

有限要素法による
最小コンプライアンス形状の探索について
A STUDY ON THE OPTIMAL-SHAPE SEARCH BY FINITE ELEMENT METHOD

田村 武*, 小林 昭一**
Takeshi TAMURA, Shoichi KOBAYASHI

Abstract

This paper is concerned with an innovated numerical technique to find out an optimal shape with minimum compliance of elastic body.

Among several subjects in the field of optimization in structural engineering, the shape optimization is of great importance and has been paid a considerable attention to since it seems an interesting challenge from a mathematical point of view as well.

The present study, which is theoretically based on the variational principle derived by Banichuk, investigates a new numerical method for the optimal shape with a minimum compliance of elastic body. Firstly, a necessary condition for optimal shape in the finite element version is derived. Secondly, a way to calculate the analytical derivatives of the function in the above necessary condition with respect to the shape parameters is shown and then is applied to the Newton-Raphson method to obtain the optimal shape with minimum compliance. Finally, some typical examples are illustrated to demonstrate the usefulness of the present method.

1. まえがき

構造工学の分野においては断面寸法の決定などに最適設計の概念がかなり以前から導入されている。近年、とくに精力的に研究が進められている問題は、構造物の形状そのものの最適化である。これは、工学的にもまた応用数学的にも興味ある問題であり、最近多くの論文が発表されている。¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾ 主として、問題の定式化に関するものが中心であるが、最適形状のための必要条件が種々の形で誘導されている。むしろ、閉じた形の解を求めることは、ほとんど不可能であって有限要素法や境界要素法などを中心とする数値解析法に頼らざるをえない。したがって、数値解析法のうえで、これらの最適化のための必要条件をいかに表現するかが一つの問題となる。また、多くの場合、解くべき方程式は非線形であり、いわゆる Newton-Raphson 法による繰返し解法を用いることになる。しかしそのとき、種々の関数の微分係数を必要とするが、数値解においてその誤差が他の大きな問題となる。つまり、最適形状の問題において、いかにその必要条件を解くべき式に書換え、そしていかに効率よく微分係数を求めるかが、数値解析上の主要な課題となっている。

本研究では Banichuk ²⁾ により求められたコンプライアンス最小形状が満たすべき必要条件を説明したのち、有限要素法によるその定式化と数値解法のための微分演算について説明をしたあと、2, 3 の簡単な計算例について検討を加える。

* 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 工博 京都大学教授 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

2. コンプライアンスを最小とする形状の必要条件

図-1 に示すように境界 S で囲まれた領域 V 内の線形弾性体を考える。領域 V の内部には外力である物体力 b_i が、また、境界 S の一部 S_σ には表面力 T_i がそれぞれ作用している。境界 S の残りである変位境界 S_u で指定される変位は、簡単のためここでは 0 と仮定しておく。このとき、全ポテンシャルエネルギー Π は、つぎのように定義される。

$$\Pi = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - b_i u_i \right\} dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \quad (1)$$

ここに、 σ_{ij} は応力、 u_i は変位、そして ϵ_{ij} はひずみである。いま、変位 u_i の変分とともに、図-1 のように領域の体積一定という制約条件：

$$V = V_0 \quad (2)$$

のもとに境界の一部 S_x において境界形状に関する変分 δh をとると、通常の弾性体境界値問題の場合と同じようにつりあい式と応力境界条件：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad \text{in } V \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad \text{on } S_\sigma \quad (4)$$

のほか、

$$\int_{S_x} \delta h dS = 0 \quad (5)$$

なる任意の境界変動に対して

$$\int_{S_x} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \delta h dS = 0 \quad (6)$$

となるという変分関係を得る。ここに、 x_i は直角座標系、 n_i は境界における外向き単位法線をそれぞれ表わす。式 (5)、(6) から

$$(W =) \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \lambda \quad (7)$$

が誘導される。すなわち、変動を与える境界 S_x に沿ってひずみエネルギー密度 W が一定値 λ をとることを意味している。なお、変分法の上からいえば、 λ は、いわゆる Lagrange 乗数である。

つぎに、これらの結果を用いてコンプライアンス最小形状問題の定式化を行ってみよう。式 (3)、(4) を式 (1) の全ポテンシャルエネルギー Π に代入すると

$$\Pi = - \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = - \int_V \frac{1}{2} b_i u_i dV - \int_{S_\sigma} \frac{1}{2} T_i u_i dS = -C \quad (8)$$

を得る。ここで、変位境界 S_u における変位 u_i が 0 であることを用いた。つまり、つりあい条件のもとで Π はコンプライアンス C (外力仕事、あるいは全体的な変形量) に負号を付したものに等しい。こ

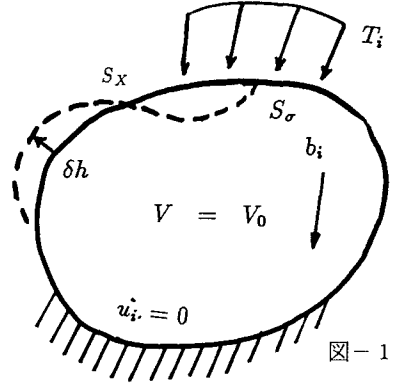


図-1

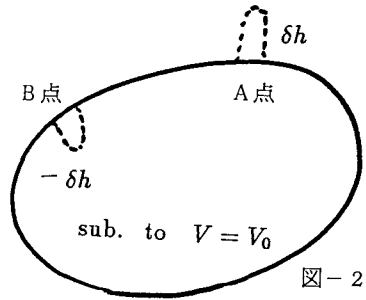


図-2

これらのことより，はじめに取り上げた u_i と形状に関する変分問題は

$$\begin{aligned} \text{Max}_{S_x} \min_{u_i} \Pi \quad \text{sub. to } V = V_0 \\ = -\min_{S_x} C \quad \text{sub. to } V = V_0, \quad \text{Equilibrium} \end{aligned}$$

のように，①等体積条件と，②つりあい条件のもとで最小コンプライアンスをもつ形状探索問題と等価であることになる．ここに， $\text{Max}, \min$ の下の S_x は境界形状に関して最大化あるいは最小化することを表わしている．

なお，この結果は，直感的な判断からも容易に求められる．図-2のように体積が変化しないような境界上の2点の近傍に局所的な境界変動を与える．このとき，もしA点よりもB点のほうのひずみエネルギー密度 W が大きければ，図-2のような境界変動のような形状変化を与えることによりコンプライアンスを小さくすることができる．つまり，最適形状になるためには，変動を許す境界上においてひずみエネルギー密度 W が等しくなっていなければならないことがわかる．

3. において有限要素法に対し，式(5)と(6)を用いて最適形状の数値解を求める．

例-1 はり理論における最適形状

上述の最適形状のための必要条件を用いて(静定)はりの最適形状を簡単に求めることができる．図-3のように，鉛直荷重の作用しているはりを考える．曲げモーメントを M ，曲げ剛性を EI とするとひずみエネルギー密度 W は

$$W = \frac{M^2}{2EI} \quad (9)$$

である．はりの断面形状を幅 b ，高さ h なる長方形とし， h のみを形状パラメータとする．上の必要条件をこの問題に適用すれば，

$$\int_0^l \delta h dx = 0 \quad (10)$$

なる任意の δh に対して，式(7)の h に関する変分が

$$\frac{18}{Eb} \int_0^l \frac{M^2}{h^4} \delta h dx = 0 \quad (11)$$

を満たさなければならない．したがって，

$$\frac{18}{Eb} \frac{M^2}{h^4} = \lambda \quad (\text{一定}) \quad (12)$$

を得るが，これより最適形状は

$$h(x) = a \sqrt{|M(x)|} \quad (13)$$

となる．ここに a は全体の体積から定まる定数である．すなわち，最適形状は曲げモーメントの絶対値平方根に比例したものとなる．なお，静定はりにおいては荷重から曲げモーメントを求める段階でつりあい式を考慮しているので，つりあい条件は陽な形としては制約条件となっていない．

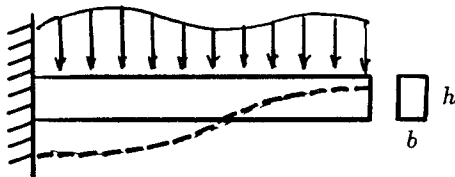


図-3

3. 有限要素法への適用

図-4のような(2次元)有限要素分割に対し、式(2)の等体積条件は、等面積条件：

$$S = S_0 \quad (14)$$

に相当する。つぎに式(7)の最適形状の必要条件に相当する有限要素法での式を求めよう。いま、簡単のため境界変動は鉛直方向だけとする。それぞれの節点に対し鉛直座標 y_i をとり、 y_i が1だけ増加したときの周辺の鉛直座標の変化を h_i とする。(図-4参照)すると N 個の y_i の変動量 δy_i を与えるとすれば、それに伴って全体の面積一定条件は

$$\sum_{i=1}^N \delta y_i \int_{l_i} h_i ds = 0 \quad (15)$$

となる。ここに l_i は境界変動を受ける境界要素の線分であり、 ds はその線素である。上式なる任意の形状変化に対して

$$\sum_{i=1}^N \delta y_i \int_{l_i} W h_i ds = 0 \quad (16)$$

とならなければならないというのが式(6)の意味である。これは、 δy_i のかかる2つの係数 λ ベクトルがたがいに平行であることを意味しており、 λ を(Lagrangeの)未知定数として

$$\int_{l_i} W h_i ds = \lambda \int_{l_i} h_i ds \quad (17)$$

と等価である。これは、境界変動のある全要素周辺でひずみエネルギー密度 W が平均的に一定であることを意味している。以上まとめると、式(14)と N 個の式(17)を連立して N 個の y_i と λ を解けば、最適形状が求まることになる。

4. 数値解析法

面積 S とひずみエネルギー密度 W はともに境界形状の座標 y_i の関数である。とくに W は y_i の非線形関数であって、式(14)、(17)は、Newton-Raphson 法を用いて解くことになる。そのためには、未知量 y_i と λ に関する微分計算が必要となる。 y_i に関する W の微分計算の一つの方法は、境界変動 y_i の増分 δy_i を与えて、新たな要素分割に対しひずみエネルギー密度を計算し、差分商として数値微分を実行することが考えられる。しかし、そのためには、それぞれの y_i について有限要素法を改めて解かねばならず、かなりの計算時間を必要とする。さらに、 δy_i の大きさによっては、桁落ちなどによる大きな誤差を生じることもありうる。そこで本研究では、有限要素法の定式化において解析的に微分することによりこれらの問題点を避けることにした。以下にその詳細を記す。

有限要素解析において、要素内のひずみエネルギー密度は

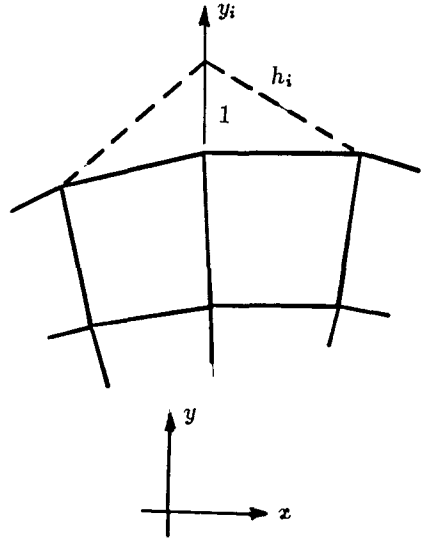


図-4

$$W^e = \frac{1}{2} \epsilon^e T D \epsilon^e \quad (18)$$

となる。ここに、上添字 e は要素単位の量であることを指し、 D は弾性マトリックス、 ϵ はひずみ（ベクトル）、 T は転置作用素そして B はいわゆる B マトリックスであって、要素内の位置とともに要素の形状の関数でもある。図-4のように要素の特定の節点 k が特定の方向に変動するとき、それに対する微分をとれば

$$\frac{\partial W^e}{\partial y_k} = \epsilon^e T D \left(\frac{\partial B^e}{\partial y_k} \mathbf{u} - B^e K^{-1} \frac{\partial K}{\partial y_k} \mathbf{u} \right) \quad (19)$$

となる。 K は全体剛性マトリックスであり、一般に

$$K = \sum_e \sum_g (B_g^{eT} D B_g^e |J_g| w_g) \quad (20)$$

なる表現をもつ。ここに、下添字 g は数値積分の Gauss 点を指し、 w_g 、 J_g はその重みと Jacobian である。したがって、上式を y_k で微分した

$$\frac{\partial K}{\partial y_k} = \sum_e \sum_g \left(\frac{\partial B_g^{eT}}{\partial y_k} D B_g^e |J_g| + B_g^{eT} D \frac{\partial B_g^e}{\partial y_k} |J_g| + B_g^{eT} D B_g^e \frac{\partial |J_g|}{\partial y_k} \right) w_g \quad (21)$$

を式(19)に代入すればひずみエネルギー密度 W の y_k による微分を求めることができる。なお、ここに K^{-1} があるが、これは元の形状に関するものであり新たな計算を必要とするものではない。要するに境界変動に関連する各要素の B マトリックスと Jacobian の y_k に関する微分を実行することにより、3. のべた方程式を Newton-Raphson 法により解くことができる。

5. 数値計算例

例-2 片持ちばり（1層、10分割：単位高さ、長さ10に相当）

図-5には、片持ちばりの先端に単位の集中荷重と集中モーメントを作用させたときの最適形状の計算結果が示されている。ここでは、はりの下縁のみが鉛直方向に変動しようとした。右側の図は、コンプライアンスの減少の推移を示しているが、比較的少ない繰返し回数で収束していることが分かる。表-1には、数値解と2.のはり理論の解との比較を示している。はり理論の解は、参考解ではあるが両者はかなり類似していることが分かる。なお、有限要素解ではポアソン比を1/3とした。

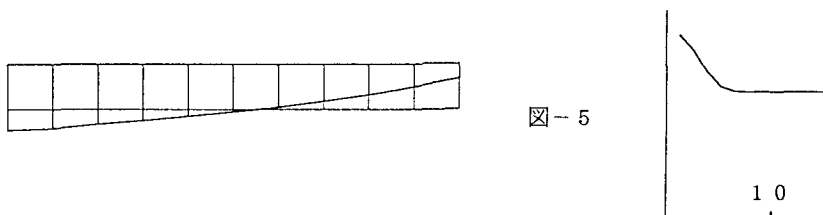


図-5

表-1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数値計算	1.449	1.416	1.329	1.240	1.148	1.050	0.942	0.820	0.678	0.499	0.326
はり理論	1.402	1.337	1.268	1.196	1.118	1.035	0.945	0.845	0.732	0.598	0.423

図-6は同じはりにはり理論のみに集中モーメントだけを作用させた場合であるが、はり理論と同様にして初期形状からまったく変化してしない。

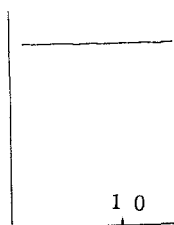


図-6



図-7

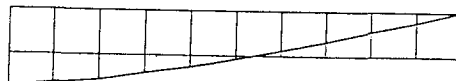


図-8

例-3 片持ちばり (4層, 40分割)

図-7は図-5と同じ問題をはりの高さ方向に分割を細かくして計算した結果である。なお、この場合も最下縁を変動させたが、この変動に連れてそれぞれの上部の節点も比例して移動できるように、それらの節点変動の微分も加味して Newton-Raphson法を用いた。結果は、図-5とほぼ一致している。

例-5 直線棒 (対称軸を中心に1層10分割)

図-8は、右端固定の直線棒に等分布する右方向の水平荷重を作用させた場合の結果である。

6. まとめ

連続体の最適形状の問題の有限要素法による定式化と数値計算例を示した。とくに数値微分を避けるため、いくつかの工夫を試みた。本来、目的関数 (いまの場合は、コンプライアンス) を最小にするには、2階微分 (Hessian) を計算することになるが、必要条件を求めたこと、および有限要素法の内部で微分を行ったことにより、数値微分を避けることができた。その結果、計算速度や解の精度の改善が図られたと思われる。多くの例題では数回の繰返し計算で最適解に収束したが、一方、条件によっては収束しにくい問題もあった。この手法もまだ確立されたものとはいえず、今後、さらに改良を進めていきたい。

参考文献

- 1) Haug E. J. and Cea J. (editor) : Optimization of distributed parameter structures - Vol. II, Sijthoff & Noordhoff, 1981.
- 2) Banichuk, N. V. : Problems and methods of optimal structural design, Plenum Press, 1983.
- 3) Dems, K. and Mroz, Z. : Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis - I, Int. J. Solids and Structures, Vol. 19, pp.877-892, 1983.
- 4) Dems, K. and Mroz, Z. : Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis - II, Int. J. Solids and Structures, Vol. 20, pp.527-552, 1984.
- 5) Fujii, N. : Second variation and its application in a domain optimization problem, Control of distributed systems (Proc. 4th IFAC Symposium), pp. 431-436, Los Angeles, 1986.
- 6) 田村 武, 小林 昭一, 仲山 公規 : 有限要素法による断面形状の最適化, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第10巻, pp.40-45, 1986.

(1989年10月2日受付)