

はり・柱理論に基づく初期曲げモーメントを受ける弾性矩形骨組の座屈解析に関する一考察

On the Buckling Analysis of Elastic Frames under Primary Moment using Beam-Column Theory

後藤芳顯* ・ 鈴木五月** ・ 松浦 聖***

By Yoshiaki GOTO, Satsuki SUZUKI and Sei MATSUURA

Within the framework of beam-column theory, we proposed a consistent method to analyze the elastic stability of rigid frames considering pre-buckling deformations due to the primary bending moment. Different from the method presented by Chwalla and later followed by Mansur et al., Lu, and Hayashi, our method which precisely considers the bowing effect yields symmetric tangent stiffness matrix. As a result of our numerical analysis, the nonlinear behavior of portal frames are classified into three types, i.e. bifurcation, limit-load instability, and monotonic increasing, according to the values of structural parameters. Further, it was known that the primary bending moment does not always reduce the buckling load of portal frames. These results are quite different from those obtained by Chwalla, Mansur, Lu, and Hayashi.

1. はじめに

弾性骨組の安定解析に関しては多数の研究¹⁾があるが、これらの多くは、座屈前の変形を無視したいわゆる線形座屈解析に基づいている。しかしながら、剛結骨組は、部材の曲げ作用によっても荷重を支持するように設計されているので、完全系においても曲げ変形が生ずる場合があり、より厳密な安定解析を行うには、座屈前の変形の影響を考慮することが必要となる。周知のように、この問題は古くChwalla²⁾によって扱われた。Chwallaは、Bowlingの影響^{3) 4)}を無視した通常の線形化はり・柱の式を増分したものに相当する支配方程式をもとに解析している。さらに、ここでは、部材軸線の伸長も無視されている。この研究はMansur⁵⁾, Lu⁶⁾等によって引き継がれ、最近では林⁷⁾も同様な問題を解析しているが、すべて基本的にはChwallaと同様の支配方程式を用いている。

変形法の観点から見ると、座屈荷重は、構造物の接線剛性マトリックスのデターミナントが零となる条件から決定されるので、安定解析の精度は、接線剛性マトリックスの精度に強く影響される。この接線剛性マ

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒466名古屋市昭和区御器所町)

** 正会員 工修 名古屋工業大学大学院工学研究科博士後期課程在学中 (同上)

*** 正会員 工博 名古屋工業大学副学長 工学部社会開発工学科 (同上)

トリックスは、弾性系における保存力の下では停留ポテンシャルエネルギーの原理が成立することから対称とならなければならない。しかしながら、従来の研究に用いられた線形化はり・柱の式の増分式から求められる接線剛性マトリックスは、座屈前の変形を無視しなければ対称とならない。従って、Chwallaに代表されるBowlingを無視した解析手法は、座屈前の変形の影響を考慮するという基本的な目的からして、必ずしも適当であるとは考えられず、その精度に関しても疑問が残る。

線形化はり・柱の式に基づく接線剛性マトリックスの非対称性は、仮想仕事の式によるはり・柱の理論の誘導過程⁸⁾でわかるように、その構成則に、微小変位理論と同様のものを採用する⁷⁾ことに起因している。すなわち、はり・柱理論において支配方程式が統一性のあるものとなるには、線形化はり・柱の式において無視されているBowlingの影響を軸歪の評価に考慮する必要がある。この支配方程式は仮想仕事の式を満足していることからわかるように、対称な接線剛性マトリックスを与える。

本報告では、座屈前の曲げ変形を考慮した座屈解析を上述のようなBowlingの影響を考慮したはり・柱の式を用い、はり・柱理論の枠内で統一のとれた形でしかも精度良く行う方法について提案し、座屈前の曲げ変形が矩形骨組の座屈挙動に及ぼす影響を明らかにすることを目的とする。

従来の研究と厳密な比較を行うために、ここではBowlingの影響を考慮したはり・柱の支配方程式から著者等によって導かれた閉じた形の剛性方程式⁸⁾、接線剛性方程式⁹⁾を座屈挙動の解析に用いる。これらの剛性方程式、接線剛性方程式は軸力に関する完全な形の級数展開により陽に表現されている。

このようなBowlingの影響を考慮した閉じた形の剛性方程式、接線剛性方程式を用い、座屈前に曲げ変形を生ずる剛結骨組の座屈挙動について詳細に検討する。まず、Lu⁶⁾、林⁷⁾の解析結果と比較することにより、従来の解析における問題点を指摘する。つぎに本解析手法に基づき、最も基本的な門型骨組の座屈挙動を明らかにする。

2. Bowlingの影響を考慮したはり・柱の剛性方程式と接線剛性方程式

はり・柱理論の統一のとれた支配方程式は、仮想仕事の原理より誘導できるが、周知のように得られる支配方程式は、骨組の安定解析に通常用いられる線形化された支配方程式と異なり、軸歪の評価にBowlingによる非線形項が付加されている⁸⁾。したがって、以後線形化されたはり・柱の式に対して、Bowlingの影響を考慮したはり・柱の式を非線形はり・柱の式と呼び区別する。

図-1に示す各物理量を用いて非線形はり・柱の支配方程式を表すと次のようになる。

(つり合い式)

$$N' = 0, (Nv_o' + M')' + p_y = 0 \quad (1a, b)$$

(幾何学的、力学的境界条件)

$$u_o = u_{o,i} \quad \text{又は} \quad N = n_x N_i$$

$$v_o = v_{o,i} \quad \text{又は} \quad Nv_o' + M' = n_x S_i \quad (2a \sim c)$$

$$v_o' = \alpha_i \quad \text{又は} \quad M = -n_x M_i \quad (i=1, 2)$$

ここに、()' はxに関する微分を表し、 n_x は、節点1で-1、節点2で1の値をとる。

(断面力と変位の関係)

$$N = EA \{ u_o' + \frac{1}{2} (v_o')^2 \}$$

$$M = -EI v_o'' \quad (3a, b)$$

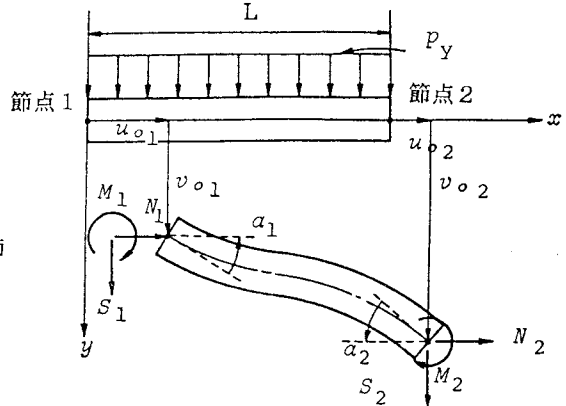


図-1 はり・柱部材

式(3a)の右辺第2項がBowlingの影響を表す非線形項で、この項を無視すると線形化はり・柱の式と一致する。また、つり合い式(1a, b)では、閉じた形の解を得るためにy方向の等分布荷重 p_y のみを考慮したが、通常の矩

形骨組では、この荷重だけで十分であると考えられる。式(1)～(3)より、閉じた形の剛性方程式は次のように求められる^{8) 9)}。

$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{K}}_{i,j}(\mathbf{N}_i) \mathbf{d}_j + \bar{\mathbf{K}}_{i,k}(\mathbf{N}_i) \mathbf{d}_k + \mathbf{p}_i \bar{\mathbf{L}}_{i,j}(\mathbf{N}_i) \mathbf{d}_j + \mathbf{p}_i \bar{\mathbf{L}}_{i,k}(\mathbf{N}_i) \mathbf{d}_k + \mathbf{p}_i^2 \bar{\mathbf{C}}_i(\mathbf{N}_i) \quad (4)$$

ここに、

$$\{\mathbf{f}_i\} = (\mathbf{N}_i, \mathbf{S}_i, \mathbf{M}_i, \mathbf{N}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{M}_2) \quad \{\mathbf{d}_i\} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \alpha_i, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \alpha_2) \quad (5a, b)$$

$$\mathbf{N}_i = N_i L^2 / EI, \quad \mathbf{S}_i = S_i L^2 / EI, \quad \mathbf{M}_i = M_i L / EI, \quad \mathbf{p}_i = p_i L^3 / EI, \quad \mathbf{u}_i = u_i / L, \quad \mathbf{v}_i = v_i / L \quad (6a \sim f)$$

剛性方程式の係数 $\bar{\mathbf{K}}_{i,j}(\mathbf{N}_i)$, $\bar{\mathbf{K}}_{i,k}(\mathbf{N}_i)$, $\bar{\mathbf{L}}_{i,j}(\mathbf{N}_i)$, $\bar{\mathbf{L}}_{i,k}(\mathbf{N}_i)$, $\bar{\mathbf{C}}_i(\mathbf{N}_i)$ は、すべて軸力 $\mathbf{N}_i$ の関数で $\bar{\mathbf{K}}_{i,j}$ は、 i, j 、 $\bar{\mathbf{K}}_{i,k}$ は、 j, k についてそれぞれ対称である。これらの具体的な表示は文献8), 9)に示す。

接線剛性方程式は、式(4)を節点物理量ならびに分布荷重について増分をとることにより次のように得られる。

$$\Delta \mathbf{f}_i = \Delta \bar{\mathbf{K}}_{i,j} \Delta \mathbf{d}_j + \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \Delta \mathbf{p}_i \quad (7)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{f}_i$, $\Delta \mathbf{d}_j$, $\Delta \mathbf{p}_i$ は $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{d}_j$, $\mathbf{p}_i$ の増分である。 $\Delta \bar{\mathbf{K}}_{i,j}$ は接線剛性マトリックスで i, j に関して対称となり、弾性体における停留ポテンシャルエネルギーの原理を満足している。 $\Delta \bar{\mathbf{K}}_{i,j}$, $\Delta \bar{\mathbf{C}}_i$ はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta \bar{\mathbf{K}}_{i,j} = \bar{\mathbf{K}}_{i,j} + 2\bar{\mathbf{K}}_{i,k} \mathbf{d}_k + \mathbf{p}_i \bar{\mathbf{L}}_{i,j} + \bar{\mathbf{K}}_i (\bar{\mathbf{K}}_{i,j} + 2\bar{\mathbf{K}}_{i,k} \mathbf{d}_k + \mathbf{p}_i \bar{\mathbf{L}}_{i,j}) / (1 - \bar{\mathbf{K}}_i) \quad (8)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{C}}_i = \bar{\mathbf{L}}_{i,j} \mathbf{d}_j + 2\mathbf{p}_i \bar{\mathbf{C}}_i + \bar{\mathbf{K}}_i (\bar{\mathbf{L}}_{i,j} \mathbf{d}_j + 2\mathbf{p}_i \bar{\mathbf{C}}_i) / (1 - \bar{\mathbf{K}}_i) \quad (9)$$

式(8), (9)に含まれる $\bar{\mathbf{K}}_i$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_i = & \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{i,m}}{\partial \phi_a} \frac{d\phi_a}{d\mathbf{N}_i} \mathbf{d}_m \\ & + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{i,km}}{\partial \phi_a} \frac{d\phi_a}{d\mathbf{N}_i} + \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_{i,km}}{\partial f_b} \frac{df_b}{d\mathbf{N}_i} \right) \mathbf{d}_k \mathbf{d}_m + \mathbf{p}_i \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{L}}_{i,k}}{\partial \phi_a} \frac{d\phi_a}{d\mathbf{N}_i} + \frac{\partial \bar{\mathbf{L}}_{i,k}}{\partial f_b} \frac{df_b}{d\mathbf{N}_i} \right) \mathbf{d}_k \\ & + \mathbf{p}_i \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{L}}_{i,j}}{\partial \phi_a} \frac{d\phi_a}{d\mathbf{N}_i} + \frac{\partial \bar{\mathbf{L}}_{i,j}}{\partial f_b} \frac{df_b}{d\mathbf{N}_i} \right) + \mathbf{p}_i^2 \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_i}{\partial \phi_a} \frac{d\phi_a}{d\mathbf{N}_i} + \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_i}{\partial f_b} \frac{df_b}{d\mathbf{N}_i} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 a, b は、 $a=1 \sim 4, b=1 \sim 10$ である。

ここに、 $d\phi_a/d\mathbf{N}_i$ と $df_b/d\mathbf{N}_i$ は軸力 $\mathbf{N}_i$ に関するべき級数の閉じた形で表されている⁹⁾。このような表現を用いることで、接線剛性方程式も剛性方程式同様、軸力の正、負、零によらず同一の表現になり、しかも軸力零での特異性も除去される。式(4), (7)はいずれも閉じた形であるので、一部材一要素として扱うことができ高精度の解析が可能となる。

3. Bowingの影響を無視したはり・柱の剛性方程式と接線剛性方程式

Chwallaに代表される従来の解析では、Bowingに加えて部材軸線の伸張も無視されている。汎用的な剛性法として定式化する場合、たわみ、たわみ角に加え、軸方向変位に対応した節点自由度を付加する必要がある。したがって、軸方向の変位自由度を付加するために、通常、微小変位理論と同様の構成則に基づくBowingを無視した軸線の伸張変形のみが考慮される。すなわち、2. で述べた線形化はり・柱の式を用いて定式化される。この場合軸剛性を大きくしていくと、Chwalla等による軸線の伸張を無視した場合に収束していくのは明らかで、線形化はり・柱の式に基づく剛性方程式の定式化は、Bowingを無視したより一般的な定式化といえる。したがって、ここでは線形化はり・柱の式を用いて得られる接線剛性方程式について考察する。

Bowingの影響を無視した閉じた形の剛性方程式は次のように与えられる⁸⁾。

$$\mathbf{f}_i = \bar{\mathbf{K}}_{i,j}(\mathbf{N}_i) \mathbf{d}_j \quad (11)$$

上式では、簡単のため分布荷重は除いている。また、 $\bar{\mathbf{K}}_{i,j}$ は式(4)に示すものと同じである。接線剛性方程式は、剛性方程式の増分をとることにより得られる。まず、式(11)における節点力、節点変位成分の増分をと

ることによって次のようになる。

$$\Delta \mathbf{F}_i = \bar{\mathbf{K}}_{i,j} \Delta \mathbf{\bar{d}}_j + \frac{d \bar{\mathbf{K}}_{i,j}}{d \bar{\mathbf{N}}_i} \mathbf{\bar{d}}_j \Delta \bar{\mathbf{N}}_i \quad (12)$$

式(11)から、 $\Delta \bar{\mathbf{N}}_i$ の増分は、

$$\Delta \bar{\mathbf{N}}_i = \bar{\mathbf{K}}_{i,j} \Delta \mathbf{\bar{d}}_j \quad (13)$$

となり、これを式(12)に代入すると接線剛性方程式が次のように得られる。

$$\Delta \mathbf{F}_i = (\bar{\mathbf{K}}_{i,j} + \frac{d \bar{\mathbf{K}}_{i,k}}{d \bar{\mathbf{N}}_i} \mathbf{\bar{d}}_k \bar{\mathbf{K}}_{i,j}) \Delta \mathbf{\bar{d}}_j \quad (14)$$

剛性マトリックス $\bar{\mathbf{K}}_{i,j}$ の対称性を考慮すると、式(14)の接線剛性マトリックスが対称となるためには、式(14)の中の $(d \bar{\mathbf{K}}_{i,k} / d \bar{\mathbf{N}}_i) \mathbf{\bar{d}}_k \bar{\mathbf{K}}_{i,j}$ が (i, j) に対して対称とならなければならない。しかしながら、 $(d \bar{\mathbf{K}}_{i,k} / d \bar{\mathbf{N}}_i) \mathbf{\bar{d}}_k \bar{\mathbf{K}}_{i,j}$ は以下に示すように非対称となり接線剛性マトリックスは、 $\mathbf{\bar{d}}_k$ すなわち、座屈前の変形を無視しなければ対称となることがわかる。

$$\left[\frac{d \bar{\mathbf{K}}_{i,k}}{d \bar{\mathbf{N}}_i} \mathbf{\bar{d}}_k \bar{\mathbf{K}}_{i,j} \right] = \frac{A L^2}{I} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{F_1}{S_1} & 0 & 0 \\ \frac{F_1}{S_1} & 0 & 0 & -\frac{F_2}{S_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{S_1} & 0 & 0 & -\frac{F_2}{S_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 12(d\phi_1/d\bar{\mathbf{N}}_i)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) + 6(d\phi_2/d\bar{\mathbf{N}}_i)(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \xi_2 = 6(d\phi_2/d\bar{\mathbf{N}}_i)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) + 4(d\phi_3/d\bar{\mathbf{N}}_i)\alpha_1 + 2(d\phi_4/d\bar{\mathbf{N}}_i)\alpha_2 \\ \xi_3 &= 6(d\phi_2/d\bar{\mathbf{N}}_i)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) + 2(d\phi_4/d\bar{\mathbf{N}}_i)\alpha_1 + 4(d\phi_3/d\bar{\mathbf{N}}_i)\alpha_2 \end{aligned} \quad (16a \sim c)$$

先に述べたように、Chwalla, Mansur, Lu, 林等による従来の手法に対応する接線剛性方程式は、式(14)の軸剛性EAを無限大にした場合に相当し、この事実は後のLuの数値計算結果との比較において確認されるところである。

4. 非線形座屈解析

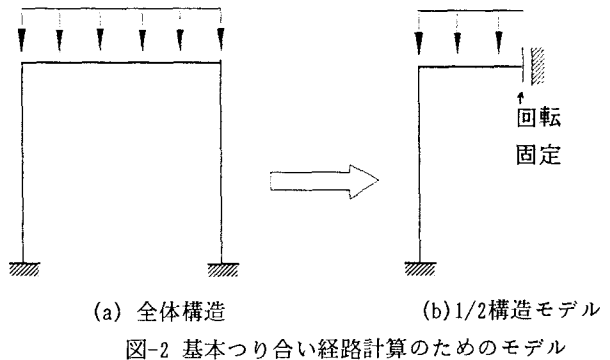
構造物の弾性座屈特性は、分岐点や極限点等の臨界点の存在と密接に関係している。このような臨界点の存在は、構造物に関する接線剛性マトリックスのデターミナントが零の条件によって知ることができる。構造物の接線剛性方程式は、部材に関する接線剛性方程式(7)あるいは式(14)を通常の剛性マトリックス法同様、構造物について重ね合わせるにより形成される。このようにして得られた全体構造物に関する接線剛性方程式が次の形で表されるとする。

$$\Delta \mathbf{F}_i = \Delta \mathbf{K}^*_{i,j} \Delta \mathbf{u}_j \quad (17)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{F}_i$ と $\Delta \mathbf{u}_j$ は全体座標系に関して定義される等価節点力を含む節点外力及び節点変位成分の増分量である。 $\Delta \mathbf{K}^*_{i,j}$ は、全体構造物に関する接線剛性方程式で、部材接線剛性方程式としてBowlingの影響を考慮した式(7)を用いたとき i, j に関して対称に、またこれを無視した式(14)を用いたとき非対称となる。

この全体構造の接線剛性方程式を用いて臨界点を特定することになるが、 $\Delta \mathbf{K}^*_{i,j}$ は節点軸力ならびに、節点変位成分の関数であるので、 $|\Delta \mathbf{K}^*_{i,j}| = 0$ の条件で臨界点を知るには、このような物理量を臨界点で正確に評価することが必要である。臨界点の物理量を評価するのに、臨界点の変位が小さいということで微小変位理論が用いられる場合⁷⁾もあるが、スレンダーな骨組では、臨界点近傍の変位が大きくなる場合もあり、その非線形性が無視できる保証はない。特に座屈前の変形の影響を調べる場合は、この臨界点での物理量の評価が重要であり、ここでは、閉じた形の非線形剛性方程式(4)あるいは式(11)に基づき評価することにする。しかしながら、このような非線形剛性方程式を用いると臨界点では、全体の接線剛性マトリックスが特

異となり、通常の荷重制御による方法では、臨界点での物理量を精度良く求めることはできない。臨界点のうち極限点の特異性は、弧長増分法¹⁰⁾を用いれば除去できるが分岐点は本質的な特異点であるため、接線剛性のみを用いる方法では、一般にこれを除くことはできない。分岐点での特異性は、この点で2つ以上のつり合い経路が存在することに起因している。ここで問題とする矩形骨組の場合には、対称変形モードを生ずる基本経路と横移動変形モードを生ずる分岐経路が分岐点で交差している。したがって、矩形骨組の分岐点での特異性を除くためには、横移動変形モードが生じないように、言い替えば対称変形のみ生ずるように図-2のごとく骨組を拘束すれば良いことになる⁹⁾。このようにすれば対称変形が生ずる基本経路上の物理量は分岐点も含めすべて精度良く得られる。得られた物理量を全体構造の接線剛性マトリックスに代入することで分岐点を求めることができるが、ここでは、2分法を用い $|\Delta K^{-1}| = 0$ を満足する荷重として有効数字5桁まで正確に分岐荷重を計算した。



5. 従来の計算結果との比較

今回のBowlingの影響を考慮した矛盾のない非線形はり・柱の式による座屈解析とBowlingの影響を無視した線形化はり・柱の式による従来の解析結果とを比較し、従来の解析方法の適用限界等の問題点を明らかにする。まず、従来の解析手法によるLu⁹⁾の結果を検討し、次にこの解析法をさらに簡略化し、座屈前の変形を微小変位理論で評価する林⁷⁾の結果について考察する。

a) Lu⁹⁾の結果との比較

先にも述べたように、Luの解析手法は、Chwalla, Mansur et al.等による手法と同様で、Bowlingの影響を無視した線形化はり・柱の式を用い、さらに部材軸線の伸張変形を無視している。また座屈前の曲げ変形は線形化はり・柱の式により計算している。

Luが計算した構造としては、図-3に示すような脚ピン固定の門型骨組で、部材の曲げ剛性は骨組内で一様である。この骨組に対して、Luは3種類のスパン長と柱長の比 $L_b/L_c=1, 2, 3$ を考慮している。荷重としては、はり上に等分布した鉛直荷重と柱上に集中した鉛直荷重を同時に作用させ、この2種類の荷重比を数種類に固定し、それぞれの座屈荷重を計算している。

本検討では、荷重については上述の荷重条件で座屈前の変形が最も大きくなる場合ということで、はり上に等分布鉛直荷重のみが作用する場合を検討対象とする。Luの解析と同じレベルで比較し、Bowlingの影響をより明確にするために、Bowlingを考慮した本解析でもLuと同様軸線の伸張変形は無視する。本解析における部材軸線不伸張の場合はEAを無限大とした場合に相当するが、数値計算上EAを無限大とすることはできないので、EAに大きい値を代入していき、座屈荷重が有効桁数5桁まで収束した値をもって、軸線不伸張の値とした。この手法の妥当性は、Bowlingを無視した式(11)と式(14)を用いた場合、上記と同様の手続きでLuの解析結果に収束することにより確認した。

門型骨組の座屈解析結果として、Bowlingを考慮した本解析による座屈値とこれを無視したLuの解析値を比較する形で表-1に示す。この表中には参考のため、座屈前の変形の影響を完全に無視した場合、すなわち集中荷重が柱上に作用する場合に相当する値も記入している。今回の構造ではいずれの座屈値も解析方法にかかわらず水平移動分岐座屈に対応している。表中の座屈荷重値は次のように無次元化した値で記入している。

$$\gamma = p_y L_b / (2EI_c / L^2) \quad (18)$$

なお、Luによる文献6)に示されている座屈値は正確でないため、ここでは、同じ文献で誘導されている特性方程式を用いて著者等が正確に計算し直した座屈値をLuの結果として示している。

表-1からわかるように、Bowingの影響を考慮したより統一性のある解析を行うと、Chwalla, Luが指摘したような座屈前の変形を考慮した座屈値が、これを無視した場合の座屈値より低下するという事実は必ずしも認められない。すなわち、Luの結果においては、座屈前の変形を考慮すると、これを無視した場合に比べ L_b/L_c が大きな値ほど座屈荷重がより低下する傾向を示す。一方、Bowingを考慮すると、 L_b/L_c が最も大きい3の場合には、座屈値は座屈前の変形を無視した場合を上回り、 L_b/L_c が最小である1の場合には、Luの結果よりさらに低下するという全く異なった傾向を示す。

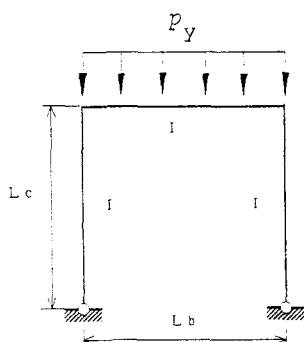


図-3 Luの計算モデル

表-1 脚ピン固定門型骨組の座屈荷重(γ)の比較

$\frac{L_b}{L_c}$	本解析	Lu	柱上に集中荷重が作用する場合
1	1.761	1.781	1.821
2	1.394	1.387	1.422
3	1.165	1.094	1.160

b) 林⁷⁾の結果との比較

林の結果は基本的にChwalla, Mansur, Lu等の手法と同様であるが、座屈前の変形を微小変位理論で計算するという点において近似、簡略化がなされている。ここでは、林が行った計算のうち、図-4に示す門型骨組の結果について検討する。この場合も、部材軸線の伸張は無視されており、本解析ではa)に説明した方法で対処する。

門型骨組としては、脚完全固定と脚ピン固定の2種類の構造を扱っており、支配構造パラメータである

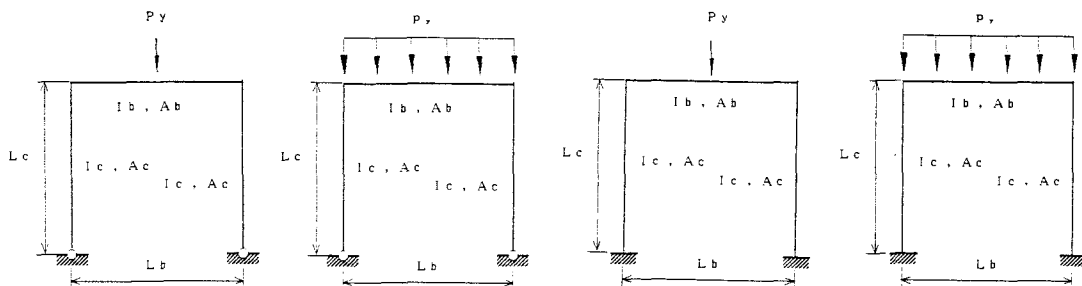
$$k = \frac{l_b}{l_c} \cdot \frac{L_c}{L_b}, \quad \ell = \frac{L_b}{L_c} \quad (19a \sim b)$$

については、それぞれ5種類と3種類の数値を与え、これらの全組み合わせを考慮している。鉛直荷重としては、初期曲げモーメントによる変形の影響が最も大きく現れるはり中央に集中荷重Pyが作用する場合と、Luと同様はりに上に等分布荷重pyが作用する場合について扱っている。

このような構造に対して、Bowingの影響を考慮した本解析手法を適用した結果を林の結果と比較する形で表-2には脚がピン固定の場合を、また、表-3には脚が完全固定の場合をそれぞれまとめている。これらの表には表-1と同様、座屈前の曲げ変形が生じない柱上のみに集中荷重が作用する場合の座屈値を参考として記入しているが、このときの支配パラメータはkのみである。表中の座屈荷重値ははりに上の分布荷重の場合は式(18)により、また、集中荷重の場合は次式で無次元化した値を記入している。

$$\gamma = P_y / (2EI_c / L^2) \quad (20)$$

なお、林の計算結果は、座屈設計ガイドライン¹¹⁾(表11.8)にも示されているが、同ガイドラインでは、有効長さ係数を用いて整理されている。したがって、表-2, 3においては、これと比較対照できるように、座屈設計ガイドラインに示されている構造パラメータに対応するものについては、さらに、()内に有効長さ係数についても記入した。



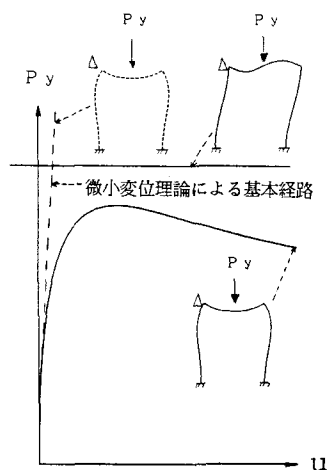
①はり中央集中荷重 ②はり上等分布荷重 ①はり中央集中荷重 ②はり上等分布荷重
(a)脚ピン固定門型骨組 (b)脚完全固定門型骨組

図-4 解析対象

表-2より脚ピン固定の門型骨組について考察する。この場合いずれも座屈荷重は、水平移動分岐荷重に対応する。 L_u との比較において見られたのと同様、この場合もBowlingの影響を考慮すると $\ell = L_b/L_c$ が大きくなる($1/\ell$ が小さくなる)につれて座屈荷重が上昇し、これを無視すると減少するという逆の傾向を示している。特に集中荷重がはり中央に作用する場合、 $1/\ell \leq 0.5, k \leq 0.5$ ではBowlingの効果を考慮した場合の座屈荷重は初期曲げ変形を全く無視した場合のものに比べて大きくなる。しかしながら、検討されているパラメータの範囲ではBowlingの影響の考慮の有無による座屈荷重値の差は1割以内である。

次に、脚完全固定の場合を表-3より考察する。この場合、表-2と異なり、解析においてBowlingを考慮するか否かによって座屈挙動は大きく異なってくる。林の計算結果によるといずれも水平移動分岐座屈荷重が求められているが、本解析によれば $k, 1/\ell$ 組み合わせにより3種類の非線形挙動が現れる。すなわち、 $k, 1/\ell$ の大きい領域では林の結果と同様水平移動分岐座屈で、 $k, 1/\ell$ が小さくなるにつれて、対称変形のまま生ずる屈服座屈に移行する。 $k, 1/\ell$ がさらに小さくなると座屈現象は生じず、単調増加挙動を示し座屈荷重は求められない。したがって、当然ながら本解析で水平移動分岐座屈を生じない屈服の場合の座屈値は林の値とかなり異なっている。このように林の解析結果が本解析結果と異なり水平移動分岐座屈が常に求められた原因は次のように説明することができる。

図-5に示すつり合い経路の概念図をもとにすると、屈服座屈の発生は非対称変形を生ずる経路に到達する以前に対称変形を生ずる基本経路において極限点が現れ、分岐経路と交差しないことに起因している。この場合、林のように微小変位理論を用いて座屈前の変形を解析することは、基本経路を図-5の破線で示した線形と仮定することに相当する。したがって、基本経路上には極限点は存在せず、必ず非対称変形を生ずる経路と交差し分岐座屈が求められることになる。なお、屈服座屈現象はChwalla, Mansur et al.やLuのようにBowlingの影響を無視した線形化はり・柱の式を用いても、座屈前の変形評価にも同じ式を用いれば解析値の精度の点は別として、一応解析できる。一方、本解析で現れた単調増加の現象は、はり・柱理論の枠内では、Bowlingの影響を考慮した解析法に特徴的なもので、ここで扱った他の解析法では出現しない。以上のような門型骨組における各種非線形挙動の発生については次節で詳細に検討する。



Δ : 水平変位 u を示した節点

図-5 つり合い経路の概念図

表-2 脚ピン固定門型骨組の座屈荷重 (γ)

(a) はりスパン中央集中荷重

	k	0.1	0.2	0.5	1	2	10
1/ℓ	①	0.497(4.456)	0.842	1.422	1.821(2.328)	2.104	2.387(2.003)
0.5	林	0.465(4.608)	0.801	1.372	1.763(2.366)	2.045	2.360(2.045)
	本解析	0.511(4.396)	0.872	1.429	1.778(2.356)	2.032	2.345(2.051)
1	林	0.488(4.498)	0.827	1.388	1.769(2.362)	2.047	2.360(2.045)
	本解析	0.495(4.464)	0.834	1.377	1.739(2.383)	2.009	2.343(2.052)
2	林	0.494(4.471)	0.834	1.392	1.771(2.361)	2.047	2.360(2.045)
	本解析	0.495(4.468)	0.830	1.369	1.731(2.388)	2.004	2.342(2.053)

(b) はり上等分布荷重

	k	0.1	0.2	0.5	1	2	10
1/ℓ	①	0.497	0.842	1.422	1.821	2.104	2.387
0.5	林	0.475	0.814	1.388	1.782	2.064	2.369
	本解析	0.484	0.827	1.394	1.772	2.045	2.358
1	林	0.491	0.832	1.399	1.786	2.065	2.369
	本解析	0.492	0.832	1.386	1.761	2.037	2.357
2	林	0.495	0.836	1.401	1.787	2.065	2.369
	本解析	0.495	0.833	1.385	1.759	2.035	2.357

注) 座屈形式はすべて水平移動分岐である ①: 柱上に集中荷重が作用する場合
() は有効長さ係数(座屈設計ガイドラインに示されているパラメータに対してのみ記入)

表-3 脚完全固定門型骨組の座屈荷重 (γ)

(a) はりスパン中央集中荷重

	k	0.1	0.2	0.5	1	2	10
1/ℓ	①	3.534(1.671)	4.375	6.030	7.379 (1.157)	8.434	9.549(1.017)
0.5	林	2.589(1.953)	3.570	5.617	7.359 (1.158)	8.591	9.635(1.012)
	本解析	— (—)	—	—	4.048*(1.562)	7.147*	9.500(1.019)
1	林	3.355(1.715)	4.259	6.089	7.567 (1.142)	8.647	9.636(1.012)
	本解析	— (—)	3.367*	6.273*	8.015 (1.046)	8.469	9.412(1.024)
2	林	3.525(1.673)	4.418	6.195	7.614 (1.139)	8.660	9.636(1.012)
	本解析	3.842(1.603)	4.648	6.244	7.387 (1.156)	8.252	9.392(1.025)

(b) はり上等分布荷重

	k	0.1	0.2	0.5	1	2	10
1/ℓ	①	3.534	4.375	6.030	7.379	8.434	9.549
0.5	林	2.933	3.866	5.783	7.377	8.540	9.606
	本解析	—	—	3.357*	5.467*	9.418*	9.484
1	林	3.420	4.303	6.073	7.505	8.576	9.607
	本解析	3.071*	4.764	6.295	7.487	8.369	9.450
2	林	3.529	4.404	6.140	7.535	8.584	9.607
	本解析	3.600	4.467	6.118	7.356	8.296	9.441

注) 座屈形式等は、—: 単調増加, *: 屈服, 無印: 分岐である ①: 柱上に集中荷重が作用した場合
() は有効長さ係数(座屈設計ガイドラインに示されているパラメータに対してのみ記入)

6. 座屈前に曲げ変形を生ずる門型骨組の座屈挙動

前節で、座屈前に曲げ変形を生ずる門型骨組では、構造パラメータの組み合わせにより、分岐座屈、屈服座屈、及び単調増加の3種類の非線形挙動が現れることを示した。ここでは、このような3種類の非線形挙動が生ずる領域を構造パラメータについて明らかにする。座屈解析では、Bowingの影響を考慮した部材剛性方程式(4)と部材接線剛性方程式(7)を用いるが、比較のため、Bowingを無視した式(11)と式(14)によっても座屈解析を行い得られる領域の差異についても考察した。

解析対象としては前節で扱った図-4の門型骨組である。なお、今回の解析ではより一般性を持たせるためいずれの解析法でも軸線伸張を考慮する。本解析では、軸線の伸張も考慮するので図-4で用いた構造についての支配パラメータは最大限次のようになる。

$$k = \frac{l_b}{l_c} \cdot \frac{L_c}{L_b}, \quad \ell = \frac{L_b}{L_c}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{A_b}{A_c}, \quad \lambda_c = \frac{L_c}{\sqrt{I_c/A_c}}, \quad \tilde{c} = \frac{l_c}{A_c^2} \quad (21a \sim e)$$

k, ℓ は前節で示したパラメータであり、 $\tilde{\alpha}, \lambda_c, \tilde{c}$ は軸線伸張変形を考慮することで新たに考えるものである。式(19)に示したパラメータの値として、一般的な門型骨組を対象とした考察から、次の範囲のものを扱う。

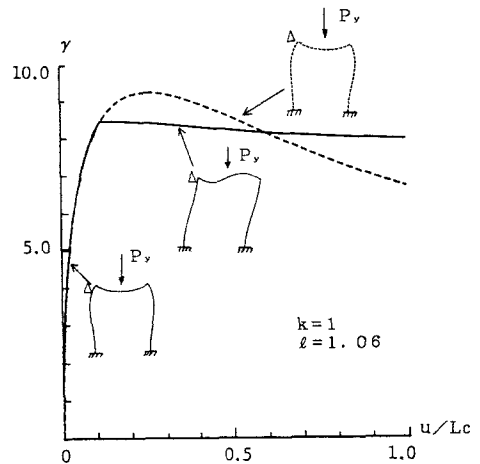
$$0.1 \leq k \leq 5, \quad 0.5 \leq \ell \leq 3, \quad 0.2 \leq \tilde{\alpha} \leq 3,$$

$$10 \leq \lambda_c \leq 130, \quad 0.3 \leq \tilde{c} \leq 6 \quad (22a \sim e)$$

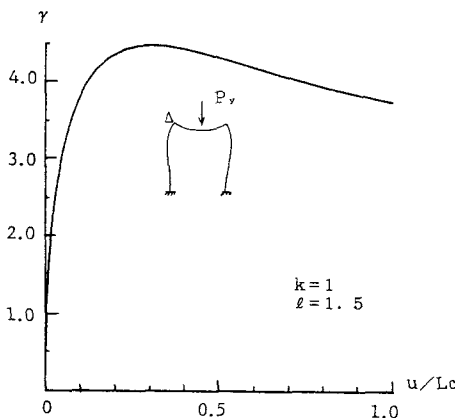
各パラメータの境界値で座屈解析を行った結果、式(18)、(20)に示す無次元化座屈荷重に及ぼす k, ℓ 以外のパラメータ $\tilde{\alpha}, \lambda_c, \tilde{c}$ の影響が小さいことが判明したので、ここでは、 $\tilde{\alpha}, \lambda_c, \tilde{c}$ の値をほぼ平均的なものとして次の値に固定し、 k, ℓ のみ変化させて検討する。

$$\tilde{\alpha} = 1, \quad \lambda_c = 40, \quad \tilde{c} = 2.5 \quad (23a \sim c)$$

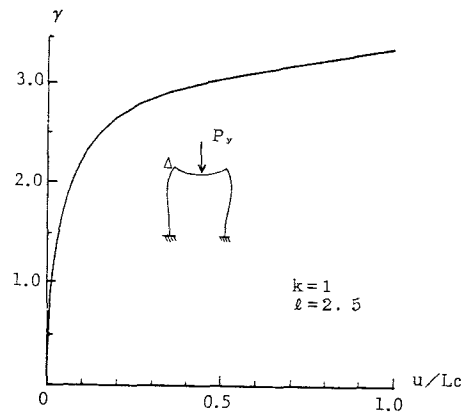
座屈解析の結果得られる骨組の挙動は、前節に述べたような3種類の挙動に分類されるが、これらの挙動を脚完全固定の門型骨組のより中央に集中荷重が作用したときのつり合い経路を例として示すと図-6(a)~(c)のようになる。



(a) 分岐座屈



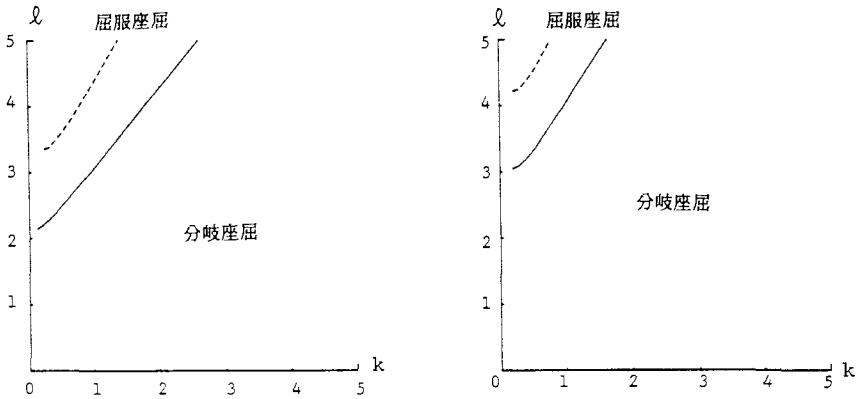
(b) 屈服座屈



(c) 単調増加

図-6 脚完全剛結門型骨組の非線形つり合い経路 (△: 水平変位 u を示した節点)

図-6(a), (b)は座屈挙動を示しており、それぞれ分岐座屈と屈服座屈に対応し、また図-6(c)は座屈挙動を示さず単調増加となる場合である。このような3種類の挙動が生ずる領域を図4に示す各構造について主要なパラメータ k , ℓ に関して示すと図-7(a), (b)、図-8(a), (b)のようになる。この図の中には、Bowlingの効果を無視した結果を破線で図示している。

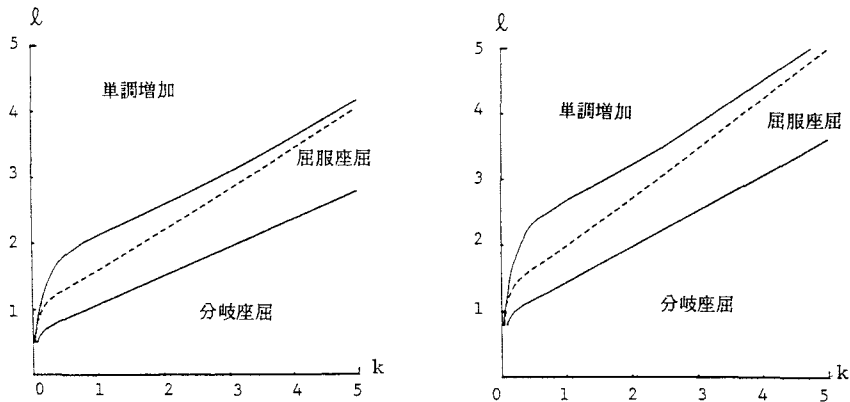


(a) はりスパン中央集中荷重

(b) はり上等分布荷重

- - -:Bowlingの影響を無視した場合の分岐座屈と屈服座屈の境界

図-7 脚ピン固定門型骨組の座屈挙動



(a) はりスパン中央集中荷重

(b) はり上等分布荷重

- - -:Bowlingの影響を無視した場合の分岐座屈と屈服座屈の境界

図-8 脚完全固定門型骨組の座屈挙動

図-7, 8よりパラメータ k , ℓ の図示した範囲では、荷重条件によらず脚完全固定の門型骨組ではすべて図-6(a)~(c)に示す3種類の挙動を示すが、脚ピンの場合には分岐座屈と屈服座屈のみを示す。いずれもパラメータ ℓ が大きいほど、また k が小さいほど屈服座屈は生じやすいが、これがさらに極端になると脚固定の場合、屈服座屈が生じず単調増加状態となる。なお、以上の傾向は座屈前の曲げ変形が最も大きいはり上に集中荷重が作用する場合に顕著になる。

Bowlingを無視した場合には、これを考慮した場合とかなり異なり、いずれも分岐座屈と屈服座屈現象のみを示し、単調増加現象は現れない。また分岐座屈現象と屈服座屈現象の境界もBowlingを考慮した場合に比べ上の方に大きくずれており、パラメータ ℓ の値が大きい場合、また k が小さい場合、Bowlingを無視した解析法の精度に問題が生ずる可能性がある。

弾性座屈荷重は、実用的には設計における有効座屈長の評価に使用される。現行の有効座屈長¹²⁾は、

Bowingの影響を無視した線形化はり・柱の式を用い、座屈前の曲げ変形を完全に無視する近似的な方法で算定されており、本節で扱った門型骨組ではすべて水平移動座屈荷重によって決まる。したがって、図-7(a), (b)、図-8(a), (b)において屈服座屈あるいは単調増加が生ずる領域では、従来の有効座屈長の精度は疑わしい。当然ながら、有効座屈長は、材料の非弾性の影響を考慮して議論するのがより厳密であるが、弾性座屈値に基づいて評価する現行の設計法¹²⁾では弾性座屈挙動と矛盾のない有効座屈長を設定するのが少なくとも妥当といえよう。この意味から、従来の算定法の適用限界には十分配慮する必要がある。とくに、都市内高架橋の鋼製ラーメン橋脚では $l=1\sim 5$, $k=0.3\sim 2$ 程度で施工されるのが大半で¹³⁾、構造パラメータの範囲は、水平移動座屈以外の非線形挙動を示す領域に明らかに及んでおり、注意が必要であろう。

7. まとめ

座屈前の曲げ変形の影響を考慮した平面骨組の座屈解析をはり・柱理論の枠内で統一のとれた形でしかも精度良く行う方法を提示し、この手法を用い、初期曲げモーメントを受ける門型骨組の座屈特性を明らかにした。

ここで提示する解析手法は、Chwallaに始まる従来の手法と異なり、軸歪の評価にBowingの影響を含めているため、座屈前の変形を考慮する場合も接線剛性マトリックスは対称となり弾性体における停留ポテンシャルエネルギーの原理を満足している。さらに、本手法はべき級数表現の閉じた解に基づく剛性方程式、接線剛性方程式を用いることから、三角関数、双曲線関数からなる安定関数を用いた場合に生ずる軸力の正負による表現の変化ならびに軸力が微小な場合の数値計算上の特異性が全く現れず常に安定した精度の良い計算が可能となる。

このような解析手法を用い、門型骨組の座屈における初期曲げ変形の影響を詳細に検討した結果、初期曲げを受ける門型骨組の非線形挙動は、構造物の支配パラメータにより水平移動分岐座屈、屈服座屈、単調増加の3種類の挙動に分類されることが判明した。また、実際的な門型骨組においてこれらが生ずる領域を構造パラメータに関して明らかにした。なお、Chwalla, Mansur et al., Lu等によるBowingを無視した手法では、水平移動分岐座屈、屈服座屈しか現れず、またこれが発生する構造パラメータ領域も、Bowingを考慮した場合とはかなり異なっている。座屈前の変形を微小変位理論で計算する林の手法や座屈前の変形を完全に無視する場合は、さらに近似が導入されているため、いずれも水平移動分岐座屈として座屈値が求まるだけである。

門型骨組の座屈現象として最も一般的な水平移動座屈荷重値については、Bowingの影響を無視した従来の解析法によると、座屈前の曲げ変形を考慮するとこれを無視した場合に比べ座屈荷重は必ず低下し、この傾向は、柱の高さに比べスパン長が大きいほど顕著になる。しかしながら、Bowingを考慮した本解析手法によれば、このような傾向は必ずしも認められず、逆に柱高さに比べスパン長が大きくなると、座屈前の変形を無視した場合よりも座屈荷重が上昇することもあり得る。

以上のように、Bowingの影響を座屈解析に考慮するか否かにより、実用的な門型骨組においても、構造パラメータの範囲によってはその座屈特性が著しく異なる可能性がある。このようなとき、Bowingを考慮した場合のほうがより実状に即していることを考えると、Bowingの影響を無視した従来の解析結果は座屈前の曲げ変形の考慮の有無によらず実際の座屈挙動を正確に表現していない可能性があり、その適用範囲には注意する必要があるといえる。特に、都市内高架橋の鋼製ラーメン橋脚では、その構造パラメータの領域が、Bowingを無視した従来の座屈解析の適用範囲外に及んでおり、このような領域での慣用法に基づく有効座屈長の精度は疑わしい。

なお、ここでは慣用の座屈解析の改良を最低限にとどめ、さらに、離散化による近似が入ることを避けるため、Bowingを考慮したはり・柱の式の枠内で座屈特性の検討を行っている。従って、座屈前の変位が極端

に大きくなる領域では、明らかにはり・柱の式の精度が低下する。この点を検討するために、著者らは、有限ひずみ・有限変位の解に収束する剛体変位除去の手法¹⁴⁾を用いて、初期変位が大きくなる図-7(a), 図-8(a)の場合を解析してみた¹⁵⁾。その結果、図示の構造パラメータの範囲では、非線形挙動の分類及び、その境界の形状について、定性的には本報告と同様なものが得られた。しかしながら、定量的には構造によってBowlingを考慮したはり・柱理論レベルでも必ずしも十分ではなく、さらに高次の有限変位解析が必要な場合もあることを示唆した結果を得た。このような、より厳密な有限変位解析に基づく詳細な結果については、別の機会に発表したい。

参考文献

- 1) Bleich, F.: "Buckling strength of metal structures", McGraw-Hill, New York, 1952.
- 2) Chwalla, E.: "Die stabilität lotrecht belasteter rechteckrahmen", Der Bauingenier, 19, pp69-75, 1938.
- 3) Brinsteel, C and Iffland, J.S.B: "Factors influencing frame stability", J.struct. Div., ASCE, 106(2), pp.491-504, 1980.
- 4) Korn, A: "Effect of bowing on rectangular plane frames", J. Struct. Div, ASCE, 107(3), pp569-574, 1981.
- 5) Mansur, E.F., Chang, I.C., and Donnell, L.H.: "Stability of frames in the presence of primary bending moments", J. Engrg. Mec. Div., ASCE, 87(4), pp19-34, 1961.
- 6) Lu, Le-Wu: "Stability of frames under primary bending moments" J. Struct. Div., ASCE, 89(3), pp35-62, 1963.
- 7) 林 正: 曲げ荷重を受けるラーメンの座屈解析、構造工学論文集、Vol.32A, pp443-457, 1986, 3.
- 8) Goto, Y. and Chen, W.F.: "Second order elastic analysis for frame design", J. Struct. Div., ASCE, 113. (7), pp.1501-1519, 1987.
- 9) 後藤芳顯, 鈴木五月, 松浦 聖: はりと柱の結合部の非弾性挙動を考慮した半剛結骨組の臨界挙動の解析、土木学会論文集第401/I-12, pp.287-296, 1989.
- 10) Riks, E.: "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", Int. J. Solids Structures, 15, pp.529-551, 1979.
- 11) 土木学会: 座屈設計ガイドライン, pp.275-276, 1987
- 12) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説、昭和55年
- 13) 中井博、河井章好、吉川紀、北田俊行、酒造敏廣: 鋼製ラーメン橋脚の実績調査(上)、橋梁と基礎、Vol.16, No.6, pp.35~40, 1982
- 14) 後藤芳顯, 春日井俊博、西野文雄: 局所移動座標の選択が平面骨組の有限変位解析の精度に及ぼす影響、土木学会論文集第386号/I-8, pp.311-320, 1987
- 15) 河本康秀、鈴木五月、後藤芳顯、松浦 聖: 初期曲げモーメントが門型骨組の座屈特性に及ぼす影響、平成元年度中部支部研究発表会概要集, 1990

(1989年10月2日受付)