

Navier-Stokes有限要素方程式非線形項の 収束計算のアルゴリズム

A METHOD FOR THE CONVERGENCE OF THE ADVECTION TERMS OF FINITE ELEMENT NAVIER-STOKES EQUATIONS

吉田 裕* 依知川 哲治** 津田 敏*** 佐々木 隆***

By Yutaka YOSHIDA, Tetsuji ICHIKAWA, Satoshi TSUDA and Takashi SASAKI

An iterative algorithm for the convergence of the advection terms of discretized Navier-Stokes equations is presented.

Considering the advection matrix is linear function of the velocities, parts of the unknown advection terms can be evaluated by the velocities which are previously obtained. Application of this relation leads to an iterative process for convergence of advection terms of the matrix equations. The procedure is adopted to the solution of a transient finite element equations.

In order to demonstrate the performance of the proposed method, sample solutions of vortex shedding behind a rectangular prism at a Reynolds number of 1200 are presented and discussed.

1. はじめに

非定常非圧縮粘性流れの問題は、工学上の広い分野において重要な問題である。有限要素法は、実際の複雑な境界形状に対して容易に適応できることから、Navier-Stokes方程式と連続の条件式を基礎として、これまでこの問題に対する解析法の構成を目的とした多くの研究が積み重ねられてきているが、基礎方程式に内在する取扱いの難しさのために様々な方向からなお研究が続けられている。解析を困難にしている要因は主として、非圧縮という拘束条件と、Navier-Stokes方程式に含まれる対流項に起因する方程式の非線形性である。

非圧縮の連続条件の取扱いに関しては、非圧縮の連続条件を直接評価する方法¹⁾⁴⁾⁸⁾、非圧縮条件に関する計算過程と非線形項に関する計算過程とに基礎方程式を分離するもの⁶⁾⁷⁾、Penalty関数法²⁾や Slight compressibility法³⁾⁵⁾のように非圧縮の連続条件を緩和する方法、などが主な方法としてあげられる。

対流項の非線形性に起因する数値的な不安定性の問題は、とくに対象とする流れのレイノルズ数が高くなればなるほど、対流項が支配的になるため、特に重要な問題であり、対流項の取扱いは解析法の鍵を握るのである。実際の流れの解析においては、例えば流れ場に渦が発生し、移動するといった状況をシミュレー

-
- * 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)
 - ** 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科
 - *** 工修 横河橋梁(研究当時、東京工業大学大学院修士課程)
 - **** 工修 建設省土木研究所(研究当時、東京工業大学大学院修士課程)

トしようとするれば、それを表現し得るだけの細かさの要素分割は必要であり、相当な大次元問題を対象として解析を行う必要が生ずることが多い。そのため、解析可能な自由度数を多く確保するために簡単な時間積分公式を用いて解法を構成し、その結果失われる安定性を数値粘性項の付加¹⁾や、運動方程式の重み関数を流れの方向に応じて変化させる要素の風上化^{2) 3) 4)}によって対応するといったことが行われている。例えば、風上要素の採用によりHughesらは文献[2]の中でレイノルズ数が 10^7 の「ステップを越える流れ」が安定に解けることを示しているが、数値粘性が過大に作用しており、後になって風上要素の高精度化に向けての改良が行われている³⁾。この、文献[3]で述べられている流線風上要素を用いた解析例として、円柱回りの流れの解析が行われているが、レイノルズ数100という問題に対して節点数1510、要素数1436、無次元化した積分時間間隔が0.03と、相当に細かい要素分割と積分時間間隔で行われており、風上化によって解析過程を安定化させることはできても、それなりの精度の解を得るためには、なお、相当に要素分割、積分時間間隔を細かくする必要があることがわかる。

陽な時間積分を用いて解析法を構成するなど、簡素化の方向で効率化して行く場合、時間積分法が条件安定であり積分時間間隔が相当小さく制限を受けることから、対流項については、一つ前の時間ステップの流速を用いて評価するだけとしたり¹⁾、予測子・修正子型のアルゴリズムで反復して再評価するものの、数回の反復で打ち切って次のステップに進めたりして³⁾計算時間の節約をはかっているが、得られる解の精度を確保するためには、要素分割や積分時間間隔のとりかたなどに関して相当な経験と注意が必要となる。

解析法の効率化の一つの方向として、たとえ演算量自体は余計にかかるとしても、精度の高い時間積分公式を用い、対流項について完全に収束させて、ステップごとに有限要素Navier-Stokes方程式を満足する解を求めていく過程を構成することにより解の安定性・信頼性を向上させていくという方向を考えることができる。

本研究は、新たな非線形項の収束のアルゴリズムを提案し、有限要素Navier-Stokes方程式⁹⁾の対流項の収束のアルゴリズムとして応用を行ったものである。Navier-Stokes方程式の対流項を右辺において時間積分公式を適用することにより得られる時刻 t_n から t_{n+1} への非線形な積分漸化式では、その右辺は時刻 t_n における既知の量と、 t_{n+1} における未知流速を含む対流項とによって与えられる。時刻 t_{n+1} における流速は反復の過程で既知となった部分と残りの部分とに分離することができるので、流速の1次関数として表される対流項を既知の流速によって表される部分と残りの部分とに分離することによって、反復計算の過程で、対流項の全てをつくり直すのではなく、求めることのできる部分から一つ一つ確定し、残りの増分を順次評価する計算のアルゴリズムを構成することができるという考えに基づいたものである。

岡島ら¹⁰⁾によって可視化された結果が与えられている、レイノルズ数1200の角柱回りの問題の解析を通して検証を行った結果、安定性、収束性に相当な改善が見られることが確かめられ、非線形方程式の解法としての実用性を確認することができた。

2. 対象とする非線形方程式

流速と圧力を基本変数として、Navier-Stokes方程式と非圧縮の連続条件式を直接離散化した場合、得られる有限要素方程式は通常、次のように書き表される。

$$[M]\{u\} + [K]\{u\} + [K_a(u)]\{u\} + [K_p]\{p\} = \{f\} \quad (1)$$

$$[K_p]^T\{u\} = \{0\} \quad (2)$$

ここに、 $[M]$ は質量に関する行列、 $[K]$ は粘性に関する行列、 $[K_p]$ は空間の勾配に関する行列、 $[K_a(u)]$ は対流項に関する係数行列である。また、 $\{u\}$ は流速、 $\{p\}$ は圧力、 $\{f\}$ は外乱項のベクトルである。

式(1)に対し、対流項を方程式右辺に置いて陰形式の時間積分公式を適用して得られる積分漸化式は、時刻 t_{n+1} における未知の流速 u_{n+1} によって記述される対流項 $[K_a(u_{n+1})]\{u_{n+1}\}$ の収束計算を必要とするものと

なる。本論文ではこの非線形項の収束のアルゴリズムを提案するものであるが、内容を明確にするために、まず、次のような形で表される式を対象として具体的に内容を説明する。

$$[A] \{x_{n+1}\} = \{R\} + [B(x_{n+1})] \{x_{n+1}\} \quad (3)$$

ここに、 $\{x_{n+1}\}$ が時刻 t_{n+1} における未知量である。左辺の係数行列 $[A]$ は1ステップの間では一定であるものとし、右辺第1項 $\{R\}$ は時刻 t_n において既知のベクトルであるものとする。右辺第2項は未知量 $\{x_{n+1}\}$ に関する非線形項で、係数行列 $[B(x_{n+1})]$ は有限要素Navier-Stokes方程式では $\{x_{n+1}\}$ の1次関数である。

3. 提案する非線形項収束のアルゴリズム

係数行列 $[A]$ が定数係数の場合には、式(3)の解 $\{x_{n+1}\}$ は式(3)の右辺の第1項から評価される部分と第2項から評価される部分の和として考えることができる。ここで、右辺第1項の既知のベクトル $\{R\}$ により評価される部分を $\{x^L\}$ とおき、

$$[A] \{x^L\} = \{R\} \quad (4)$$

右辺第2項の非線形項 $[B(x_{n+1})] \{x_{n+1}\}$ によって評価される部分を $\{x^N\}$ とおくと、

$$[A] \{x^N\} = [B(x_{n+1})] \{x_{n+1}\} \quad (5)$$

方程式(3)の解 $\{x_{n+1}\}$ は、方程式(4)、(5)の解の和として次のように表すことができる。

$$\{x_{n+1}\} = \{x^L\} + \{x^N\} \quad (6)$$

ここで、 $\{x^L\}$ は式(4)よりすぐに求められる。 $\{x^N\}$ は、式(5)の右辺に未知量 $\{x_{n+1}\}$ が含まれているので直接求めることはできないが、係数行列 $[B(x_{n+1})]$ が $\{x_{n+1}\}$ の1次関数で表されることを考えると、式(6)を用いて、 $[B(x_{n+1})] \{x_{n+1}\}$ は既知の $\{x^L\}$ のみで表される部分と残りの部分に分解することができる。

$$[A] \{x^N\} = [B(x^L)] \{x^L\} + [B(x^L)] \{x^N\} + [B(x^N)] \{x^L\} + [B(x^N)] \{x^N\} \quad (7)$$

式(7)右辺の第1項 $[B(x^L)] \{x^L\}$ により確定することのできる $\{x^N\}$ の一部分を $\{x^{(1)}\}$ 、残りの部分を $\{x_{r(1)}\}$ とおくと、次のように書き表すことができる。

$$[A] \{x^{(1)}\} = [B(x^L)] \{x^L\} \quad (8)$$

$$[A] \{x_{r(1)}\} = [B(x^L)] \{x^N\} + [B(x^N)] \{x^L\} + [B(x^N)] \{x^N\} \quad (9)$$

ここに、

$$\{x^N\} = \{x^{(1)}\} + \{x_{r(1)}\} \quad (10)$$

式(8)により $\{x^N\}$ の一部分 $\{x^{(1)}\}$ が求められると、式(9)の右辺は、 $\{x^L\}$ 、 $\{x^{(1)}\}$ によって確定することのできる部分と、含む残りの部分に分解することができる。

$$[A] \{x_{r(1)}\} = [B(x^L)] \{x^{(1)}\} + [B(x^{(1)})] \{x^L\} + [B(x^{(1)})] \{x^{(1)}\} \\ + [B(x^L)] \{x_{r(1)}\} + [B(x_{r(1)})] \{x^L\} + [B(x^{(1)})] \{x_{r(1)}\} + [B(x_{r(1)})] \{x^{(1)}\} + [B(x_{r(1)})] \{x_{r(1)}\} \quad (11)$$

式(11)のうち、右辺のはじめの3項は $\{x^L\}$ 、 $\{x^{(1)}\}$ のみからなるので、これから確定できる $\{x_{r(1)}\}$ の一部分を $\{x^{(2)}\}$ とおくと次のようになる。

$$[A] \{x^{(2)}\} = [B(x^L)] \{x^{(1)}\} + [B(x^{(1)})] \{x^L\} + [B(x^{(1)})] \{x^{(1)}\} \quad (12)$$

この段階でまだ未知のままで残されている $\{x^N\}$ の部分を $\{x_{r(2)}\}$ とおくと、

$$[A] \{x_{r(2)}\} = [B(x^L)] \{x_{r(1)}\} + [B(x_{r(1)})] \{x^L\} \\ + [B(x^{(1)})] \{x_{r(1)}\} + [B(x_{r(1)})] \{x^{(1)}\} + [B(x_{r(1)})] \{x_{r(1)}\} \quad (13)$$

となるが、式(12)により $\{x_{r(1)}\}$ の一部分 $\{x^{(2)}\}$ が求められたことにより、式(13)の一部分は新たに既知となるので、それにより確定することのできる部分を $\{x^{(3)}\}$ とする、というように次々と残りの部分を求めて行くことができる。同様にして $\{x^{(j-1)}\}$ まで求められた時、 $\{x^{(j)}\}$ は次式で評価することができる。

$$[A] \{x^{(j)}\} = [B(x_{(j-2)})] \{x^{(j-1)}\} + [B(x^{(j-1)})] \{x_{(j-2)}\} + [B(x^{(j-1)})] \{x^{(j-1)}\} \quad (14)$$

但し、 $\{x_{(k)}\}$ の下付きの添字(k) は次式に示すように $\{x^{(k)}\}$ の第k番目までの項の和をまとめて表したものである。

$$\{x_{(k)}\} = \{x^L\} + \{x^{(1)}\} + \{x^{(2)}\} + \{x^{(3)}\} + \dots + \{x^{(k)}\} \quad (15)$$

従って、式(4)、(8)、(12)、(14)によって $\{x^L\}$ 、 $\{x^{(1)}\}$ 、 $\{x^{(2)}\}$ 、 $\dots$ を順時計算して行き、 $\{x^{(k)}\}$ が十分に小さく収束して行くならば、 $\{x^L\}$ および $\{x^N\}$ の和として式(15)により評価される $\{x_{(k)}\}$ は、本研究で対象とする非線形方程式(3)を満足する。この過程において方程式左辺の係数行列は常に一定であり、係数行列の三角化ははじめに一度だけ行えば、あとは後退代入を繰り返すだけで計算を進めることができる。

4. 非線形項収束のアルゴリズムの応用例

(1) 対象とする積分漸化関係式

前章において提案した対流項収束のアルゴリズムを適用したのは、以前より著者らが構成を行ってきた運動方程式(1)に対して独自の時間積分公式⁹⁾を適用し、連続条件式(2)を課すことにより得られた、媒介変数 $\{\phi_n\}$ と圧力 $\{p_{n+1}\}$ および、未知の流速 $\{u_{n+1}^a\}$ 、反力 $\{f_{n+1}^b\}$ に関する、次のような漸化関係式⁹⁾である。

$$[A] \begin{bmatrix} \phi_n \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\phi}^L \\ R_p^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{6} [K_a(u_{n+1})^a] \{u_{n+1}\}_1 \\ 0^b \\ -\frac{\Delta t}{3} [K_p^a]^T [M_L^a]^{-1} [K_a(u_{n+1})^a] \{u_{n+1}\} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\{u_{n+1}^a\} = [M_L^a]^{-1} \left\{ \frac{\Delta t}{3} \{f_{n+1}^a\} + \frac{\Delta t}{6} \{r_{n+1}^a\} - \frac{\Delta t}{3} ([K_p^a] \{p_{n+1}\} + [K_a(u_{n+1})^a] \{u_{n+1}\}) - [\Lambda_{21}^a] \{\phi_n\} \right\} \quad (17)$$

$$\{f_{n+1}^b\} = \frac{\Delta t}{3} ([M_L^b] \{u_{n+1}^b\} + [\Lambda_{21}^b] \{\phi_n\}) - \frac{1}{2} \{r_{n+1}^b\} + [K_p^b] \{p_{n+1}\} + [K_a(u_{n+1})^b] \{u_{n+1}\} \quad (18)$$

ここに、下付きの添字n、n+1は、それぞれ時刻 $t=t_n$ および t_{n+1} における諸量であり、上付きの添字a、bはそれぞれ、力が規定される境界 Γ_f 上と領域内での未知の節点流速 $\{u^a\}$ 、境界 Γ_u 上で規定される既知の節点流速 $\{u^b\}$ に対応する量であることを示す。また、係数行列 $[A]$ 、 $[\Lambda_{21}]$ は、積分時間間隔が変わらない限り一定であり、ベクトル $\{R_{\phi}^L\}$ 、 $\{R_p^L\}$ は時刻 $t=t_n$ において既知の量をまとめたものである。また、 $[M_L]$ の添字LはLumped Massを用いたことを示す。解析に用いた要素は、流速に対して要素内線形補間、圧力要素内一定の三角形要素である。

(2) 積分漸化式の逐次解析過程

積分漸化式(16)、(17)、(18)において、左辺の未知数は媒介変数 $\{\phi_{n+1}\}$ 、圧力 $\{p_{n+1}\}$ 、流速 $\{u_{n+1}\}$ 、節点力 $\{f_{n+1}\}$ の4つであり、右辺にはそれぞれ未知の流速 $\{u_{n+1}\}$ を含む未知の対流項 $[K_a(u_{n+1})] \{u_{n+1}\}$ が含まれている。これらの4つの変数を前章の未知変数 $\{x_{n+1}\}$ と同様に、右辺の既知項により評価される部分と残りの部分に分解すると、右辺の既知項から評価される部分、すなわち $\{\phi^L\}$ 、 $\{p^L\}$ 、 $\{u^L\}$ 、 $\{f^L\}$ を、求めることができる。まず、 $\{\phi^L\}$ 、 $\{p^L\}$ は、式(16)の右辺の既知のベクトル $\{R_{\phi}^L\}$ 、 $\{R_p^L\}$ より次のように得られる。

$$[A] \begin{bmatrix} \phi^L \\ p^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\phi}^L \\ R_p^L \end{bmatrix} \quad (19)$$

$\{u^L\}$ 、 $\{f^L\}$ は、式(17)、(18)から右辺の未知の対流項 $[K_a(u_{n+1})]\{u_{n+1}\}$ を除いた部分より、式(24)により求められた $\{\phi^L\}$ 、 $\{p^L\}$ を用いて次のように求めることができる。

$$\{u^{aL}\} = [M_L^a]^{-1} \left(\frac{\Delta t}{3} \{f^{a_{n+1}}\} + \frac{\Delta t}{6} \{r_{3n}^a\} - \frac{\Delta t}{3} [K_p^a] \{p^L\} - \Lambda_{21}^a \{\phi^L\} \right) \quad (20)$$

$$\{f^{bL}\} = \frac{3}{\Delta t} ([M_L^b] \{u^{b_{n+1}}\} + \Lambda_{21}^b \{\phi^L\}) - \frac{1}{2} \{r_{3n}^b\} + [K_p^b] \{p^L\} \quad (21)$$

式(21)により $\{u^L\}$ が求められると、未知の対流項 $[K_a(u_{n+1})]\{u_{n+1}\}$ のうち、 $\{u^L\}$ によって評価される部分 $[K_a(u^L)]\{u^L\}$ が確定されるのでこれを用いて、 $\{\phi^{(1)}\}$ 、 $\{p^{(1)}\}$ 、 $\{u^{(1)}\}$ 、 $\{f^{(1)}\}$ を次のように評価する。

$$[A] \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ p^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{6} [K_a(u^L)^a] \{u^L\} \\ 0^b \\ -\frac{\Delta t}{3} [K_p^a]^T [M_L^a]^{-1} [K_a(u^L)^a] \{u^L\} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\{u^{a(1)}\} = [M_L^a]^{-1} \left(-\frac{\Delta t}{3} ([K_p^a] \{p^{(1)}\} + [K_a(u^L)^a] \{u^L\}) - [\Lambda_{21}^a] \{\phi^{(1)}\} \right) \quad (23)$$

$$\{f^{b(1)}\} = [K_p^b] \{p^{(1)}\} + [K_a(u^L)^b] \{u^L\} + \frac{3}{\Delta t} [\Lambda_{21}^b] \{\phi^{(1)}\} \quad (24)$$

同様に、各変数の第 j 増分は、式(16)、(17)、(18)右辺の対流項 $[K_a(u_{n+1})]\{u_{n+1}\}$ のうち $\{u^L\}$ 、 $\{u^{(j)}\}$ ($j=1, 2, \dots$)が求められるごとに既知となった部分を確定して行くと、 $\{u^{(j-1)}\}$ まで得られたならば、次のように求められる。

$$[A] \begin{bmatrix} \phi^{(j)} \\ p^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{6} [K_a(u^{(j-2)})^a] \{u^{(j-1)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^a] \{u^{(j-2)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^a] \{u^{(j-1)}\} \\ 0^b \\ -\frac{\Delta t}{3} [K_p^a]^T [M_L^a]^{-1} [K_a(u^{(j-2)})^a] \{u^{(j-1)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^a] \{u^{(j-2)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^a] \{u^{(j-1)}\} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\{u^{a(j)}\} = [M_L^a]^{-1} \left(-\frac{\Delta t}{3} ([K_p^a] \{p^{(j)}\} + [K_a(u^{(j-2)})^a] \{u^{(j-1)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^a] \{u^{(j-2)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^a] \{u^{(j-1)}\}) - [\Lambda_{21}^a] \{\phi^{(j)}\} \right) \quad (26)$$

$$\{f^{b(j)}\} = [K_p^b] \{p^{(j)}\} + [K_a(u^{(j-2)})^b] \{u^{(j-1)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^b] \{u^{(j-2)}\} + [K_a(u^{(j-1)})^b] \{u^{(j-1)}\} + \frac{3}{\Delta t} [\Lambda_{21}^b] \{\phi^{(j)}\} \quad (27)$$

ここに、肩付の添字は反復計算ごとの増分を、脚付の添字はその総和をそれぞれ表す。その相互の関係はそれぞれ次のように与えられるものである。

$$\phi_{(j)} = \phi^L + \sum_{i=1}^j \phi^{(i)} \quad (28)$$

$$p^{(j)} = p^L + \sum_{i=1}^j p^{(i)} \quad (29)$$

$$u^{(j)} = u^L + \sum_{i=1}^j u^{(i)} \quad (30)$$

$$f^{(j)} = f^L + \sum_{i=1}^j f^{(i)} \quad (31)$$

また、式(25)、(26)、(27)の右辺の $[K_a(u^{(j-2)})]$ および $[K_a(u^{(j-1)})]$ はそれぞれ流速 $\{u^{(j-2)}\}$ およびその増分 $\{u^{(j-1)}\}$ により評価される対流項の係数行列であり、 $\{\phi^{(2)}\}$ 、 $\{p^{(2)}\}$ 、 $\{u^{(2)}\}$ 、 $\{f^{(2)}\}$ を求めるときに必要となる $\{u^{(0)}\}$ には $\{u^L\}$ を用いる。

式(25)～(28)を解が収束するまで繰り返し解いていくことにより、式(16)～(18)を満足する解を求めることができる。その判定規準には以下のような流速 u 、圧力 p 、節点力 f の増分ノルムを用いた。

$$\sqrt{\|u^{a(j+1)}\|/\|u^a(j+1)\|} < \varepsilon_{uc} \quad (32)$$

$$\sqrt{\|p^{(j+1)}\|/\|p^{(j+1)}\|} < \varepsilon_{pc} \quad (33)$$

$$\sqrt{\|f^{b(j+1)}\|/\|f^b(j+1)\|} < \varepsilon_{fc} \quad (34)$$

ここに、 ε_{uc} 、 ε_{pc} 、 ε_{fc} は収束判定の規準である。

5. 数値解析例

(1) 解析対象

本論文で展開したアルゴリズムは、前述したように反復計算の過程で対流項の全ての部分をつくり直すのではなく、評価できる部分から一つ一つ確定して行こうとして構成したものであり、解が一定の値に収束すればその解は方程式を満足する。ここでは、収束条件に関する理論的な考察は今後の課題として残すことにして、実用上の見地から、実際の数値解析例を通して解の収束の状況について、数値的な検討を行った。

解析対象として設定したのは、岡島・杉谷らによって可視化実験の行われているレイノルズ数1200、 $B/H=2$ の一樣流中の長方形角柱周りの流れの問題¹⁰⁾である。用いた要素分割は図-1に示す通りである(節点数5340、要素数5156)。各節点に流速2成分、各要素に圧力を変数として

導入しているので、総自由度は15,836である。解析は代表流速 U と代表長さ H で無次元化した積分時間間隔 $\Delta t^*=0.05$ (0.0041666sec)で、上流端の流速を60ステップで0から立上げた後、流速一定として13秒間の解析を行った。角柱背後に形成される対称な双子渦から非対称なカルマン渦列に移項するためには流れの対称性を崩すなんらかの要因が必要であるため、本解析では上流側で与えている流速に対して x 方向流速に5%の乱れを与えている。収束判定基準 ε_{uc} 、 ε_{pc} 、 ε_{fc} はいずれも 10^{-3} に設定した。

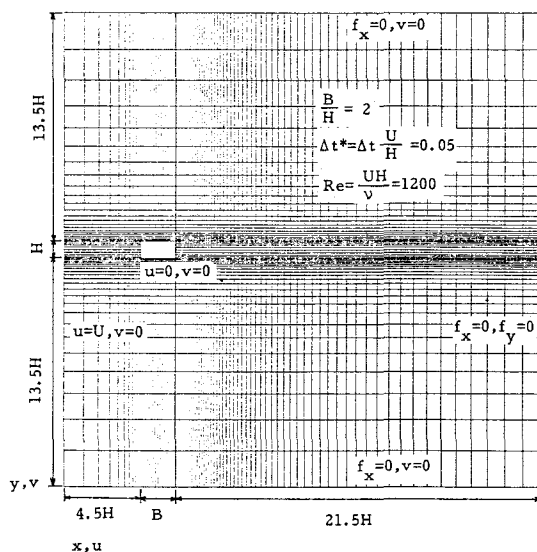


図-1 要素分割図

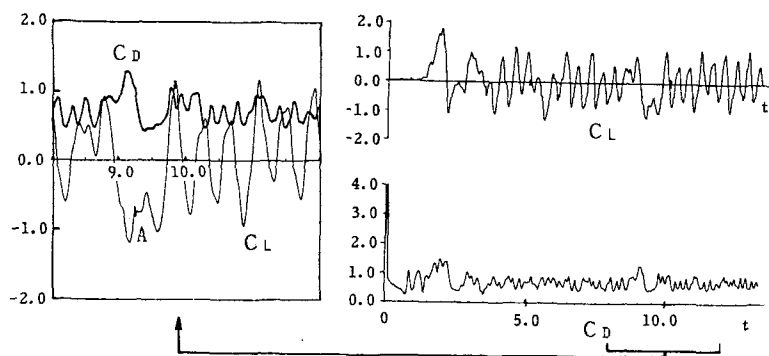
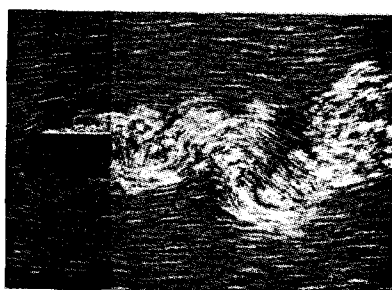


図-2 揚力・抗力係数の時間変化



岡島らによる
可視化実験[10]

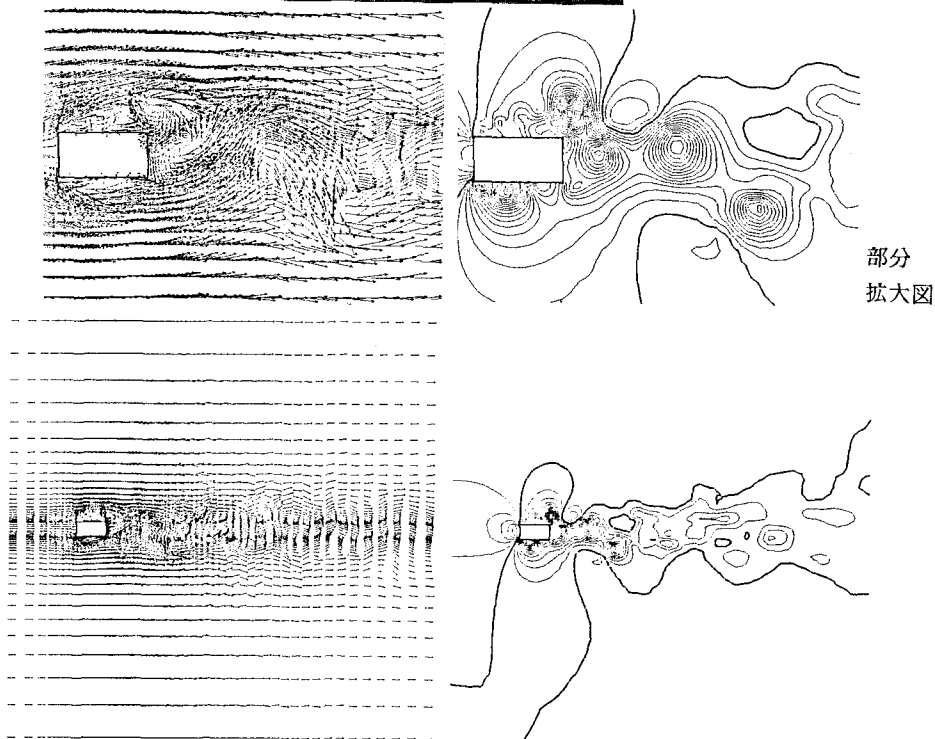


図-3 流速ベクトル・圧力分布図（図-2中のA時点に対応）

全体図

(2)解析結果

図－2 に解析して得られた角柱に働く揚力、抗力の時間変化を示す。Reynolds数1200ともなると、変動に規則性がなくなり、かなり不規則な動きを示している。この中から可視化実験と対応する流れ場を特定することは困難であるが、図－3 (a), (b), (c)にそれぞれ岡島らの可視化実験¹⁸⁾と、良く似た流速ベクトル図、圧力の等圧線図を比較して示す。

(3)収束性に関する検討

表－1 に収束条件を満たすまでのステップごとの反復回数を示す。平均で3.99回、全解析を通して3回から5回の反復で収束解が得られているが、その代表的な一例として図－3 に示したステップにおける流速、圧力、反力のノルムの収束の状況を図－4 に示す。流速、圧力、反力のノルムとも単調に収束の方向に向かっている。

式(25)～(28)を用いて反復計算を行うとき、鍵となるのは、これらの右辺にある対流項のベクトルの収束性であるがこの振舞いについて検討を行った結果について以下に示す。2章において構成したアルゴリズムは次のように説明することもできる。未知量 $\{x_{n+1}\}$ を右辺の既知項 $\{R\}$ によって求められる部分 $\{x^L\}$ と残りの部分 $\{x^N\}$ とに分離し、更に $\{x^N\}$ を次のような形に展開する。

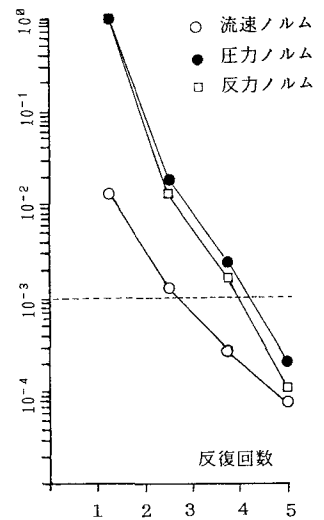
$$\{x_{n+1}\} = \{x^L\} + \{x^{(1)}\} + \{x^{(2)}\} + \dots + \{x^{(j)}\} + \dots \quad (35)$$

これを、式(3)に代入することにより、次のような形に展開される。

$$\begin{aligned} [A] \{x^L\} + [A] \{x^{(1)}\} &+ [A] \{x^{(2)}\} &+ [A] \{x^{(3)}\} &+ \dots = \\ \{R\} &+ [B(x^L)] \{x^L\} &+ [B(x^L)] \{x^{(1)}\} &+ [B(x^L)] \{x^{(2)}\} &+ \dots \\ &+ [B(x^{(1)})] \{x^L\} &+ [B(x^{(1)})] \{x^{(1)}\} &+ [B(x^{(1)})] \{x^{(2)}\} &+ \dots \\ &+ [B(x^{(2)})] \{x^L\} &+ [B(x^{(2)})] \{x^{(1)}\} &+ [B(x^{(2)})] \{x^{(2)}\} &+ \dots \\ &+ [B(x^{(3)})] \{x^L\} &+ [B(x^{(3)})] \{x^{(1)}\} &+ [B(x^{(3)})] \{x^{(2)}\} &+ \dots \\ &\cdot &\cdot &\cdot & \\ &\cdot &\cdot &\cdot & \end{aligned} \quad (36)$$

表－1 収束に至る反復回数

最大	5 回
最小	3 回
平均	3.99 回



図－4 流速・圧力・反力の収束状況
(図－3のステップに対応)

表－2 対流項の収束状況 (図－3のステップに対応)

$\ [B(x^L)] \{x^L\} \ $	$\ [B(x^L)] \{x^{(1)}\} \ $	$\ [B(x^L)] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^L)] \{x^{(3)}\} \ $	$\ [B(x^L)] \{x^{(4)}\} \ $
$\ [B(x^{(1)})] \{x^L\} \ $	$\ [B(x^{(1)})] \{x^{(1)}\} \ $	$\ [B(x^{(1)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(1)})] \{x^{(3)}\} \ $	$\ [B(x^{(1)})] \{x^{(4)}\} \ $
$\ [B(x^{(2)})] \{x^L\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(1)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(3)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(4)}\} \ $
$\ [B(x^{(3)})] \{x^L\} \ $	$\ [B(x^{(3)})] \{x^{(1)}\} \ $	$\ [B(x^{(3)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(3)})] \{x^{(3)}\} \ $	$\ [B(x^{(3)})] \{x^{(4)}\} \ $
$\ [B(x^{(4)})] \{x^L\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(1)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(3)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(4)}\} \ $
1.00033×10^0	1.15422×10^{-2}	9.08264×10^{-4}	1.08041×10^{-4}	2.31194×10^{-5}
4.60860×10^{-2}	6.73853×10^{-4}	4.00727×10^{-5}	9.16647×10^{-6}	1.58280×10^{-6}
5.39564×10^{-3}	7.07147×10^{-5}	8.50926×10^{-6}	8.43881×10^{-7}	3.69965×10^{-7}
1.21185×10^{-3}	1.60948×10^{-5}	1.63332×10^{-6}	3.87496×10^{-7}	5.47275×10^{-8}
3.48265×10^{-4}	3.92899×10^{-6}	5.59262×10^{-7}	7.02014×10^{-8}	2.80321×10^{-8}

ここで、式(36)の左辺の各項と、右辺の $\{x_{n+1}\}$ に関する非線形項を展開して得られる項との関係として、方程式左辺の $\{x^l\}$ は右辺の R によって評価し、 $\{x^{(1)}\}$ は右辺の $\{x^l\}$ のみで表される項を用いて評価し、 $\{x^{(j)}\}$ は展開した右辺の各項のうち、 $\{x^{(j-1)}\}$ までを評価するのに用いた項を除いた残りの部分のうち、 $\{x^l\}$ 、 $\{x^{(k)}\}$ ($k=1, 2, \dots, j-1$) のみで表される項により評価する、というように関係づけていくことによって式(15)は得られる。式(36)において $\{x^{(k)}\}$ を含む対流項の増分の和が単調に小さくなって行けば解は一定値に収束するが、この式の右辺の各項と対応させて、表-2にそれぞれの流速の増分により評価された対流項のノルムの変化状況を示す。それぞれのノルムは流速の収束解 u_{n+1} で無次元化して示したが、ノルムで評価する限りにおいては、ステップの始めに右辺の既知項で評価される流速 u^l から求めた対流項の一部分 $[K_a(u^l)]u^l$ だけでもかなり良い近似となっている。流速の増分ノルムが単調に小さくなっているために、この増分で評価される対流項の増分も単調に小さくなっているが、絶対値として最も大きい u^l を含む項の収束が最も遅くなっていることがわかる。

$\Delta t^*=0.05$ と設定した解析においては解析時間の全領域において解は安定に収束しているが、どんな大きな積分時間間隔 Δt を与えても収束するというわけではなく、 Δt の取り方には当然制約が加わる。さらに大きな積分時間間隔を与えることにより、解が収束しなくなった場合の、流速、圧力、反力のノルムの振舞いを図-5に示す。積分時間間隔 Δt^* を2倍の0.1として解析を続行し、収束しなくなったときの様子を示したものである。一旦収束の方向に向かった後、再び、ノルムは大きくなっている。表-3に流速の各増分により評価される対流項のノルムを示す。図-5からもわかるように、各ノルムが最小になるまでの回数もかなり多くなっているため、ここでは増分のノルムを1回おきに示したが、 $\Delta t^*=0.05$ の場合でも最も収束の遅かった、 u^l を含む項が一旦収束の方向に向かった後、再び拡大している。

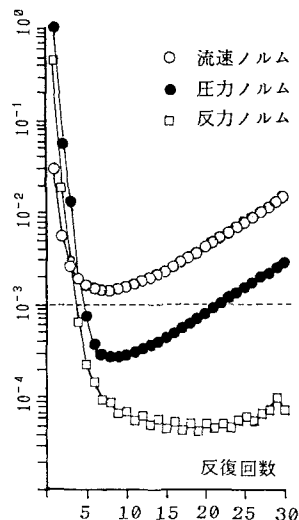


図-5 収束解が得られない場合のノルム変化の一例

表-3 収束解が得られない場合の対流項の変化状況の例

$\ [B(x^l)] \{x^l\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(4)}\} \ $	$\ [B(x^{(6)})] \{x^{(6)}\} \ $	$\ [B(x^{(8)})] \{x^{(8)}\} \ $	$\ [B(x^{(10)})] \{x^{(10)}\} \ $
$\ [B(x^{(2)})] \{x^l\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(4)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(6)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(8)}\} \ $	$\ [B(x^{(2)})] \{x^{(10)}\} \ $
$\ [B(x^{(4)})] \{x^l\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(4)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(6)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(8)}\} \ $	$\ [B(x^{(4)})] \{x^{(10)}\} \ $
$\ [B(x^{(6)})] \{x^l\} \ $	$\ [B(x^{(6)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(6)})] \{x^{(4)}\} \ $	$\ [B(x^{(6)})] \{x^{(6)}\} \ $	$\ [B(x^{(6)})] \{x^{(8)}\} \ $	$\ [B(x^{(6)})] \{x^{(10)}\} \ $
$\ [B(x^{(8)})] \{x^l\} \ $	$\ [B(x^{(8)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(8)})] \{x^{(4)}\} \ $	$\ [B(x^{(8)})] \{x^{(6)}\} \ $	$\ [B(x^{(8)})] \{x^{(8)}\} \ $	$\ [B(x^{(8)})] \{x^{(10)}\} \ $
$\ [B(x^{(10)})] \{x^l\} \ $	$\ [B(x^{(10)})] \{x^{(2)}\} \ $	$\ [B(x^{(10)})] \{x^{(4)}\} \ $	$\ [B(x^{(10)})] \{x^{(6)}\} \ $	$\ [B(x^{(10)})] \{x^{(8)}\} \ $	$\ [B(x^{(10)})] \{x^{(10)}\} \ $
7.6960×10^{-1}	3.6114×10^{-3}	2.7199×10^{-4}	1.3148×10^{-4}	1.4427×10^{-4}	1.7695×10^{-4}
1.7906×10^{-2}	9.4619×10^{-5}	1.9468×10^{-5}	1.5126×10^{-5}	1.4229×10^{-5}	1.4278×10^{-5}
9.2899×10^{-3}	2.1378×10^{-5}	1.3366×10^{-5}	1.1604×10^{-5}	1.0988×10^{-5}	1.1016×10^{-5}
8.3792×10^{-3}	1.5774×10^{-5}	1.1421×10^{-5}	1.0028×10^{-5}	9.5986×10^{-6}	9.8132×10^{-6}
8.4391×10^{-3}	1.5229×10^{-5}	1.0696×10^{-5}	9.4512×10^{-6}	9.2594×10^{-6}	9.8106×10^{-6}
9.1142×10^{-3}	1.6194×10^{-5}	1.0701×10^{-5}	9.5786×10^{-6}	9.7205×10^{-6}	1.0756×10^{-5}

6. おわりに

本論文は新たに展開した有限要素Navier-Stokes方程式の対流項の収束計算のアルゴリズムを提案したものである。対流項を右辺に置いて時間積分法を適用して得られる非線形な漸化式を対象として、対流項の全体を一度に修正するのではなく、対流項のうち求められる部分から順次評価して行くことにより収束させるアルゴリズムを構成し、数値解析例を通して検証を行った。

対流項収束のアルゴリズムとして適用した有限要素方程式⁸⁾自体、かなり複雑な方程式であり、非圧縮粘性流れの解析法全体としての効率という点においては、いろいろと議論のあるところではあるが、実際の解析例を通して検証を行った結果、レイノルズ数1200の角柱周りの流れの解析を通して安定性、収束性に改善が見られ、非線形項収束計算のアルゴリズムとしての有効性が確かめられた。

本論文での解析例は、東京大学大型計算機センターHITAC S-820により行ったことを付記する。

参考文献

- 1) Gresho, P. M., Chan, S. T., Lee, R. L. and Upson, C. D.: A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, part 1 and 2, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 4, pp. 557-598 and pp. 619-640, 1984.
- 2) Hughes, T. J. R., Liu, W. K. and Brooks, A. N.: Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation, J. Comp. Phys., vol. 30, pp. 1-60, 1979.
- 3) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R.: Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- 4) J. H. Argyris, J. St. Doltsinis, P. M. Pimenta and H. Wustenberg: Natural finite element techniques for viscous fluid motion, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 45, pp. 3-55, 1984.
- 5) Kawahara, M. and Hirano, H.: A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 3, pp. 137-163, 1983.
- 6) Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quatapelle, L.: Finite element solutions of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 30, pp. 53-73, 1982.
- 7) Bristeau, M. O., Glowinski, R., Mantel, B., Periaux, J. and Perrier, P.: Numerical methods for incompressible Navier-Stokes problems, Finite Elements in Fluids (eds. R. H. Gallagher, et al.), Vol. 6, Chap. 1, John Wiley and Sons, Chichester, pp. 1-40, 1985.
- 8) 吉田裕、野村卓史、菅野良一: 非定常非圧縮粘性流れの有限要素方程式の解法、土木学会論文報告集、351号、1984.
- 9) 吉田裕、藤原享、野村卓史: 熱伝導型方程式の直接時間積分と高精度化のアルゴリズム、土木学会論文報告集、313号、1981.
- 10) 岡島厚、杉谷賢一郎: 矩形柱周りの流れ-数値計算と可視化実験、その2、九大応力研究所報、50号、1979.

(1989年10月2日受付)