

部分縁荷重を受けるプレートガーダーの極限強度

LOAD-CARRYING CAPACITY OF PLATE GIRDERS UNDER PATCH LOADING

堂垣正博*・岸上信彦**・米澤 博***

By Masahiro DOGAKI, Nobuhiko KISHIGAMI, and Hiroshi YONEZAWA

This paper is aimed at developing the finite difference approach for predicting the load-carrying capacity of plate girders under a partial edge loading. The geometric and material nonlinearities are taken into account. A system of nonlinear equilibrium equations is precisely solved by a modified Newton-Raphson procedure to an incremental loading sequence, in which an advanced acceleration technique is incorporated to guarantee the convergent characteristics.

The numerical results are presented to examine the influences of the length of patch loading, plate stiffnesses of web and flanges, initial out-of-flatness, and residual stress on the postcritical behavior and ultimate strength of plate girders under a localized in-plane force.

1. まえがき

薄板構造の境界辺上に部分的な面内荷重が作用すれば、クリップリングの起こる危険性がある。通常、作用荷重の直下に剛な垂直補剛材を設け、この座屈は防止される。しかし、送り出し架設時のローラー上のプレートガーダーや密な間隔で配置されたまくら木を直接支える鋼鉄道橋の縦桁などの場合、荷重直下を密な間隔で補剛することは不可能である。したがって、部分縁荷重を受ける腹板の局部座屈強度や極限強度がどの程度あるか正確に評価し、安全な設計を施さねばならない。

1936年、Girkmann¹⁾が周辺単純支持板に部分縁荷重が作用する場合を弾性座屈解析して以来、数多くの理論的・実験的研究^{2)~6)}が行われてきた。部分的な面内荷重を受けるプレートガーダーの極限強度は主に、崩壊形式を想定し、崩壊メカニズムの塑性解析によって算定する方法や、実験データに基づく簡易な経験式から算定する方法などによって推定されている。一方、幾何学的・材料的非線形解析により初期たわみや残留応力が部分縁荷重を受けるプレートガーダーの変形状や耐荷力に及ぼす影響を理論的に明らかにしようとする試みもなされているが、複雑な問題だけに前述の研究に比べて極めて少ない。桑山⁷⁾は部分縁荷重を受ける腹板の弾性座屈とその後座屈挙動をGalerkin法によって明らかにした。清水・吉田ら^{8), 9)}は動的緩和法による腹板の複合非線形解析を試み、座屈後、腹板に形成される塑性崩壊メカニズムについて理論的に

* 工博 関西大学助教授 (〒564 吹田市山手町3-3-35)

** 工修 (株)栗本鐵工所 (〒559 大阪市住之江区柴谷2-8-45)

*** 工博 関西大学教授 (〒564 吹田市山手町3-3-35)

考察している。いずれの研究も腹板のみを解析し、フランジの剛性と腹板の極限強度の関係には触れていない。一方、Stein-Lambertz-Plank¹⁰⁾ や Ramm-Weimar^{11), 12)} は集中荷重を受けるプレートガーダーの有限要素モデルから桁の複合非線形挙動を検討し、その極限強度を求めている。しかし、高度な問題だけに部分縁荷重の幅や残留応力などはパラメータとして考慮されていない。

ここでは、鉛直補剛材間のフランジ上に局所的な面内荷重が作用するプレートガーダー腹板の弾塑性有限変位挙動を差分法による広範なパラメトリック解析から明らかにする。

2. 弾塑性有限変位解析の基礎理論

Fig. 1 に示すような鉛直補剛材間隔が a で、高さ b 、板厚 t の腹板と、幅 b_f 、板厚 t_f のフランジからなる二軸対称断面のプレートガーダーの面内に幅 c の部分縁荷重が作用する場合のクリッピングを考える。フランジを軸力、二方向の曲げおよびねじりを受けるはり一柱にモデル化し、上下辺がフランジで弾性支持・弾性回転拘束され、左右辺が鉛直補剛材で単純支持された腹板として解析する。また、製作時の不可避免的な初期不整も考慮する。

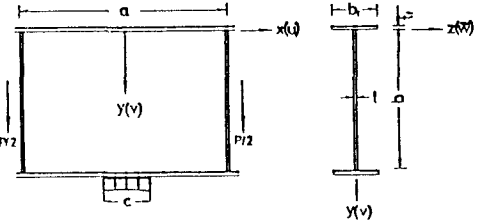


Fig.1. Plate girder between vertical stiffeners under a patch loading.

2.1 つり合い式

初期たわみ w_0 、や残留応力 σ_r を有するプレートガーダーの弾塑性有限変位場のつり合い式を

- ① Kirchhoff-Love の仮定。
- ② 腹板とフランジはともに降伏点応力 σ_p の完全弾塑性体からなり、そのひずみ硬化は考えない。
- ③ 部材の降伏を von Mises の等価応力式で判定する。
- ④ フランジを棒部材として扱う。

の仮定のもとに誘導する。Lin¹³⁾ や Massonnet¹⁴⁾ の平板の弾塑性理論を参考に、Kármán-Marguerre の弾性大たわみ理論を修正すれば、弾塑性域での x , y , z 方向の力のつり合い式が次のように得られる。

$$N_x^e \cdot x + N_{xy}^e \cdot y - (N_x^p \cdot x + N_{xy}^p \cdot y) = 0 \quad (1)$$

$$N_{xy}^e \cdot x + N_y^e \cdot y - (N_{xy}^p \cdot x + N_y^p \cdot y) = 0 \quad (2)$$

$$M_x^e \cdot xx + 2M_{xy}^e \cdot xy + M_y^e \cdot yy + N_x^e \cdot \bar{w} \cdot xx + 2N_{xy}^e \cdot \bar{w} \cdot xy + N_y^e \cdot \bar{w} \cdot yy - (M_x^p \cdot xx + 2M_{xy}^p \cdot xy + M_y^p \cdot yy + N_x^p \cdot \bar{w} \cdot xx + 2N_{xy}^p \cdot \bar{w} \cdot xy + N_y^p \cdot \bar{w} \cdot yy) = 0 \quad (3)$$

ここに、 N_x , N_y はそれぞれ x および y 方向の膜力、 N_{xy} は膜せん断力、 M_x , M_y はそれぞれ x および y 方向の曲げモーメント、 M_{xy} はねじりモーメントで、腹板の単位幅に作用する。断面力に付けられた上添字 e は、桁の一部が降伏し弾塑性の状態を呈する場合でも全断面弾性として得られる断面力を示す。弾性有限変位場に基づく断面力は

$$\begin{aligned} N_x^e &= B \left[u \cdot x + \frac{1}{2} (\bar{w} \cdot x^2 - w_0 \cdot x^2) + \nu \left\{ v \cdot y + \frac{1}{2} (\bar{w} \cdot y^2 - w_0 \cdot y^2) \right\} \right], \\ N_y^e &= B \left[\nu \left\{ u \cdot x + \frac{1}{2} (\bar{w} \cdot x^2 - w_0 \cdot x^2) \right\} + v \cdot y + \frac{1}{2} (\bar{w} \cdot y^2 - w_0 \cdot y^2) \right], \\ N_{xy}^e &= \frac{1}{2} (1 - \nu) B (u \cdot y + v \cdot x + \bar{w} \cdot x \bar{w} \cdot y - w_0 \cdot x w_0 \cdot y) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_x^e &= -D \left\{ (\bar{w} \cdot xx - w_0 \cdot xx) + \nu (\bar{w} \cdot yy - w_0 \cdot yy) \right\}, \\ M_y^e &= -D \left\{ \nu (\bar{w} \cdot xx - w_0 \cdot xx) + (\bar{w} \cdot yy - w_0 \cdot yy) \right\}, \\ M_{xy}^e &= -(1 - \nu) D (\bar{w} \cdot xy - w_0 \cdot xy) \end{aligned} \quad (5)$$

である。また、上添字 p は、弾性断面力 $N_x^e, \dots, M_{xy}^e$ を修正し、弾塑性域での断面力を得るために導入された仮想的な断面力を表し、その計算法は 2.3 で述べる。 u , v はそれぞれ x および y 方向の面内変位、 $\bar{w}$

は初期たわみ w_0 と荷重によるたわみ w の和、すなわち全たわみである。B、Dはそれぞれ腹板の伸び剛さおよび曲げ剛さ、 ν はポアソン比である。なお、コンマに続く下添字はそれに関する偏微分を表し、たとえば $u_{,x} = \partial u / \partial x$ である。

2.2 境界条件

フランジの伸び、曲げおよびねじりに関する剛性と部分縁荷重を受ける腹板の変形状や耐荷力との関係を明らかにするため、鉛直補剛材間のプレートガーダーを解析する。このため、フランジを軸力、 z および y 軸回りの曲げモーメントならびにねじりを受ける弾塑性はり一柱部材にモデル化する。腹板ははり一柱にモデル化されたフランジによって上下辺で弾性支持および弾性回転拘束されるものとする。また、腹板の左右辺は単純支持されているものとする。

解析モデルに部分的な縁荷重を作用させる方法として、二通りが考えられる。第一の方法は、幅 c の縁荷重とそれにつり合う腹板の左右辺のせん断力を同時に与える方法である。第二の方法は、桁中央で幅 c にわたってフランジを鉛直方向に支持し、左右辺を鉛直下方に変位させて部分縁荷重が作用するのと等価な状態を再現する方法である。前者は、荷重そのものを桁に作用させるため、比較的簡単な境界条件式となる。しかし、それにつり合う左右辺のせん断応力分布を仮定しなければならない。また、降伏後のせん断応力分布や部分縁荷重の大きさを仮定するのも難しい。したがって、ここでは後者の方法を採用し、左右辺を鉛直方向に変位させる。なお、部分縁荷重とともに曲げやせん断が同時に作用するより一般的な場合も解析できるが、組合せ荷重下の非線形挙動を調べる上で基本となる部分縁荷重のみが作用する場合を考察する。したがって、左右辺で曲げモーメントや軸力が作用しないように境界条件を工夫する。

左右辺での境界条件は

$$\begin{aligned} u \mp u_0 \pm (y - b/2) \phi &= 0, \quad v = v_0, \quad \bar{w} - w_0 = 0, \quad \bar{w}_{,xx} - w_{0,xx} = 0, \\ \int_0^b N_x \cdot dy + N_{tu} \cdot + N_{tl} \cdot - \left(\int_0^b N_x^p \cdot dy + N_{tu}^p + N_{tl}^p \right) &= 0, \\ \int_0^b N_x \cdot y dy + N_{tl} \cdot b - \left(\int_0^b N_x^p \cdot y dy + N_{tl}^p \cdot b \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

のように得られる。ここに、 u_0 は左右辺の一樣な x 方向変位、 ϕ は左右辺における桁の中立軸回りの回転角である。これらは左右辺で軸力と曲げモーメントが生じない条件、すなわち上式の第5、6式を満足するように求められる。ただし、回転角 ϕ は桁に負の曲げが生じる方向を正とした。 v_0 は左右辺に与えられる強制鉛直変位である。 N_t はフランジの軸力で、下添字 u 、 l はそれぞれ上フランジと下フランジを示す。これらのうち、弾性断面力 $N_{t \cdot}$ は

$$N_{t \cdot} = E A_t \{ u_{,x} + 1/2 (\bar{w}_{,x^2} - w_{0,x^2}) \} \quad (7)$$

で与えられる。ここに、 A_t はフランジの断面積、 E はヤング率である。式(6)の複号のうち、上段の符号が $x = a/2$ 辺で、下段の符号が $x = -a/2$ 辺で用いられる。

次に、腹板の上下辺での境界条件について考えよう。 $y = 0$ 辺において、腹板の y 方向膜力 N_y 、膜せん断力 N_{xy} 、 y 方向曲げモーメント M_y 、および反力 $V_y (= M_{y,y} + 2M_{xy,x})$ を受けるフランジの x 、 y 、 z 方向の力の3つのつり合い式とねじりに関するつり合い式は

$$\begin{aligned} N_{t \cdot} \cdot x + N_{xy} \cdot - (N_{t \cdot}^p \cdot x + N_{xy}^p) &= 0, \\ M_{tz} \cdot_{,xx} + N_y \cdot + N_{t \cdot} \cdot v_{,xx} - N_{xy} \cdot v_{,x} - (M_{tz}^p \cdot_{,xx} + N_y^p + N_{t \cdot}^p v_{,xx} - N_{xy}^p v_{,x}) &= 0, \\ M_{ty} \cdot_{,xx} + M_y \cdot_y + 2M_{xy} \cdot_x + N_{t \cdot} \cdot \bar{w}_{,xx} - N_{xy} \cdot \bar{w}_{,x} \\ - (M_{ty}^p \cdot_{,xx} + M_y^p \cdot_y + 2M_{xy}^p \cdot_x + N_{t \cdot}^p \bar{w}_{,xx} - N_{xy}^p \bar{w}_{,x}) &= 0, \\ M_{t \cdot} \cdot_x - M_y \cdot - (M_{t \cdot}^p \cdot_x - M_y^p) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここに、 M_{tz} 、 M_{ty} はそれぞれフランジの z および y 軸回りの曲げモーメント、 M_t はねじりモー

メントで、腹板の変位を用いて

$$\begin{aligned} M_{fz}^e &= -E I_{fz} v_{,xx}, \\ M_{fy}^e &= -E I_{fy} (\bar{w}_{,xx} - w_{0,xx}), \\ M_t^e &= GJ (\bar{w}_{,xy} - w_{0,xy}) \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。ここに、 $E I_{fz}$ 、 $E I_{fy}$ はそれぞれフランジの z および y 軸回りの曲げ剛さ、 GJ はサンパンの純ねじり定数である。

$y = b$ 辺では、桁が幅 c にわたって支持される区間と無支持の区間に分けて考える。桁が剛に支持される中央部分（ $-c/2 \leq x \leq c/2$ ）では、腹板は面内および面外方向に完全に変位拘束されているものと仮定する。ただし、 x 方向には自由に変位できるものとする。すなわち

$$N_{fx}^e - N_{xy}^e - (N_{fx}^p - N_{xy}^p) = 0, \quad v = 0, \quad \bar{w} - w_0 = 0, \quad \bar{w}_{,y} - w_{0,y} = 0 \quad (10)$$

また、下フランジ辺の無支持の区間（ $x < -c/2$, $x > c/2$ ）では上フランジと同様の条件を仮定する。すなわち

$$\begin{aligned} N_{fx}^e - N_{xy}^e - (N_{fx}^p - N_{xy}^p) &= 0, \\ M_{fz}^e_{,xx} - N_y^e + N_{fx}^e v_{,xx} + N_{xy}^e v_{,x} - (M_{fz}^p_{,xx} - N_y^p + N_{fx}^p v_{,xx} + N_{xy}^p v_{,x}) &= 0, \\ M_{fy}^e_{,xx} - M_y^e_{,y} - 2M_{xy}^e_{,x} + N_{fx}^e \bar{w}_{,xx} + N_{xy}^e \bar{w}_{,x} \\ &\quad - (M_{fy}^p_{,xx} - M_y^p_{,y} - 2M_{xy}^p_{,x} + N_{fx}^p \bar{w}_{,xx} + N_{xy}^p \bar{w}_{,x}) = 0, \\ M_{tx}^e + M_y^e - (M_{tx}^p + M_y^p) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

以上の基礎式と境界条件式に断面力-変位式(4), (5), (7), (9)を代入すれば、変位 u , v , $\bar{w}$ を未知数とする連成した非線形偏微分方程式を得る。これらを任意の荷重強度のもとに解けば、非線形解が得られる。

2.3 降伏条件と仮想断面力

上述の基礎式と境界条件式には弾塑性状態で用いられる仮想断面力が含まれる。この値は以下のように求められる。まず、腹板を板厚方向に、フランジを幅と板厚方向にそれぞれ細分割する。非線形解析の結果得られる変位を用い、全ひずみが断面内の各点で計算される。すなわち、腹板およびフランジでそれぞれ

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xw} &= u_{,x} + \frac{1}{2} (\bar{w}_{,x}^2 - w_{0,x}^2) - z (\bar{w}_{,xx} - w_{0,xx}) + \sigma_{rxw} / E, \\ \varepsilon_{yw} &= v_{,y} + \frac{1}{2} (\bar{w}_{,y}^2 - w_{0,y}^2) - z (\bar{w}_{,yy} - w_{0,yy}) + \sigma_{rwy} / E, \\ \gamma_{xyw} &= u_{,y} + v_{,x} + \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,y} - w_{0,x} w_{0,y} - z (\bar{w}_{,xy} - w_{0,xy}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= u_{,x} + \frac{1}{2} (\bar{w}_{,x}^2 - w_{0,x}^2) - y v_{,xx} - z (\bar{w}_{,xx} - w_{0,xx}) + \sigma_{rf} / E, \\ \gamma_{xzf} &= -z (\bar{w}_{,xy} - w_{0,xy}) \end{aligned} \quad (13)$$

が計算される。ここに、 σ_{rxw} 、 σ_{rwy} はそれぞれ腹板での x および y 方向の残留応力、 σ_{rf} はフランジでの残留応力で、ここではFig. 2に示す自己平衡型の分布形を仮定する。

なお、図中の σ_{rwxl} 、 $\sigma_{rwy l}$ 、 σ_{rfl} は最大引張残留応力を、

$\sigma_{rwx c}$ 、 $\sigma_{rwy c}$ 、 σ_{rfc} は最大圧縮残留応力を示す。

したがって、腹板とフランジの弾性応力は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xw}^e &= \{E / (1 - \nu^2)\} (\varepsilon_{xw} + \nu \varepsilon_{yw}), \\ \sigma_{yw}^e &= \{E / (1 - \nu^2)\} (\nu \varepsilon_{xw} + \varepsilon_{yw}), \\ \tau_{xyw}^e &= E \gamma_{xyw} / 2 (1 - \nu) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_f^e = E \varepsilon_f, \quad \tau_{xzf}^e = E \gamma_{xzf} / 2 (1 - \nu) \quad (15)$$

これらの応力を von Mises の等価応力式

$$\begin{aligned} \text{腹板の場合} \quad : \quad \sigma_{eqw} &= \sqrt{(\sigma_{xw}^e - \sigma_{xwb}^p)^2 + (\sigma_{yw}^e - \sigma_{ywb}^p)^2} \\ &\quad - (\sigma_{xw}^e - \sigma_{xwb}^p)(\sigma_{yw}^e - \sigma_{ywb}^p) + 3 (\tau_{xyw}^e - \tau_{xywb}^p)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

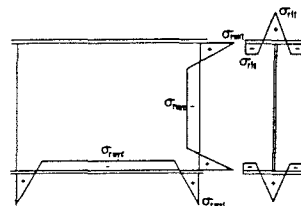


Fig.2. Distribution of residual stresses.

$$\text{フランジの場合: } \sigma_{eqf} = \sqrt{(\sigma_f^e - \sigma_{fb}^p)^2 + 3(\tau_{xzf}^e - \tau_{xzf b}^p)^2} \quad (17)$$

に代入し、降伏点応力 σ_p と比較する。ここに、 σ_{xwb}^p , σ_{ywb}^p , τ_{xywb}^p と σ_{fb}^p , $\tau_{xzf b}^p$ はそれぞれ前荷重段階に得られた腹板とフランジの仮想応力である。荷重の負荷により応力が常に漸増する場合はよいが、荷重が減少したり、荷重の負荷にも関わらず応力の減少や反転が起こったりする場合にも合理的に仮想応力が算定できるよう荷重段階の進行に伴ってその都度降伏曲面の原点を前荷重段階で求められた仮想応力分だけ修正し、式(16), (17)で降伏判定する。

仮に、 $\sigma_{eqw} \geq \sigma_p$ あるいは $\sigma_{eqf} \geq \sigma_p$ であれば、腹板かフランジに塑性域が生じている。この場合、腹板とフランジの仮想応力は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xw}^p &= \sigma_{xwb}^p + (1 - \sigma_p / \sigma_{eqw})(\sigma_{xw}^e - \sigma_{xwb}^p), \\ \sigma_{yw}^p &= \sigma_{ywb}^p + (1 - \sigma_p / \sigma_{eqw})(\sigma_{yw}^e - \sigma_{ywb}^p), \\ \tau_{xyw}^p &= \tau_{xywb}^p + (1 - \sigma_p / \sigma_{eqw})(\tau_{xyw}^e - \tau_{xywb}^p) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^p &= \sigma_{fb}^p + (1 - \sigma_p / \sigma_{eqf})(\sigma_f^e - \sigma_{fb}^p), \\ \tau_{xzf}^p &= \tau_{xzf b}^p + (1 - \sigma_p / \sigma_{eqf})(\tau_{xzf}^e - \tau_{xzf b}^p) \end{aligned} \quad (19)$$

一方、 $\sigma_{eqw} < \sigma_p$ あるいは $\sigma_{eqf} < \sigma_p$ であれば、フランジと腹板は弾性のままか、あるいは荷重の除荷に伴って応力が減少した場合のいずれかなので、仮想応力は前荷重段階の値がそのまま用いられる。この場合、腹板とフランジの仮想応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{xw}^p = \sigma_{xwb}^p, \quad \sigma_{yw}^p = \sigma_{ywb}^p, \quad \tau_{xyw}^p = \tau_{xywb}^p \quad (20)$$

$$\sigma_f^p = \sigma_{fb}^p, \quad \tau_{xzf}^p = \tau_{xzf b}^p \quad (21)$$

結局、式(18)～(21)で求められた仮想応力を断面内で集めると、腹板とフランジの仮想断面力がそれぞれ

$$\begin{aligned} N_x^p &= \Sigma \sigma_{xw}^p \Delta t, \quad M_x^p = \Sigma \sigma_{xw}^p z \Delta t, \\ N_y^p &= \Sigma \sigma_{yw}^p \Delta t, \quad M_y^p = \Sigma \sigma_{yw}^p z \Delta t, \\ N_{xy}^p &= \Sigma \tau_{xyw}^p \Delta t, \quad M_{xy}^p = \Sigma \tau_{xyw}^p z \Delta t \end{aligned} \quad (22)$$

$$N_f^p = \Sigma \sigma_f^p \Delta A, \quad M_{fy}^p = \Sigma \sigma_f^p z \Delta A, \quad M_{fx}^p = \Sigma \sigma_f^p y \Delta A, \quad M_{fy}^p = \Sigma \tau_{xzf}^p y \Delta A \quad (23)$$

のように決定される。ここに、 Δt は腹板の微小板厚、 ΔA はフランジの微小断面積である。

3. 数値解析法

つり合い式(1)～(3)を境界条件式(6), (8), (10), (11)を満足するように解けば、非線形解が得られる。しかし、連成した複雑な非線形偏微分方程式の厳密解を求めることは極めて困難である。ここでは差分法を用い、多元連立の非線形代数方程式に変換し、近似解を求めることにする。腹板をxおよびy方向にそれぞれ等間隔に n_x および n_y 分割する。作用荷重と桁の断面が左右対称であり、対称な初期たわみ分布だけを扱うことにすれば、

$$u(-x, y) = -u(x, y), \quad v(-x, y) = v(x, y), \quad \bar{w}(-x, y) = \bar{w}(x, y) \quad (24)$$

の対称条件を用いて板の半分を解析すればよい。

腹板の領域内の分点でつり合い式を、境界辺で境界条件式を差分表示し、それらを行列で示すと、

$$[K] \{\delta\} = \{f\} \quad (25)$$

となる。ここに、 $[K]$ はつり合い式(1)～(3)および境界条件式(6), (8), (10), (11)の線形項のみの差分表示の係数行列である。 $\{\delta\}$ は $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n, u_0, \phi, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m, \bar{w}_m\}$ からなる未知変位ベクトルで、下添字 n, m はそれぞれ $n = (n_x / 2 + 1)(n_y + 1)$, $m = (n_x / 2 + 2)(n_y + 3)$ である。 $\{f\}$ は作用荷重、塑性化に伴う仮想的な擬荷重および幾何学的非線形項からなり、一段階前の反復解を代入して得られる既知ベクトルである。

上式を反復して解くこともできるが、ここでは非線形代数方程式の解法に修正ニュートン・ラプソン法を

採用し、増分手法も取り入れ、第 $\ell+1$ 回目の反復解を

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \Delta \delta \quad (26)$$

と表せば、式(25)は増分変位 $\Delta \delta$ を未知量とした

$$[K] \{\Delta \delta\} = \{R(\delta_i)\} \quad (27)$$

の形に書き換えられ、これを解けばよい。ここに、 $\{R(\delta_i)\}$ は第 ℓ 反復回目の非線形解 $\{\delta_i\}$ をつり合い式と境界条件式に代入して得られる残差不平衡力である。この不平衡力が微小になるまで反復して解く。なお、接線剛性法に比較して、解の収れんが遅いので、Lagrangeの補間法や加速Jacobi法を用い、解法の欠点を補った。また、帯行列の性質を利用するとともに、行列 $[K]$ が荷重の大きさに無関係なため、この行列を反復計算する前に三角分解し、多元連立一次方程式の求解に要する演算時間の短縮化を計った。

4. 数値計算結果とその考察

前述の数値解析法により部分縁荷重が作用するプレートガーダー腹板の弾塑性有限変位挙動を明らかにする。荷重幅と腹板の長さの比 c/a 、腹板の幅厚比 $\beta_w = b/t$ 、フランジと腹板の断面積の比 $\delta_f = A_f/bt$ 、フランジの幅厚比 $\beta_f = b_f/t_f$ 、初期たわみの大きさ、および残留応力の分布とその量などをパラメータに局所荷重下のプレートガーダー腹板の変形性状と極限強度を求める。式(27)の多元連立非線形代数方程式を無次元化し、広範にパラメトリック解析する。ただし、初期たわみは

$$w_0 = w_{0max} \cos \pi x/a \sin \pi y/b \quad (28)$$

とした。ここに、 w_{0max} は最大初期たわみ量である。種々の腹板の縦横比が考えられるが、ここでは正方形腹板を解析する。また、腹板とフランジの降伏点応力は $\sigma_y = 2400 \text{ kgf/cm}^2$ 、ヤング率は $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比は $\nu = 0.3$ とした。

4.1 差分解の精度

はじめに、正方形腹板の幅厚比 $\beta_w = 150$ で、フランジの幅厚比 $\beta_f = 30$ 、フランジの断面積比 $\delta_f = 0.5$ の桁を対象に、種々の差分分割数と解の精度を調べ、解析に必要な分割数を決定する。ただし、最大初期たわみ量は現行の道路橋示方書¹⁵⁾ で定められた制限値 $b/250$ の $1/10$ とし、残留応力は無視した。xおよびy方向の差分分割数 n_x と n_y が $10 \sim 22$ の範囲で解の精度を検討したところ、 $n_x = n_y = 20$ の分割数で十分な精度の解が得られた。また、腹板の板厚方向の分割数 n_z およびフランジの分割数 n_{fz} と n_{fz} はそれぞれ $10, 6, 10$ 分割でよいことも分かった。

次に、本数値解を既往の解と比較し、本法の妥当性を検討する。適切な解析解がみあたらなかったため、筆者ら¹⁶⁾ および Roberts-Rockey¹⁷⁾ の行った実験結果を用い、理論の妥当性を検証する。Table 1 に試験桁の寸法諸元と極限強度の実験値を示す。ここに、試験桁1と2は筆者らの、3と4はRoberts-Rockeyの試験桁である。Fig. 3 に理論極限強度(縦軸)と実験崩壊荷重(横軸)の関係を示す。両軸はともに桁の全塑性せん断力 $Q_y (= \sigma_y bt / \sqrt{3})$ で無次元化されている。図中、○と×印はそれぞれ筆者らとRoberts-Rockeyの結果である。試

Table 1. Dimensions of tested plate girders and ultimate strengths.

Model	patch load length (mm)	web			yielding stress (kgf/cm ²)	flange			maximum load (tons)
		length (mm)	depth (mm)	thickness (mm)		width (mm)	thickness (mm)	yielding stress (kgf/cm ²)	
1	90	900	900	3.2	2600	80	5.0	3140	11.25
2	90	900	900	6.0	3120	80	5.0	3140	30.40
3	60	600	600	3.57	2620	50.5	10.0	2804	14.28
4	60	600	600	3.57	2870	49.5	10.1	2845	15.10

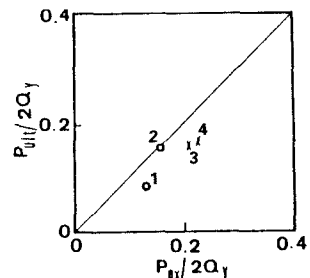


Fig.3. Comparison between tested results and theoretical ultimate strengths.

験桁 2 の理論値と実験値はよい一致を示した。他の 3 体についてはいずれも理論値は実験値を多少下まわり、安全側の強度が算定された。以上のことより、本法によれば、部分縁荷重を受ける桁の極限強度が十分な精度で推定されるものと思われる。

4.2 部分縁荷重の幅

部分荷重幅 c と腹板の非線形挙動の関係を調べる。荷重幅比が $c/a=0.1 \sim 0.5$ の場合、桁の左右辺の鉛直変位 $v_0 b/t^2$ と部分縁荷重 $P/2Q_y$ の関係は Fig. 4 で示される。ただし、 $\beta_w = 150$, $\beta_r = 25$, $\delta_r = 0.5$ の桁で、最大初期たわみ量 $w_{0max} = b/2500$ とし、残留応力は無視した。図から分かるように、

初期の荷重段階では桁の左右辺は荷重に比例して鉛直下方に変位する。その後、荷重の増加とともに変位の増加量が徐々に増え、最高荷重に達した。 $c/a=0.1 \sim 0.5$ の終局強度はそれぞれ $P_{ult}/2Q_y = 0.191, 0.249, 0.286, 0.320, 0.356$ として求められた。同一荷重での荷重幅の相違による鉛直変位を比較すると、荷重幅が狭いほど応力の集中と片持ちばりとしての曲げ作用により大きく変位することが分かる。その結果、より低い荷重で桁は崩壊する。

腹板の中央断面において、下フランジから $b/4$ 点での荷重によるたわみ w と荷重強度の関係は Fig. 5 のようになる。図中の●印は初期降伏を示す。初期たわみが存在するため、負荷直後から腹板は面外方向にたわむ。しかし、荷重幅の大きさに関わらず初期降伏前のたわみは比較的小さく、荷重とともにほぼ線形的に増加する。ある荷重レベルに達すると、急に面外の変形が発達するようになる。変形が急増するあたりで腹板のクリッピングの特徴が顕著に現れるようになる。荷重幅が狭いと、腹板は応力集中で早期に降伏する。降伏後はたわみが顕著に増えて崩壊に至る。一方、荷重が広い範囲にわたって作用すれば、腹板全体に変形が及び、終局時には大きなたわみを伴うようになる。ただし、荷重幅が 0.3 以上になると、最高荷重時でのたわみはほとんど変わらない。初期降伏荷重は最高荷重のほぼ 70～75% で、荷重幅に無関係なことが分かった。

荷重幅比が $c/a=0.1$ と 0.5 の場合、最高荷重時の腹板のたわみ分布は Fig. 6 のようになる。 $c/a=0.1$ の場合、荷重作用点直下に局所的な変形が現れている。中央断面でのたわみ波形はほぼ 2 半波である。一方、 $c/a=0.5$ の場合、下フランジ辺で広い範囲にわたって腹板が変位

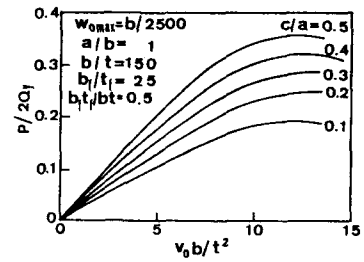


Fig. 4. Load vs vertical displacement curves at the side of web for various lengths of partial edge loading.

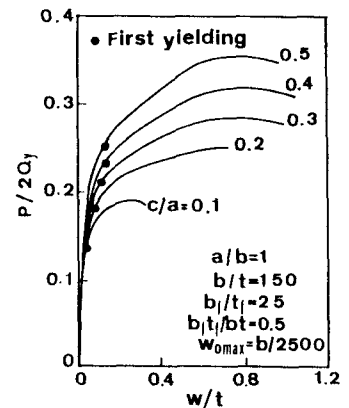


Fig. 5. Load-deflection curves at the point $x=0$ and $y=3b/4$ of web.

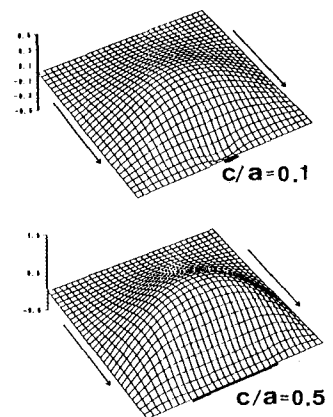


Fig. 6. Distribution of deflection at web.

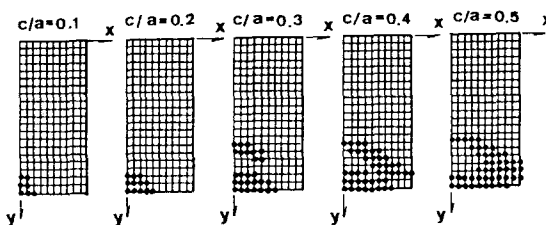


Fig. 7. Propagation of yielding at web.

拘束されているため、その近傍でたわみはかなり抑えられている。その結果、腹板の中央部分でたわみが著しく増大している。

崩壊時の塑性域はFig. 7 のようである。図中、●印は板厚方向に板の一部が降伏した分点を示す。図から明らかなように、荷重幅が狭いと、塑性域は荷重直下の一部分に限られる。荷重幅比が 0.3 の場合、下フランジから $b/4$ 点付近にも塑性域が現れる。さらに、荷重幅が大きくなると、塑性域は左右の境界へと広がる。なお、初期降伏はいずれの荷重幅でも荷重の端部直下の腹板とフランジの接合部で起こる。

ところで、Roberts¹⁷⁾ は実験による知見から局所荷重を受けるプレートガーダーの崩壊モードとして、2 種類のパターンを考えた。一つは腹板に 3 本の塑性関節線とフランジに 4 個の塑性ヒンジを形成して崩壊するモードで、もう一つは腹板の変形が生じず、フランジにのみ 4 個の塑性ヒンジが形成されて崩壊するモードである。これらと本解析結果を比較したところ、荷重幅が比較的小さい $c/a \leq 0.2$ の場合には後者の崩壊モードに、荷重幅が広くなると ($c/a \geq 0.3$)、前者の崩壊モードに類似することが分かった。この傾向は最近の Shimizu¹⁸⁾ の論文の結果とも一致するようである。

Fig. 8 に荷重幅と極限強度の関係を示す。いずれの幅厚比でも荷重幅比が $c/a \geq 0.2$ であれば、荷重幅と極限強度の間にはほぼ線形の関係が成り立つ。幅厚比の大きな腹板は小さな腹板に比べて荷重幅の増加に伴う強度の増大が少なく、その影響を比較的受けにくい。

4.3 腹板の幅厚比

Fig. 9 は腹板の幅厚比と極限強度の関係を示す。ここに、フランジの幅厚比 $\beta_f = 25$ 、断面積比 $\delta_f = 0.5$ の桁で、最大初期たわみが $w_{0max} = b/2500$ の場合を解析した。ただし、前述と同様、残留応力は考慮しなかった。いずれの荷重幅とも腹板の幅厚比が増すと、極限強度はかなり低下する。荷重幅が大きい場合には、幅厚比の増加に伴う強度低下が顕著である。

荷重幅が $c/a = 0.3$ の場合、最高荷重時の塑性域の分布はFig. 10 のようになる。腹板の幅厚比が $b/t = 125$ と比較的小さいと、塑性域は比較的広い範囲に及び、板の両面が塑性化して崩壊に至っている。これはRoberts の腹板降伏(web yielding)²⁾ の崩壊モードに類似している。一

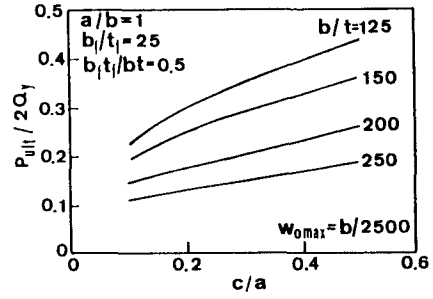


Fig. 8. Relation between ultimate strengths and length of patch loading.

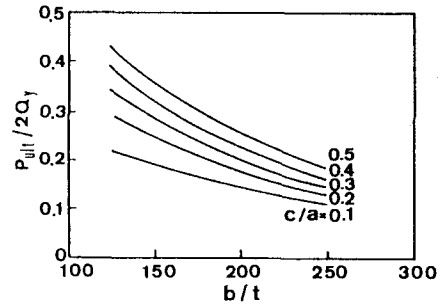


Fig. 9. Relation between ultimate strengths and width-to-thickness ratio.

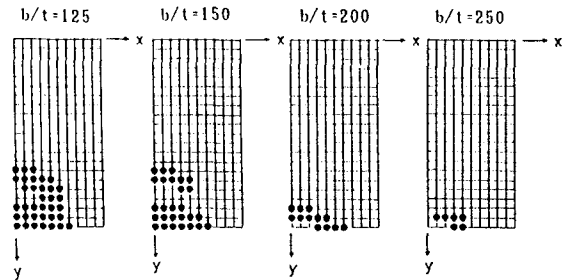


Fig. 10. Propagation of yielding at web.

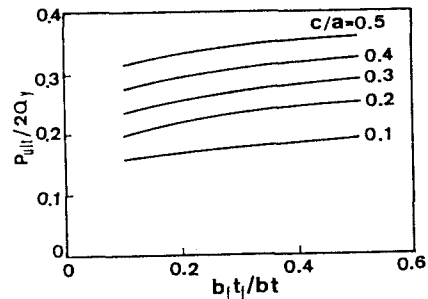


Fig. 11. Relation between ultimate strengths and width-to-thickness of flanges.

方、幅厚比が $b/t=250$ と大きくなれば、塑性域は著しく減少し、腹板の崩壊は腹板曲げ(web bending)²⁾によることが分かる。腹板は弾性座屈の様相を呈し、かなりの後座屈強度を示した後、崩壊している。

4.4 フランジと腹板の断面積の比

腹板の幅厚比 $\beta_w=150$ 、フランジの幅厚比 $\beta_f=25$ で、最大初期たわみが $w_{0max}=b/2500$ の桁を解析した。ただし、残留応力は無視した。フランジの断面積と極限強度の関係を求めれば、Fig. 11を得る。断面積比 $\delta_f=0.1\sim 0.5$ において、フランジの断面積が極限強度に及ぼす影響は比較的少ない。また、フランジの断面積と強度の関係はほぼ線形に近似される。

なお、フランジの幅厚比 β_f についても検討したところ、この比の増加とともに極限強度は増える傾向にあった。しかし、その割合は極めてわずかで、腹板のクリッピングでは極限強度の算定にこのパラメータを考慮する必要のないことが分かった。ちなみに、このパラメータは桁全体の横倒れに大いに関係があるが、荷重載荷位置が拘束されるような場合にはこのパラメータは強度にほとんど影響しない。

4.5 初期たわみの大きさ

最大初期たわみ量の相違による腹板のたわみと作用荷重の関係がFig. 12に示される。ここに、 $w_{0max}=b/2500000$ は初期たわみのない場合に相当し、その他は示方書で規定される制限値の1/10、1/2 および同量の3種類のたわみ量である。ただし、 $c/a=0.1$ 、 $\beta_w=150$ 、 $\beta_f=25$ 、 $\delta_f=0.5$ の桁で、残留応力は無視した。図から明らかなように、初期たわみがほとんどない場合、初期降伏後もしばらくはたわみは生じず、真っ直ぐのまま荷重が増加する。その後、急にたわみが成長し、最高荷重に達した。この場合、座屈後の余剰強度は比較的少ない。初期たわみが大きくなれば、当然のことながら腹板のたわみは初期の荷重段階から生じ、荷重の増加とともに変形が増して崩壊に至る。初期たわみのない場合と示方書の制限値の初期たわみがある場合の極限強度の差は約17%で、初期たわみによって強度がかなり低下する。部分縁荷重を受ける腹板では極限強度は初期たわみに敏感である。

4.6 残留応力

残留応力の4種類の組合せに対する荷重-強制鉛直変位曲線はFig. 13となる。すなわち、①残留応力を全く無視した場合(実線)、②桁軸方向の残留応力のみを考慮した場合(破線)、③桁軸直角方向の残留応力のみを考慮した場合(一点鎖線)、④二方向の残留応力を考慮した場合(二点鎖線)である。ただし、Fig. 2におけるフランジと腹板の圧縮残留応力 σ_{rxc} 、 σ_{rwc} 、 σ_{rxc} はともに $-0.2\sigma_D$ 、引張残留応力 σ_{rxt} 、 σ_{rwt} は σ_D とした。最も極限強度が低く、危険な状態はxおよびy方向の二方向に残留応力を考えた場合であった。次に低い極限強度はy方向、すなわち桁軸直角方向の残留応力を考慮した場合であった。通常、残留応力がプレートガーダーの極限強度に及ぼす影響を調べる場合、桁軸方向の残留応力が仮定され

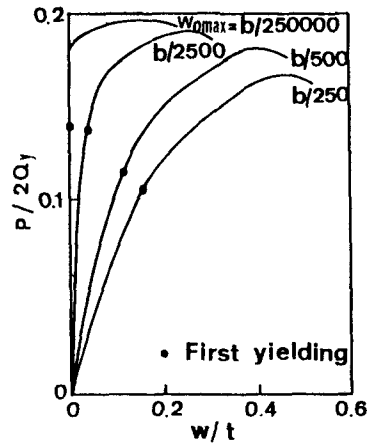


Fig. 12. Load-deflection curves at the point $x=0$ and $y=3b/4$ of web.

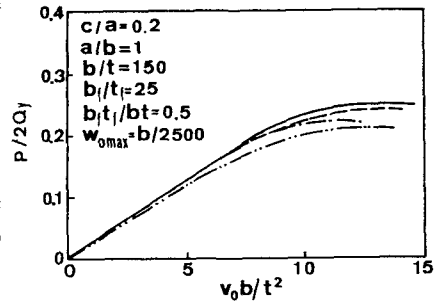


Fig. 13. Influence of residual stress on nonlinear behavior and ultimate strength.

る。しかし、ここで得られた結論から、部分縁荷重が作用する場合には桁軸直角方向の残留応力が重要であることが分かる。今日まで、桁軸方向の残留応力はかなり詳しく研究されているが、桁軸直角方向の分布はあまり定かでない。ここでは桁軸直角方向の残留応力を桁軸方向と同じ分布形で、同じ量の残留応力として解析したが、この仮定には検討の余地が十分あるように思われる。したがって、桁軸直角方向の残留応力分布も今後明らかにされる必要があろう。

5. あとがき

部分的な荷重が作用するプレートガーダーの非線形挙動と極限強度を弾塑性有限変位解析によって明らかにした。フランジを軸力、二方向の曲げおよびねじりを受ける弾塑性はり一柱にモデル化し、フランジの剛性が腹板の強度に及ぼす影響を検討した。数値解析によって得た結果は次のとおりである。

- (1) 荷重幅と極限強度の間には線形関係が成り立ち、荷重幅の増加とともに極限強度は増加する。荷重幅が腹板長の1/10から1/2に変化すれば、極限強度は約90%ほど増加する。
- (2) 荷重幅によって腹板の塑性崩壊メカニズムに差異の生じることが判明した。すなわち、荷重幅が狭いとき、塑性域は荷重直下の一部にしか現れない。荷重幅が広いとき、腹板内にも塑性域が形成される。
- (3) 腹板の幅厚比が大きくなるにしたがって、極限強度は低下する。
- (4) フランジの断面積と極限強度の間にはほぼ直線の関係が成り立ち、断面積の増加とともに強度が増す。一方、フランジの幅厚比は極限強度にほとんど影響しない。
- (5) 極限強度は初期たわみに敏感で、現行道路橋示方書の制限値の初期たわみがある場合には初期たわみのない場合に比べて強度が約17%ほど低下する。
- (6) 桁軸方向と桁軸直角方向の残留応力が極限強度に及ぼす影響を調べた。部分縁荷重のみが作用すれば、桁軸方向の残留応力よりも桁軸直角方向の残留応力分布の方が極限強度に大きく影響し、強度低下の著しいことが分かった。

なお、部分縁荷重、曲げモーメントおよびせん断力が同時に作用する場合については現在研究中であり、別途報告したい。

参考文献

- 1) Girkmann, K. : Die Stabilität der Stegbleche vollwandiger Träger bei Brucksichtigung örtlicher Lastangriffe, IABSE, 3rd Congr. Final Report, Berlin, 1936.
- 2) Roberts, T. M. : Patch loading on plate girders, Plated Structures - Stability and Strength, ed. by R. Narayanan, Applied Science Publishers, London, pp.77-102, 1983.
- 3) Elgaaly, M. : Web design under compressive edge loads, Engineering Journal, AISC, pp.153-171, 1983.
- 4) Dubas, P. and Gehri, E. (eds.) : Behaviour and Design of Steel Plated Structures, ECCS, TCS, SSTWG8.3, Applied Statics and Steel Structures, ETH-Honggerberg, Zurich, 1986.
- 5) 福本 晴士編：座屈設計ガイドライン，土木学会，1987.
- 6) Galambos, T. V. (ed.) : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 4th ed., John Wiley & Sons, pp.223-230, 1988.
- 7) 桑山八洲男：部分縁荷重を受ける長方形板の一座屈，後座屈解析，土木学会論文報告集，No. 337, pp. 47-56, 1983-9.
- 8) 田代孝吉・清水 茂・吉田俊弥：局所荷重をうける板の有限変位解析，第42回土木学会年次学術講演会

講演概要集, I-82, 1987.

- 9) 堀井滋則・清水 茂・吉田俊弥: 局所荷重をうける板の崩壊機構に関する若干の考察, 第43回土木学会年次学術講演会講演概要集, I-58, 1988.
- 10) Stein, E., Lambertz, K.-H., und Plank, L. : Traglastberechnung dünnwandiger Strukturen bei grossen elastoplastischen Deformationen, Der Stahlbau, Jg. 54, Ht. 1, S. 9-13, 1985.
- 11) Ramm, E. und Weimar, K. : Traglasten unversteifter Tragerstegbleche unter konzentrierten Lasten, Der Stahlbau, Jg. 55, Ht. 4, S. 113-118, 1986.
- 12) Weimar, K. and Ramm, E. : ECCS Colloquium on Stability of Plate and Shell Structures, Ghent University, 6-8 April, pp. 79-84, 1987.
- 13) Lin, T. H. : Theory of Inelastic Structures, John Wiley & Sons, 1968.
- 14) Massonnet, Ch. : General theory of elastic-plastic membrane-plates, Engineering Plasticity, eds. by J. Heyman and F. A. Leckies, Cambridge University Press, pp. 443-471, 1968.
- 15) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, I 共通編・II 鋼橋編, 1980-2.
- 16) Dogaki, M., Murata, M., Kishigami, N., Tanabe, T. and Yonezawa, H. : Ultimate strength of plate girders with transverse stiffeners under patch loading, Technology Reports of Kansai University, No. 32, 1990-3.
- 17) Roberts, T. M. and Rockey, K. C. : A mechanism solution for predicting the collapse loads of slender plate when subjected to in-plane patch loading, Proc. of ICE, part 2, Vol. 67, pp. 155-175, 1979.
- 18) Shimizu, S., Horii, S. and Yoshida, S. : The collapse mechanisms of patch loaded web plates, Journal Construct. Steel Research (to be published).

(1989 年10月02日受付)