \frac{1}{\beta h} \dot{u}_n - (\frac{1}{2\beta} - 1) \ddot{u}_n \\ \delta_n &= -\frac{\gamma}{\beta h} u_n + (1 - \frac{\gamma}{\beta}) \dot{u}_n + (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) h \ddot{u}_n \end{aligned} \right\} \quad \cdots(9)$$

式(7)~(9)を式(4)へ代入すると u_{n+1} に関する次の方程式を得る。

$$\bar{K} u_{n+1} = F_{n+1} + \bar{F}_n \quad \cdots(10-a)$$

$$\bar{K} = \frac{1}{\beta h^2} M + K, \quad \bar{F}_n = -M \alpha_n \quad \cdots(10-b)$$

(3) 境界要素方程式

動弾性問題に対し、時間領域型の境界要素法を適用する場合、式(1)~(3)の基礎方程式に対する解 u_i と時間依存の基本解 u_{ij}^* とに関する相反関係式¹⁵⁾から得られる次の境界積分方程式が離散化の対象となる。

$$c_{ij} u_j(x, t) = - \int_{\Gamma} \int_0^{t+} p_{ij}^*(x, t; y, \tau) u_j(y, \tau) d\tau d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \int_0^{t+} u_{ij}^*(x, t; y, \tau) p_j(y, \tau) d\tau d\Gamma_y \quad \cdots(11)$$

式(11)の基本解 u_{ij}^* は次式をみたし、 p_{ij}^* は変位 u_{ij}^* による表面力に対応した基本解である。

$$(\lambda + \mu) u_{k,j,j}^* + \mu u_{k,i,j,j}^* - \rho \ddot{u}_{k,i}^* = -\delta_{ki} \delta(x-y) \delta(t-\tau) \quad \cdots(12)$$

ここで $\delta()$ はDiracのデルタ関数である。

式(11)の u_i および p_i を境界方向と時間方向とに対し離散化近似すると、第 $n+1$ ステップの解に対して次の方程式を得ることとなる。

$$H^1 u_{n+1} = G^1 p_{n+1} + \sum_{m=2}^{n+1} (G^m p_{n+2-m} - H^m u_{n+2-m}) \quad \cdots(13)$$

ここで、 H^m 、 G^m は式(11)の離散化により得られる係数行列であり、 u_m 、 p_m は第 m 時間ステップにおける境界節点変位ベクトルおよび表面力ベクトルである。なお、本研究では、変位、表面力共に境界要素上では区間線形で補間し、時間方向に対しては各時間ステップの間において変位は線形、表面力は一定となるような補間を採用したが、このような時間方向の補間は解の安定性の上で有効とされている。

(4) 境界要素法と有限要素法との結合

境界要素法と有限要素法とを結合して用いる場合、境界要素方程式を有限要素型に変換する方法と、逆に有限要素方程式を境界要素型に変換する方法¹⁰⁾の主に二つの扱いがあるが、以下では前者に基づいた結合方法について説明する。

まず、境界要素方程式は式(13)により次のように与えられる。

$$H^1 u_{n+1} = G^1 p_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} \quad \cdots(14\cdot a)$$

$$\tilde{u}_{n+1} = \sum_{m=2}^{n+1} (G^m p_{n+2-m} - H^m u_{n+2-m}) \quad \cdots(14\cdot b)$$

$\tilde{u}_{n+1}$ は(14・b)に定義したように n ステップ目までの解より求めることができる。

式(14・a)の両辺に左から $[G^1]^{-1}$ をかけると次式を得る。

$$(G^1)^{-1} H^1 u_{n+1} = p_{n+1} + (G^1)^{-1} \tilde{u}_{n+1} \quad \cdots(15)$$

有限要素方程式は節点変位と節点力との関係式であるので、式(15)の節点表面力 p_{n+1} をさらに節点力に変換する必要がある。そこで、表面力を節点力に変換するための分布マトリックス D を変位と表面力の補間関数の各要素上での内積より求め、式(15)の両辺に左からかけると次の有限要素型の方程式を得ることとなる。

$$K_B u_{n+1} = F_{n+1} + \tilde{F}_{n+1} \quad \cdots(16\cdot a)$$

$$K_B = D(G^1)^{-1} H^1, F_{n+1} = D p_{n+1}, \tilde{F}_{n+1} = D(G^1)^{-1} \tilde{u}_{n+1} \quad \cdots(16\cdot b)$$

式(16・a)で K_B は有限要素法の剛性行列に相当する行列であるが、一般に非対称行列となる。記憶容量や計算時間の節約のために、以下のように剛性行列を対称化する方法が用いられることがある^{1), 3)}。

$$\bar{K}_B = \frac{1}{2} (K_B + K_B^T) \quad \cdots(17)$$

ここで、 K_B^T は K_B の転置行列である。

K_B の非対称性の度合いは境界要素方程式系の自由度の増加に伴い減少するので⁴⁾、ある程度細かな分割を与えることで K_B を用いて得られる解と式(17)の $\bar{K}_B$ を用いて得られる解との差を十分小さくすることができると思われる。しかし、非対称行列をそのまま用いる方が対称化したものを用いる場合より良好な結果を与えるという報告もある^{16), 17)}。また、時間領域型の境界要素法を動弾性問題に用いる場合、有限要素の自由度が境界要素の自由度に比べて極端に多くない限り、計算時間の大部分は式(13)の係数行列 H^m 、 G^m および式(14・b)の $\tilde{u}_{n+1}$ の計算に費やされることとなる¹⁸⁾。したがって境界要素領域に対する剛性行列には式(16・b)の K_B を用いることとした。

また、境界要素領域 Ω_B と有限要素領域 Ω_F との結合境界 Γ_C 上での解の連続条件は次式のようになる。

$$u_B = u_F, p_B + p_F = 0 \quad (\text{on } \Gamma_C) \quad \cdots(18)$$

ここで、 u_B 、 p_B は Γ_C 上の境界要素解、 u_F 、 p_F は有限要素解である。

式(18)を Γ_C 上の節点変位および節点力に直接対応させることにより次式を得る。

$$u_{n+1,B} = u_{n+1,F}, F_{n+1,B} + F_{n+1,F} = 0 \quad \cdots(19)$$

式(10・a), (16・a)および(19)より結合解法に必要な式を全て得ることとなる。

有限要素法での時間ステップ幅 h_F と境界要素法の時間ステップ幅 h_B に同一の値を用いる場合、式(10・a), (16・a), (19)より直ちに解を解き進めることが可能である。しかし、有限要素法の時間積分にNewmarkの β 法を用いる場合、 $\gamma=1/2$ に対しては $\beta \geq 1/4$ とすることで解は無条件に安定とはなるが、精度の良い結果を得るには h_F をある程度小さく設定する必要がある。一方、境界要素法では、比較的大きな h_B に対しても良好な結果を得ることができ、むしろ h_B を必要以上に小さくすることは計算時間や記憶容量などの面から得策とはいえない。したがって、 $h_F < h_B$ において結合解法を適用することが望ましいと思われる。しかし、 h_F と h_B に異なる値を用いる場合、式(19)の関係を直接用いることができないために何らかの工夫が必要である。例えば、福井¹²⁾ は h_B を h_F の整数倍にとり、まず結合部の境界要素における表面力を前ステップの値で仮定し時間区間 h_B での解を解き進め、その結果より得られる境界要素表面力が十分収束するまで同様

の手順を繰り返す、という方法を提案している。福井の方法によれば上述の問題点を改善することが可能となるが、1時間ステップ内での繰り返し計算が必要である。そこで、本研究では h_B を h_F の整数倍にとり、かつ繰り返し計算を行わずに時間ステップを進める以下に示す方法を用い、その有効性について検討することとした。

まず、 h_B と h_F との比を N とする($N = h_B / h_F$)。境界要素法の節点変位については1時間ステップ区間で線形に補間しているので、第 n ステップ目の解 $\mathbf{u}_n$ と第 $n+1$ ステップ目の解 $\mathbf{u}_{n+1}$ との間で変位は線形に変化するものとする。すると、時刻 $n h_B + i h_F$ ($i=1, 2, \dots, N$)における境界要素解の変位 $\mathbf{u}_{n+i/N}$ は次式で与えられることとなる。

$$\mathbf{u}_{n+i/N} = \frac{N-i}{N} \mathbf{u}_n + \frac{i}{N} \mathbf{u}_{n+1} \quad (i=1, \dots, N) \quad \dots(20)$$

また、式(16・a)より $\mathbf{u}_n$ 、 $\mathbf{u}_{n+1}$ に対しては次式が成り立つ。

$$\mathbf{K}_B \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_n + \tilde{\mathbf{F}}_n, \mathbf{K}_B \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \tilde{\mathbf{F}}_{n+1} \quad \dots(21)$$

式(20), (21)より $\mathbf{u}_{n+i/N}$ に対して次の方程式を得る。

$$\mathbf{K}_B \mathbf{u}_{n+i/N} = \frac{1}{N} \{ (N-i) \mathbf{F}_n + i \mathbf{F}_{n+1} \} + \frac{1}{N} \{ (N-i) \tilde{\mathbf{F}}_n + i \tilde{\mathbf{F}}_{n+1} \} \quad \dots(22)$$

式(22)において $\tilde{\mathbf{F}}_n$ 、 $\tilde{\mathbf{F}}_{n+1}$ は式(14), (16)に示したように n ステップ目までの解より求めることができる。また、境界要素法の表面力は1時間ステップ内では一定としたので $\mathbf{u}_{n+i/N}$ に対する節点力は本来 $\mathbf{F}_{n+1}$ と等しくすべきであると考えられるが、ここでは式(22)の右辺第一項を時刻 $n h_B + i h_F$ における節点力とみなし $\mathbf{F}_{n+i/N}$ とする。

一方、 $n h_B + i h_F$ での有限要素方程式は式(10・a)より次のようになる。

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{n+i/N} = \mathbf{F}_{n+i/N} + \bar{\mathbf{F}}_{n+(i-1)/N} \quad (i=1, \dots, N) \quad \dots(23)$$

式(22), (23)で Γ_c 上の節点に対し、 $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_F$ 、 $\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_F = 0$ とすれば $\mathbf{u}_{n+i/N}$ を求めることができる。この操作を $i=1, \dots, N$ に対し行なうことで第 $n+1$ ステップ目の解を得ることができる。

3. 半無限弾性棒の衝撃応答解析

図-2に示す半無限長の弾性棒にステップ状に外力が作用する場合の解析に前述の結合解法を適用し、結合境界面での波動の伝播の様子から適用性の検討を行なう。なお、図-2において C_L 、 C_T は棒中を伝わる縦波、横波の伝播速度である。

境界要素法と有限要素法による領域の分割方法としては図-3に示すように、荷重端側を有限要素領域とする場合：Case-Iと境界要素領域とする場合：Case-IIの2ケースを考えた。

その他の解析条件としてCase-I, II共にNewmarkの β は1/4とし、時間ステップ幅のとり方として次の4通りを採用した。

- ① $C_L h_B = C_L h_F = 0.25$ ② $C_L h_B = C_L h_F = 0.125$
 ③ $C_L h_B = 0.25, h_F = h_B/2$ ($N=2$) ④ $C_L h_B = 0.25, h_F = h_B/3$ ($N=3$)

以上の各条件での結合境界点Aにおける応力の解析結果を境界要素法によって得られた解と合わせ図-4に示す。なお、Case-I, IIにおける結合境界点Aでの応力には式(15)によって得られる境界要素表面力を用いた。

衝撃が有限要素側から境界要素側へ伝わって行くCase-Iで、

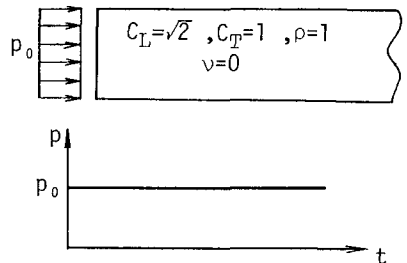
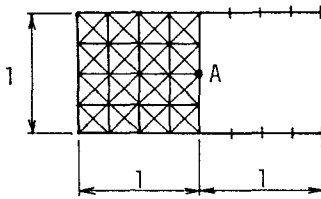
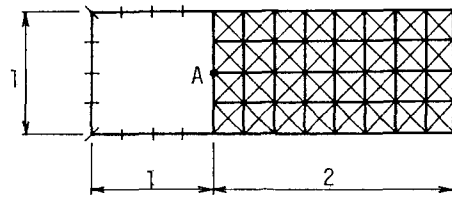


図-2 解析対象および荷重条件

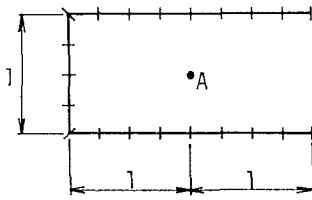


(a) Case-I

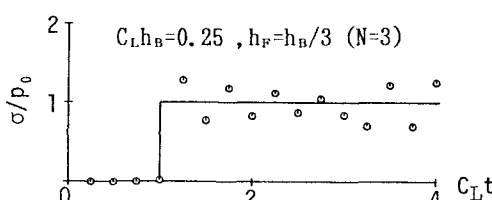
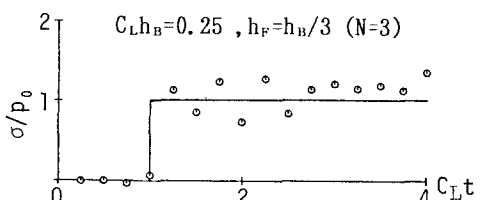
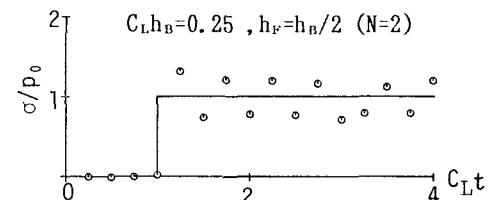
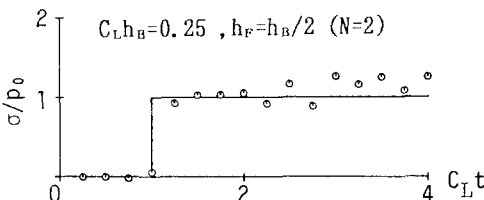
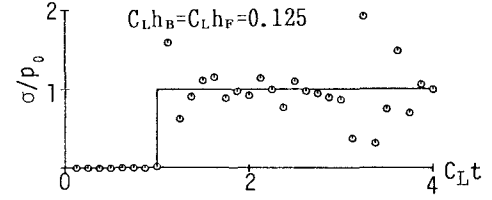
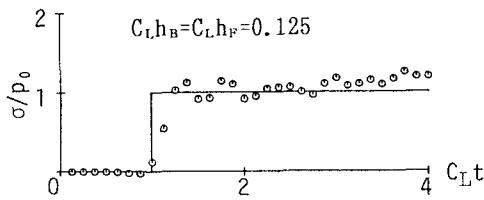
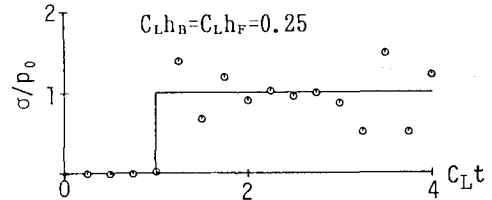
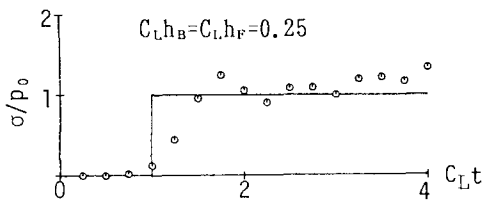
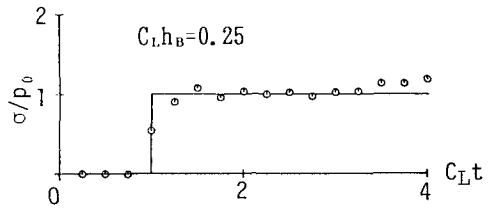


(b) Case-II

図-3 離散化方法



(a) 境界要素法による離散化方法および解析結果



(b) Case-I

(c) Case-II

図-4 結合境界点Aにおける応力応答結果

$h_B = h_F$ とした①、②の場合に応力が理論値に達するまでに数ステップを要している。特に、時間ステップ幅が大きい①において応答が鈍くなっている。一方、③、④においては、境界要素法の時間ステップ幅は①の場合と同一であるにもかかわらず、応力の応答に遅れは生じていない。

また、衝撃が境界要素側から有限要素側へ伝わって行くCase-IIにおいては、波動が結合境界点Aに到達した直後に応力の大きな乱れを生じている。特に①、②の場合 $C_L t = 3$ 以降に再度大きな乱れが生じており、時間ステップ幅を小さくしてもその傾向は変わっていないことがわかる。 $C_L t = 3$ は、境界要素領域中を縦波が伝播するのにかかる時間の3倍に相当していることから、後者の乱れは衝撃が境界要素領域と有限要素領域の結合境界に達した際に波動が有限要素側へ十分に伝わらず、その一部が反射し再度結合境界に到達した際に発生したものと考えられる。また、 $h_B > h_F$ とした③、④の場合においては応力に振動が生じてはいるが①、②の場合に見られたような大きな乱れは認められなかった。

本来、境界要素法は比較的大きな時間ステップ幅でも衝撃応答を精度よく表現することが可能であり、むしろ時間ステップ幅が極端に短い場合に不安定となることがある¹²⁾。一方、有限要素法で衝撃応答を精度よく求めるためには時間ステップ幅を短くとる必要がある。そのため、Case-Iのように有限要素側から境界要素側へ衝撃が伝わる場合には、有限要素解の比較的緩やかな挙動に境界要素解が応答するかたちとなり、解には大きな乱れは生じず、逆にCase-IIのように境界要素側から有限要素側へ衝撃が伝わる場合には、境界要素解の急激な応答に有限要素解が応答しきれず、解の乱れを生じたものと考えられる。したがって、特にCase-IIでは、有限要素側の応答精度を上げるために時間ステップ幅 h_F を短くとる一方、境界要素の安定性を確保するために境界要素法の時間ステップ幅 h_B をある程度大きくとっておくことが、解の乱れを防ぐために必要であるといえる。Case-IIにおいて①、②に比べ③、④の応力に乱れが少なかったのは以上の理由によるものと考えられる。また、Case-Iでは $h_B / h_F = N = 2$ の場合の方が $N = 3$ の場合より多少良好な結果を与えており、Case-IIにおいても $N = 2, 3$ の間に著しい差はなく、 $N = 2$ とすることで解の挙動は概ね改善されていることがわかる。

4. 不整形地盤の非定常応答解析

ここでは、基盤上に表層が堆積した不整形地盤に鉛直下方よりS V波が入波する場合の応答解析に結合解法を適用した結果について述べる。解析対象の諸条件は図-5に示したとおりであり、堆積層を有限要素(156要素)で表し、基盤を境界要素(41要素)で表している。また、入射S V波として、波長 $\lambda = 6000\text{m}$ のSine波

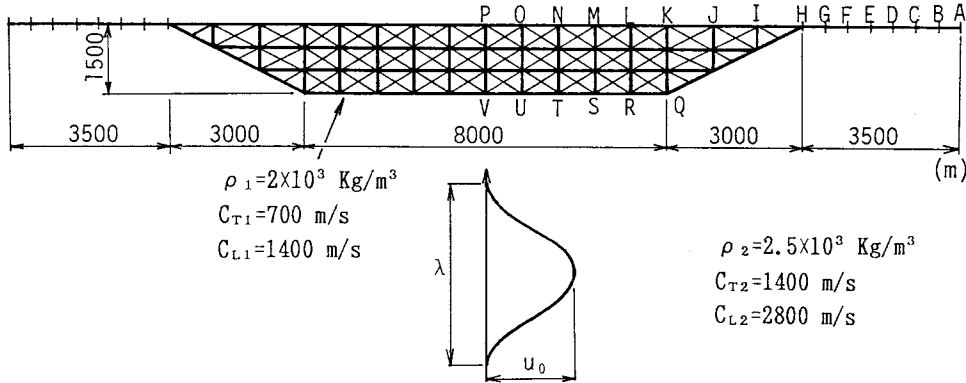


図-5 解析対象および離散化方法

形一波長分を用いた。

解析を行なうにあたり、境界要素法の時間ステップ幅 h_B は $0.35714(s)$ ($C_{T2}h_B=500m$) とし、有限要素法の時間ステップ幅 h_F には、 h_B と同一のもの ($N=1$) と、 h_B の $1/2$ のもの ($N=2$) とを用いた。また、Newmark の β には $\beta=0.25$ と 0.5 を用い、以下に示した 4 通りの条件 (Case-1~4) に対し解析を行なった。

Case-1: $h_B/h_F=N=1$, $\beta=0.25$ Case-2: $h_B/h_F=N=1$, $\beta=0.5$

Case-3: $h_B/h_F=N=2$, $\beta=0.25$ Case-4: $h_B/h_F=N=2$, $\beta=0.5$

基盤と表層の境界上の点 Q~V における水平方向変位応答を図-6 に示す。 $\beta=0.25$ とした Case-1 と 3 において 60 ステップ前後より解に振動が生じ出している。特に Case-1 では、中央点 V で発生した振動が次第に隣接する境界節点へ伝播して行く様子がよくわかる。 $N=2$ とした Case-3 では Case-1 に比べ振動はいくぶん小さめではあるが、やはり同様の傾向が得られている。一方、 $\beta=0.5$ とした Case-2, 4 においては、上述のような振動は生じなかった。そこで、 β と h_F の値のとり方が Case-1~4 の解析結果に対しどのように影響したのかについて考えてみる。

一自由度系の自由振動においては、真の周期 T と Newmark の β 法の解における周期 T_s との比、および初速度に対する変位振幅の真の値に対する比は次式で近似される¹⁴⁾。

$$T_s/T=1-(1-12\beta)\theta^2/24, A_s/A=1+(1/4-\beta)\theta^2/2 \quad \theta=\omega h_B \quad \omega: \text{角振動数} \quad \dots (24)$$

すると、 $h_F=h_B$ に対しては次のようになる。

$$T_s/T=1+0.083\theta^2, A_s/A=1 \quad (\beta=1/4) \quad ; T_s/T=1+0.208\theta^2, A_s/A=1-\theta^2/8 \quad (\beta=1/2)$$

また、時間ステップ幅 h_F を $h_B/2$ とすると、次式を得る。

$$T_s/T=1+0.052\theta^2, A_s/A=1 \quad (\beta=1/4) \quad ; T_s/T=1+0.028\theta^2, A_s/A=1-\theta^2/32 \quad (\beta=1/2)$$

以上より、周期のずれは、時間ステップ幅を $h_B/2$ とした方が小さくなり、また、初速度に対する変位振幅の減少は $\beta>1/4$ に対し生ずることとなる。

多自由度系に対して同様の傾向が成り立つものとすれば、Case-2 と 4 において速度による変位振幅の減少が生じ、応答の遅れは Case-2, 1, 3, 4 の順に生ずることとなる。すると、Case-2, 4 において振動が生じなかったことより、結合時の安定化は、速度による変位振幅の減少が主な要因であり、結合面の境界要素解に生ずる振動を隣接の有限要素が抑えたことによるものと考えられる。また、Case-2 の応答は安定ではあるが他のケースに比べ様子が異なり、応答に遅れが生じている。一方、Case-4 では、安定な結果が得られ、さらに Case-1, 3 と比べても変位応答に遅れは生じていない。以上のことより、 $\beta=1/2$ とし、かつ h_F を h_B の $1/2$ とすることにより、安定性の確保と応答の時間的遅れの抑制とが同時に達成されたことがわかる。

また、Case-4 で得られた地表面上の各節点における水平、鉛直方向の変位応答は図-7 のようであり、地表面部に

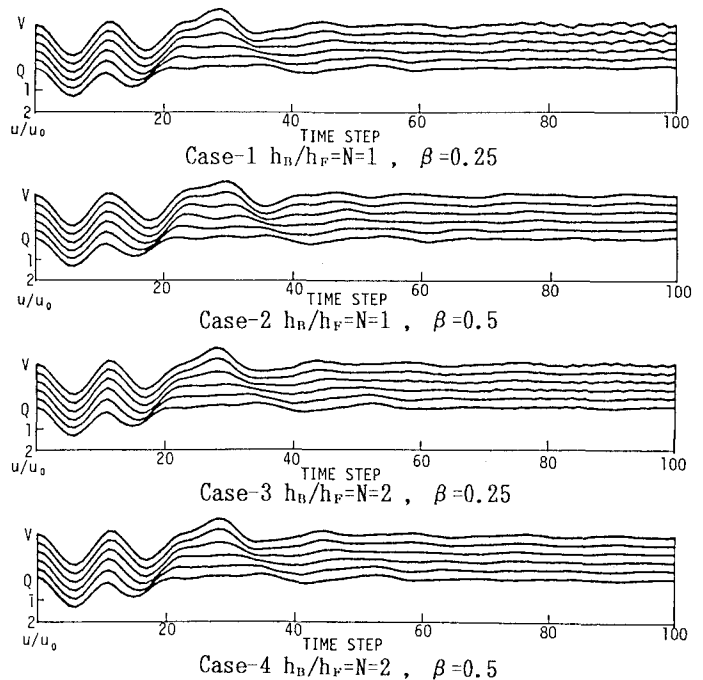


図-6 結合境界における水平方向変位時刻歴応答

おいても解は安定であることがわかる。なお、Case-1, 3においても振動の発生は認められたが、概ね同様の応答結果が得られ、Case-2ではやはり応答に遅れが認められた。

5. おわりに

時間領域動弾性解析に境界要素法と有限要素法による結合解法を適用する場合の時間方向の取り扱い方法について検討を行なった。ステップ状の荷重を受ける棒のように衝撃を受ける問題では、領域内の応力の変化が急激であるため、有限要素で精度の良い解を得るためには、時間ステップ幅 h_F を小さくとる必要があり、一方、境界要素法では比較的大きな時間ステップ幅 h_B に対しても精度の良い解析が可能であり、むしろ計算時間や解の安定性などの面から見て h_B を小さくすることは望ましくない。そこで、連続する時間ステッ

プに対する境界要素方程式の線形補間と有限要素方程式との結合により、 h_B を h_F の整数倍にとり、なおかつ繰り返し計算を必要とせずに解析を進める手法を構成し、上述の問題点の解決を試みた。解析結果より、本手法を用いることで、衝撃が有限要素側から境界要素側へ伝わる際の応力の立ち上がりが特に改善されることがわかった。一方、境界要素側から有限要素側へ衝撃が伝わる場合には、 $h_B = h_F$ とした場合に生じた応力の大きな乱れがある程度除かれることがわかった。

また、鉛直入射 S V 波を受ける不整形地盤の変位応答解析に結合解法を適用することにより、解の安定性に関する検討を行なった。その結果、Newmark の β を $1/2$ とし、さらに $h_B/h_F = 2$ とすることで、境界要素法と有限要素法との結合面より生ずる振動を抑え、応答の時間的遅れを抑制することが可能なことがわかった。

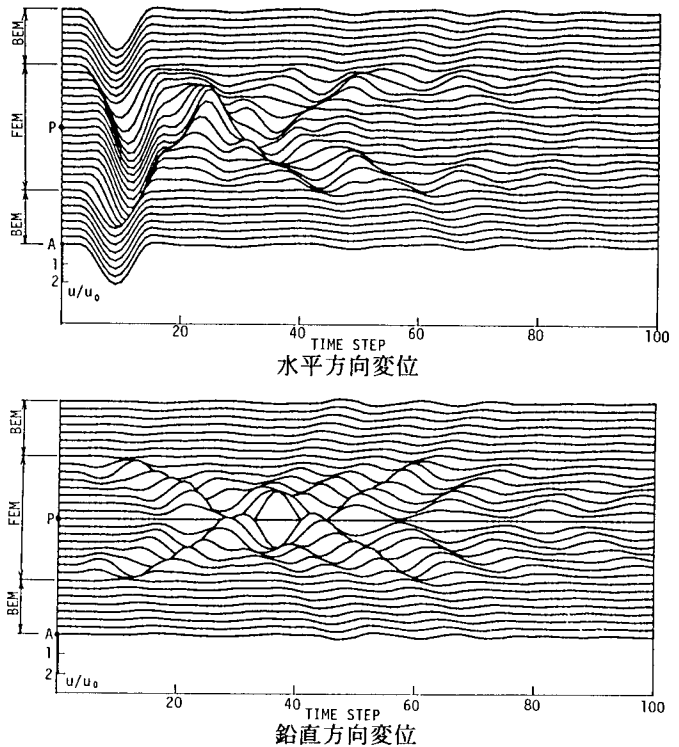


図-7 地表面変位時刻歴応答解析結果(Case-4)

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P.: The coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures, Int. J. Numer. Methods Eng. Vol. 11, pp. 355-375, 1977
- 2) Margulies, M.: Combination of the Boundary Element and Finite Element Methods, Chapter 8 in Progress in Boundary Element Methods, Vol. 1, Pentech Press, 1981.
- 3) Beer, G.: Implementation of Combined Boundary Element-Finite Element Analysis with Applications in Geomechanics, Chapter 7 in Developments in Boundary Element Methods-4, Elsevier, 1986.
- 4) 岸本喜久雄・他4名: 境界要素・有限要素結合法による弾塑性破壊力学解析, 日本機械学会論文集(A) 50巻460号, pp. 1963-1971, 1984.
- 5) Shah, A.H. and Wong, K.C.: Diffraction of Plane SH Waves in a Half-Space, Earthquake Eng. Struct. Dyn. Vol. 10, pp. 519-528, 1982.

- 6) Alyagshi Eilouch, M. N. and Sandhu, R. S. : A Mixed Method for Transient Analysis of Soil-Structure Interaction Under SH-Motion, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* Vol. 14, pp. 449-516, 1986.
- 7) 上杉真平・大津政康 : BEM-FEM結合法による二次元弾性定常波動場の解析, *土木学会論文集*第398号, pp. 295-301, 1988.
- 8) Kobayashi, S. and Kawakami, T. : Application of BE-FE Combined Method to Analysis of Dynamic Interactions Between Structures and Viscoelastic Soil, *Boundary Elements V.* Vol. 1, pp. 6-3~12, 1985.
- 9) Kitamura, E. and Urano, K. : Application of the BEM-FEM Hybrid Method to Dynamic Analysis of an Alluvial valley Subjected to Seismic Waves-Simulation Analysis of Strong Ground Motion in Mexico City, *Boundary Elements X.* Vol. 4, pp. 195-206, 1988.
- 10) 中村晋・他3名 : 傾斜基盤の存在により生じるLove波の特性, *土木学会論文集*第398号, pp. 399-348, 1988
- 11) Karabalis, D. L. and Beskos, D. E. : Dynamic Response of 3-D Flexible Foundations by Time Domain BEM and FEM, *Soil Dyn. Earthquake Eng.* Vol. 4, pp. 91-101, 1985.
- 12) 福井卓雄 : 二次元動弾性問題の時間積分境界要素法による解析, *構造工学における数値解析法シンポジウム論文集*第12巻, pp. 197-202, 1988.
- 13) Estorff, O. and Prabucki, M. J. : The coupling of Boundary and Finite Elements to Solve Transient Problems in Elastodynamics, *Boundary Elements X.* Vol. 4, pp. 447-459, 1988.
- 14) Newmark, N. M. : A Method of Computation for Structural Dynamics, *Proc. of A. S. C. E.* Vol. EM3, pp. 67-94, 1959.
- 15) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S. : *Elastodynamics* Vol. II, Academic Press, 1975.
- 16) Mathews, I. C. and Geers, T. L. : A Doubly Asymptotic, Nonreflecting Boundary for Ground-Shock Analysis, *ASME J. Appl. Mech.* Vol. 54, pp. 489-497, 1987.
- 17) Li, H., Han, G., Mang, H. A. and Torzicky, P. : A New Method for the Coupling of Finite and Boundary Element Discretized Subdomains of Elastic Bodies, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 54, pp. 161-185, 1986.
- 18) 吉田裕・阿部和久 : 時間領域型境界要素法による弾性波動解析に関する一考察, *構造工学論文集* Vol. 35A pp. 231-239, 1989.

(1989年10月2日受付)