

杭頭結合部の安全性評価方法に関する一考察 (要素の降伏に着目した安全性評価方法)

A Consideration on Safety Evaluation of Pile Head Joint

- Evaluation by the yielding potential of each element -

近田康夫*、小堀為雄**

By Yasuo CHIKATA* and Tameo KOBORI**

In this paper, a trial was made for the safety evaluation of pile head joint by using finite element technics. First, finite element analyses were made under given conditions. In the finite element analyses, a pile head joint was modeled as an axisymmetric body under non axisymmetric loading, and the semi-analytical technic was adopted. Secondary, safety check was made on element by element applying the theory of plasticity to the results of finite element analyses. The results of safety checks suggest that the safety check on pile is as important as that on footing concrete for the safety evaluation of a pile head joint.

1. はじめに

杭基礎における、杭とフーチングとの結合部(杭頭結合部)は、上部工から杭へ円滑に力を伝達する上で極めて重要な構造部位であるにも関わらず、その応力伝達機構や耐力には不明な点が多いとされ、主として実験的な手段を通じてその解明が試みられてきた。これらの諸研究によれば、杭頭結合部の応力伝達に最も寄与する因子として、杭周面とフーチングとの間の摩擦、中詰めコンクリートの深さなどが挙げられ、実設計にもその効果を取り入れつつある¹⁾。

さて、応力伝達機構と並んで、耐力評価あるいは安全性評価が杭頭結合部に関する重要関心事項であるが、現行の設計においては、フーチングコンクリートの応力や、杭頭補強鉄筋に着目した安全性評価を行うように規定している^{2), 3)}。しかし、杭頭結合部では、杭に着目すると、杭体の設計において考慮されていない端部効果を含めて局所的な力を受けることから、杭頭結合部の安全性評価の照査項目として、杭の安全性評価も必要と考えられる。しかし、杭頭結合部のような複雑な応力状態の下での安全性評価は、解析的な方法では困難であろう。

筆者らは、数値計算による方が、個々の因子の効果を的確に把握できると考え、有限要素解析を通じて従来の実験で指摘されている応力伝達への諸因子の効果をパラメトリックに検討してきた^{4), 5)}。本報告では、上記のような複雑な応力状態を把握し、杭も含めて杭頭結合部の安全性を検討する場合にも、有限要素法は有効と考え、一つの試みを行ったので報告するものである。

* 工修 金沢大学 助手 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野2-40-20)

** 工博 金沢大学 教授 工学部土木建設工学科 (同上)

2. 現行の杭頭結合部の安全性評価方法

杭頭結合部の有限要素解析およびその解析結果に基づいた安全性評価方法について述べる前に、現行の杭頭結合部の安全性評価方法を概説すると共に若干の考察を加える。

杭基礎設計便覧³⁾に規定されている杭頭結合部の安全性照査方法の概要は以下のようである。設計方法を、杭をフーチング内に杭径以上埋め込んでこの部分をもって杭頭作用モーメントに抵抗させる「方法A」と、杭をフーチング内に10cmだけ埋め込み、杭頭に設けた補強鉄筋の形成する鉄筋コンクリート部分で杭頭作用モーメントに抵抗させる「方法B」に大別し、杭種毎に2つの方法を規定しているが、基本になっているのは鋼管杭に対する設計方法および安全性照査方法である。方法A、方法Bに対して考えている応力伝達機構はFig.1 に示すとおりである。

杭基礎設計便覧における安全性照査方法は、Table 1 のようにまとめることができる。

Table 1 Safety check formula at pile head joint

Steel Pile (A-type)	PC or RC Pile (A-type)	
① $\sigma_{ov} = \frac{4(P-S)}{\pi D^2} \leq \sigma_{oa}$	① $\sigma_{ov} = \frac{P}{\pi(D-t')t'} \leq \sigma_{oa}$	σ_{ov} : Vertical bearing stress
② $\sigma_{oh} = \frac{H}{D\ell} - \frac{6M}{D\ell^2} \leq \sigma_{oa}$	② ←	σ_{oh} : Horizontal bearing stress σ_{os} : Vertical bearing stress at stopper on pile surface σ_{ok} : Strength of Concrete
③ $\tau_v = \frac{P-S}{\pi(D+h)h} \leq \tau_{as}$	③ $\tau_v = \frac{P}{\pi(D+h)h} \leq \tau_{as}$	σ_{oa} : Allowable bearing stress of concrete τ_v : Vertical punching shear stress
④ $S_t = P_t - S \leq S_{ta} = S_{tu}/f_s$ $S_{tu} = 0.6 \cdot f_H \quad (2.3M \leq \ell H)$ $= f \left(\frac{0.69M}{\ell} + \frac{0.13\ell H^2}{M} \right)$ $(2.3M > \ell H)$ $S_{tu} \leq 0.2D\ell\sigma_{ok}$	④ ←	τ_h : Horizontal punching shear stress τ_{as} : Allowable punching shear stress α : coefficient $\alpha=6$ P: Vertical push-in load P_t : Vertical pull-out load
⑤ $\sigma_{os} = \frac{P-S-S'}{\alpha n_1 \pi(D'-t)t} \leq \sigma_{oa}$	⑤ -	H: Horizontal load M: Moment load
⑥ $\tau_h = \frac{H}{h'(2\ell + D + 2h')} \leq \tau_{as}$	⑥ ←	D: Outer diameter of pile D': Inner diameter of pile h: Effective thickness of footing (τ_v) h': Effective thickness of footing (τ_h)
Steel Pile (B-type)	PC Pile (B-type)	
A-type ①③④⑥	A-type ①③⑥	
② $\sigma_{oh} = \frac{H}{D\ell} \leq \sigma_{oa}$	② ←	ℓ : Embedded length of pile head
Check on RC part	←	t: Thickness of stopper t': Thickness of pile

$S = n_2 \pi(D+t)\sigma_{oa}$, n_1 : Number of stopper on outer pile surface, n_2 : Number of stopper on inner pile surface, $S' = \pi(D-t')t'\sigma_{oa}$, S_t : Shear force on outer pile-footing interface by pull-out load
 S_{ta} : Allowable shear load on outer pile-footing surface, S_{tu} : Ultimate shear strength on outer pile-footing surface, $f_s=3$ (Ordinary), 2(Earthquake attack), $f=0.7$ (Steel pile), 0.6(PC or RC pile).

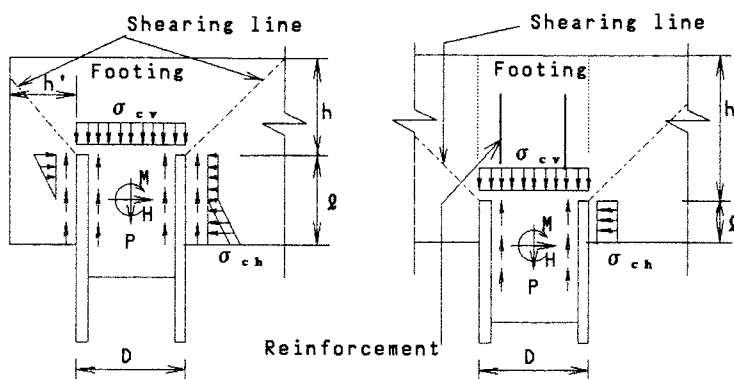


Fig.1 Modeled stress transformation mechanism³⁾.

Table 1 より、現行の安全性照査は、フーチングコンクリートの応力に着目していることがわかる（結合方法Bでは、補強鉄筋の形成する鉄筋コンクリート断面の照査が加わる）。しかし、前書きでも述べたように、結合部分での杭はかなり複雑な応力状態下であり、杭体の設計における端部効果を考慮しない安全性照査のみでは、不十分ではないかという疑問が生ずる。しかしながら、解析的に杭頭結合部での応力状態を求めることは、境界条件の複雑さを見ても難しいことが推察できる。そこで、有限要素法を用いて、杭頭結合部での応力状態を解析し、その結果を用いて、杭も含めた杭頭結合部全体の安全性の検討を試みる。その結果として、杭頭結合部において杭が十分に安全な状態にあれば、現行のフーチングコンクリート応力のみに着目した安全性照査方法の妥当性が確認できることになる。

3. 杭頭結合部の有限要素解析

杭頭結合部は形状的には軸対称体としてモデル化することが出来るが、荷重条件は一般的に軸対称条件を満足しないので、厳密には、3次元解析が必要となる。しかし、データ作成の煩雑さや計算機容量の制約などから、プログラムは多少複雑になるものの、フーリエ級数を利用した“半解析的手法”⁶⁾が用いられることが多い。ここでも、この半解析的手法を採用する。

半解析的手法では、平衡方程式はフーリエ級数の直交性により、フーリエ調和次数毎に分離され、結局、問題は、フーリエ次数毎のフーリエ振幅に関する連立1次方程式を解くことに帰着する。また、有限要素分割は、一子午面に関してのみ行えばよいことになる。手法の詳細に関しては、文献^{6)・7)}に譲ることとする。

作用荷重は、杭の張り出し部先端断面に0次と1次の2調和成分で表現して作用させる。しかし、境界面での応力解放後の応力分布を表現するにはより多くの調和成分を採用する必要がある、ここでは、予備計算による検討の結果から0～4次の5調和成分を採用している。計算過程においては、杭－フーチング境界面での剥離、滑動の発生による応力伝達機構の変化に着目するため、ジョイント要素のみが非線形挙動をするものとし、ソリッド要素は線形弾性体として取り扱っている。半解析的手法の杭頭結合部の解析への適用の妥当性は、黒正らが、実験結果との比較を通じて検証している⁸⁾。ただし、杭－フーチング境界面における挙動の取扱に関しては、本研究と異なる手法を採用している。

さらに、半解析的手法では、要素の物性値は円周方向に一定であることを要求されているので、一般のジョイント要素を用いた解析のように、剥離あるいは滑動の発生に対応して、ジョイント要素の接合剛性を減少させることは、できない。なぜならば、円周上の一部分のみの剛性を変化させることになり、先に述べた制約条件を満足しなくなるからである。したがって、ここでは、応力解放の方法として、初期剛性を変化させない応力伝達法(Stress transfer method)⁹⁾を用いることとした。

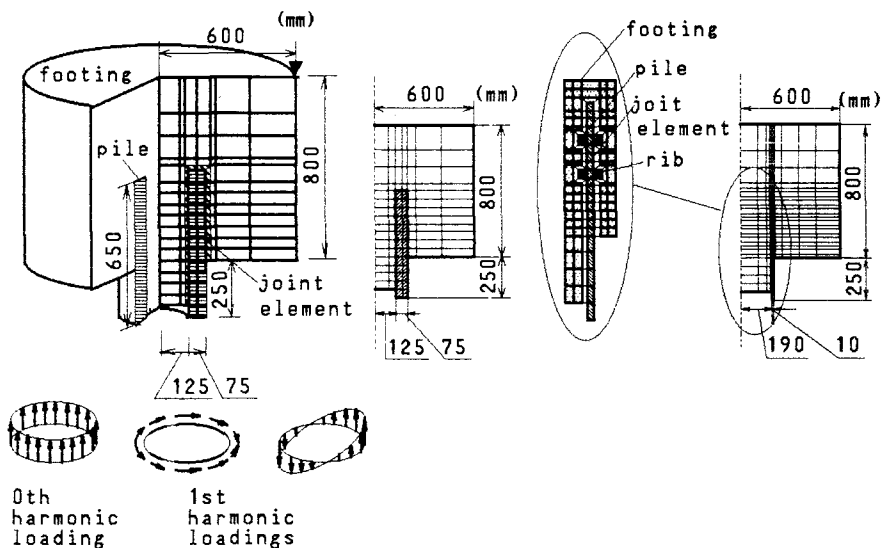


Fig.2 Pile head joint model and FEM mesh.

解析対象モデルは、杭基礎設計便覧におけるPC杭基礎の杭頭結合部設計方法に基づいたもので、Fig.2 にその概要を示す。Fig.2 に示す杭頭結合部は、結合方法Aと呼ばれるもので、杭を杭径分だけフーチング内に埋め込み、これをもって杭頭作用モーメントに抵抗させる方法である。この方法と現行道路橋示方書との相違は、杭内の中詰めコンクリートの深さが杭径の 1/2 だけ大きく設定されていることである。杭は、PC杭、鋼管杭を想定してる。杭、フーチングなどに与える諸物性値、荷重条件などの解析条件はTable 2 および Table 3に示すとおりである。

さらに、Fig.2 やTable 2 に示すように、ここでは、杭頭とフーチングの境界面における剥離、滑動を表現する

ために、軸対称ジョイント要素¹⁰⁾を用いている。この軸対称ジョイント要素は、Fig.3 に示すように、4 節点より構成され、その変形モードをフーリエ次数 $m = 1$ に対して図示すれば、Fig.4(a)-(d) のようである。

Fig.4(c) は剥離モード、(a), (d) は滑動モードである。また、ここでは、ジョイント要素の子午面内での回転を考慮しており、その変形モードが、Fig.4(b) である。

ジョイント要素の復元力特性としては、一般によく用いられる形式を採用した¹¹⁾。すなわち、Fig.5 に

Table 2 Properties for finite element analyses

	Footing	Pile*	Joint
E_c (MPa)	2.94×10^4	4.41×10^4	—
ν_c (—)	0.17	0.20	—
E_s (MPa)	—	2.06×10^5	—
ν_s (—)	—	0.30	—
C (MPa)	6.07×10^3	7.75×10^3	—
ϕ (°)	5.11×10^1	5.49×10^1	—
σ_y (MPa)	—	2.35×10^2	—
k_s (MPa/m)	—	—	7.5×10^5
k_n (MPa/m)	—	—	1.5×10^6
k_g (MPa/m)	—	—	7.5×10^5
C_j (MPa)	—	—	0.0
ϕ_j (°)	—	—	30

+ E_c , ν_c : PC pile, E_s , ν_s : Steel pile

+ C , ϕ : PC pile, σ_y : Steel pile

Table 3 Loading condition

Loading Case	H (MN)	V (MN)	M (MN·m)
LC-1C	1.10×10^{-1}	1.26×10^{-2}	8.00×10^{-2}
LC-2C	1.10×10^{-1}	0.00	8.00×10^{-2}
LC-1S	2.50×10^{-2}	2.27×10^{-1}	4.00×10^{-2}
LC-2S	2.50×10^{-2}	0.00	4.00×10^{-2}

LC-1C, 2C: for PC pile, LC-1S, 2S: for Steel pile

示すようにジョイント面垂直方向（剥離方向）には引っ張り強度を有せず、圧縮応力下では線形挙動を示すものとする。また、ジョイント面に平行な方向（滑動方向）には Mohr-Coulomb 型の降伏条件に従うものとする。すなわち、滑動方向のせん断応力 τ の絶対値が降伏値の絶対値 $|\tau_y|$ 以下の場合には弾性変形をし、これを越えた場合には超過分を解放する。なお、剥離が生じた場合には、一切の力を伝達しないことにする（ τ_y の定義式は Fig.5 中に示した）。ただし、Fig.5 中の C_j および ϕ_j はそれぞれ粘着力および内部摩擦角である。なお、ここでは、ジョイント要素の歪の定義は 2 つの回転面の相対変位として定義しており、[長さ] の次元を有している。この軸対称ジョイント要素の特性および応力解放手順に関しては文献^{5), 9)} を参照されたい。

解析結果の一部を示せば、Fig.6 の様である。Fig.6 は、 $\theta = 0, \pi$ 子午面における、フーチングコンクリート内の応力値を示したものであり、応力値は、杭-フーチング境界面に隣接する要素のガウス積分点における値を示している。比較のために、ジョイント要素を用いない場合の計算結果（境界面において付着が保たれている場合に相当する）を破線で、杭基礎設計便覧の

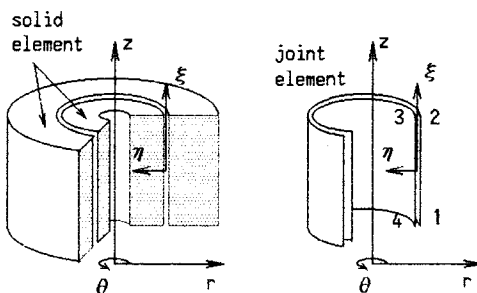


Fig.3 Axisymmetric joint element.

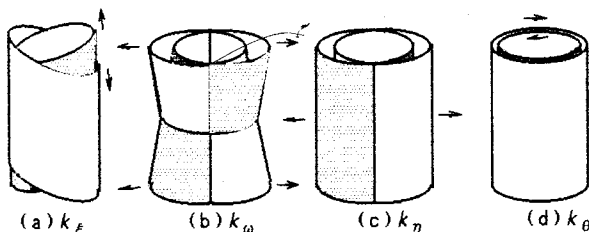
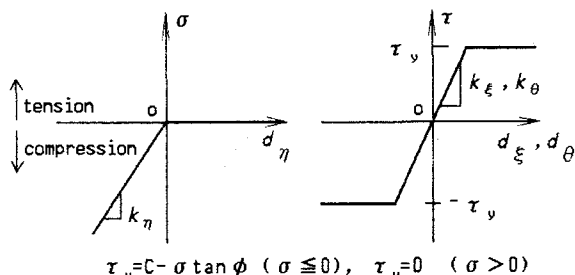


Fig.4 Schematic deformation modes of joint element.



$$\tau_y = C - \sigma \tan \phi \quad (\sigma \leq 0), \quad \tau_y = 0 \quad (\sigma > 0)$$

Fig.5 Constitutive relationship of joint element.

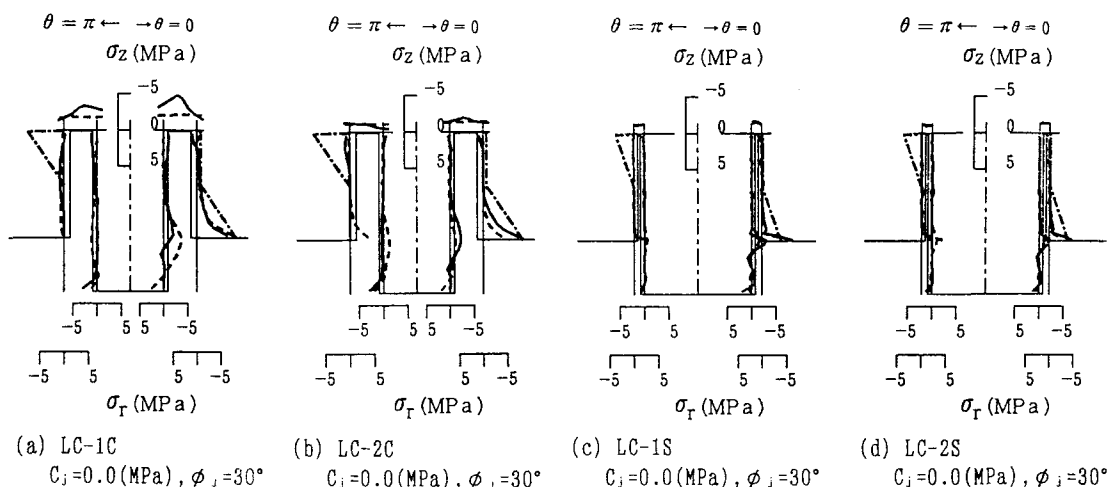


Fig.6 Stress distribution profiles in footing concrete.

— with joint ----- without joint ----- by ref.3)

安全性照査式による値（ σ_1 ）を一点鎖線で示している。杭周面のフーチング下面近傍に応力が集中している様子がよく分かる。杭の周面摩擦の大きさにより杭頭頂面の支圧応力の大きさは変化するが、最も大きな応力となるのは、フーチング下面近傍での水平支圧応力である。

現行示方書および、杭基礎設計便覧では、このフーチングコンクリートの水平支圧応力、杭頭頂面の鉛直支圧応力そして、杭の押し抜きせん断、補強鉄筋の形成する鉄筋コンクリート断面に対する安全性の評価を規定している^{2)、3)}。

種々の条件の下で有限要素解析を行った結果フーチング下面近傍での水平支圧応力が最大の応力（絶対値）となることから、これに着目した安全性評価が妥当であると考えられる。しかしながら、既述したように、以上の議論は、現行示方書および杭基礎設計便覧に倣って、フーチングコンクリートの応力に着目した安全性評価において、どの部位での応力を指標に取るのが妥当かという議論である。そこで、より合理的な安全性評価のためには、杭をも含んだ形で、杭頭結合部全体としての安全性評価が必要ではないかという観点から、次章に示すような一つの試みを行う。

4. 杭頭結合部の安全性評価に関する考察

前章まででは、フーチングコンクリートの支圧応力に着目して、杭頭結合部の安全性の評価方法を検討したが、本章では、杭に着目してみることにする。杭の安全性照査は、杭体の設計の一部として杭頭結合部の設計とは独立して行われるが、杭頭結合部では、応力伝達機構が複雑であり、応力集中が生じるため、その安全性の評価も杭体の設計とは別に「杭頭結合部における杭」として考える必要があると考えられる。

そこで、先に示した有限要素解析の結果に基づき、要素毎の降伏が生じているかどうか、降伏していなければさらにどの程度荷重を増せば降伏するのか、を検討することによって、杭も含めた杭頭結合部の安全性評価を試みる。以下にその手順を示す。

降伏条件としては、コンクリート材料および鋼材料に対してよく用いられるものを採用した^{12)、13)}。まず、杭や、フーチングなどのコンクリートは、Mohr-Coulombの降伏条件に従うものとし、鋼管杭などの鋼材は、Von-Misesの降伏条件に従うものとする。コンクリート材料に対する降伏条件の与え方はより厳密なものも提案されているが、ここでは弾塑性解析が目的ではなく、降伏の判定および降伏に至るまでの荷重の余裕を求めることが目的であるので、比較的簡単な形式をもつ降伏条件を設定した。

すなわち、コンクリート材料に対して

$$\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi) = 2C \cos \phi \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$C = \sigma_c / 2\sqrt{m} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\phi = \sin^{-1}\{(m-1)/(m+1)\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$m = \sigma_c / \sigma_t \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 σ_1 :最大主応力、 σ_3 :最小主応力、 σ_c :コンクリートの圧縮強度、 σ_t :コンクリートの引張強度
 数値解析では、Eqs.(2)～(4)の関係をを用いてTable 2 のように物性値を定めた。

一方、鋼材料に対しては、

$$\sqrt{3 \cdot J_2} = \sigma_y \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 J_2 は第2 偏差応力不変量、 σ_y :鋼材の降伏応力度である。

要素が降伏したかどうかを判定する手順は、各々の有限要素について、有限要素解析結果の応力値を用いて、コンクリート材料に対しては、

$$f_c = \sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi) \quad \dots\dots\dots(6)$$

鋼材料に対しては、

$$f_s = \sqrt{3 \cdot J_2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

を計算し、

$$R = 2C \cos \phi / f_c - 1 \quad (f_c > 0) \quad \text{or} \quad R = \sigma_c / \sigma_3 - 1 \quad (\sigma_3 < 0) \quad \text{or} \quad R = \sigma_t / \sigma_1 - 1 \quad (\sigma_1 > 0) \\ \text{(コンクリート材料)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

または、

$$R = \sigma_y / f_s - 1 \quad \text{(鋼材料)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

なる値 R をもって、その要素の降伏に至る余裕とする。 $R=0$ はその要素がちょうど降伏することを、 $R=1$ は荷重が100%増せば（すなわち2倍になれば）要素が降伏することを表す。 R は要素の降伏に至るポテンシャルと言うことが出来よう。すなわち、負のポテンシャルを持てば、その要素は降伏していることを意味する。 R の取り得る値の範囲は、 $[-1 < R < \infty]$ である。

このような指標を用いることにより、水平支圧応力あるいは鉛直支圧応力といった一方向の応力値に着目するのではなく、3次元応力場での降伏までのポテンシャルを評価することができる。このような方法は、有限要素法による弾塑性解析において、初期降伏荷重を決定する場合^{14)・15)}、あるいは、次の荷重ステップで一つだけ要素を降伏させるための増分を決定する場合¹⁵⁾に見られる。特に、後者は“r-min法”として広く知られている。

結果の一例をFig.7に、また、対応する変位図をFig.8示す。図では、各要素のガウス積分点（一子午面当たり4点）毎に R の値を評価し、その最小値を、 $\theta = 0$ および $\theta = \pi$ 子午面に関して表示している。回転軸中心近傍に危険な要素（ R の値が比較的小さな要素）が比較的多くみられるが、これは、回転軸近傍では解析精度が低くなり易いことに起因して、引っ張り応力が相対的に大きいことによると思われる。また、杭とフーチング境界面での応力解放の結果、解放しきれずに残った引張応力に起因して比較的低い R の値をとる要素も見られる（例えば、 $\theta = \pi$ 子午面の中詰めコンクリート）。従って、ここでは、応力集中の生じ易いフーチング下面近傍と杭頭頂部に着目して考察を行うことにする。

まず、PC杭に関する解析結果(Figs.7(a),(b))を見ると、図より明らかに、大きな支圧応力の生じるフーチングコンクリートの部位と同程度に杭も降伏することがわかる。なお、FEM解析では、杭にプレストレスを導入していないので、プレストレスを考慮するために、計算後の杭の応力値（ σ_z ）に $-9.8(\text{MPa}) [= -100 \text{ kgf/cm}^2]$ を加えている（C種PC杭相当：JIS A5335～A5337）。杭の降伏は、フーチング下面に一致するあたりで生じており、Figs.8(a),(b)に示す杭の変形の状態も併せて考慮すれば、杭に着目した杭頭結合部の安全性の評価が必要であることが示唆されているといえよう。軸力が作用している場合には（Fig.7(a)）フーチング下面近傍のみならず、杭頭頂面の支圧による降伏、フーチングが上方へ押し上げられることによる、フーチング上部での R 値の低下が見られる。

鋼管杭に関する解析結果(Figs.7(c),(d))を見ると、PC杭の場合と同様のことが言えるが、特に、杭のフーチング下面近傍での折れ曲がりが見られ（Figs.8(c),(d)）、この付近での座屈の検討が必要と思われる。しかしながら、杭自体の降伏はみられない。これは、杭を四辺形断面回転体要素としてモデル化していることの影響があるとも考えられ、シェル要素を用いたの検討が必要と考えられる。また、杭周面での摩擦の寄与を取り入れるための、ずれ止めに隣接するソリッド要素（フーチングコンクリート）も危険側となっており、局所的に大きな支圧応力が生じていることの影響が窺える。このことから、ずれ止めの形状を検討する必要があることが示唆されていると言える。

なお、鉄筋要素の R の値はかなり大きくソリッド要素に比較して、十分に安全側にある、という結果とな

った。

降伏条件として、比較的簡単な表式を有する Mohr-Coulombの降伏条件や Von-Misesの降伏条件を用いたが、もちろん、より複雑な表式によるものを用いることも可能である。しかし、むしろここに示した方法により、局所的な破壊の可能性が指摘できたことに意義があると言えよう。

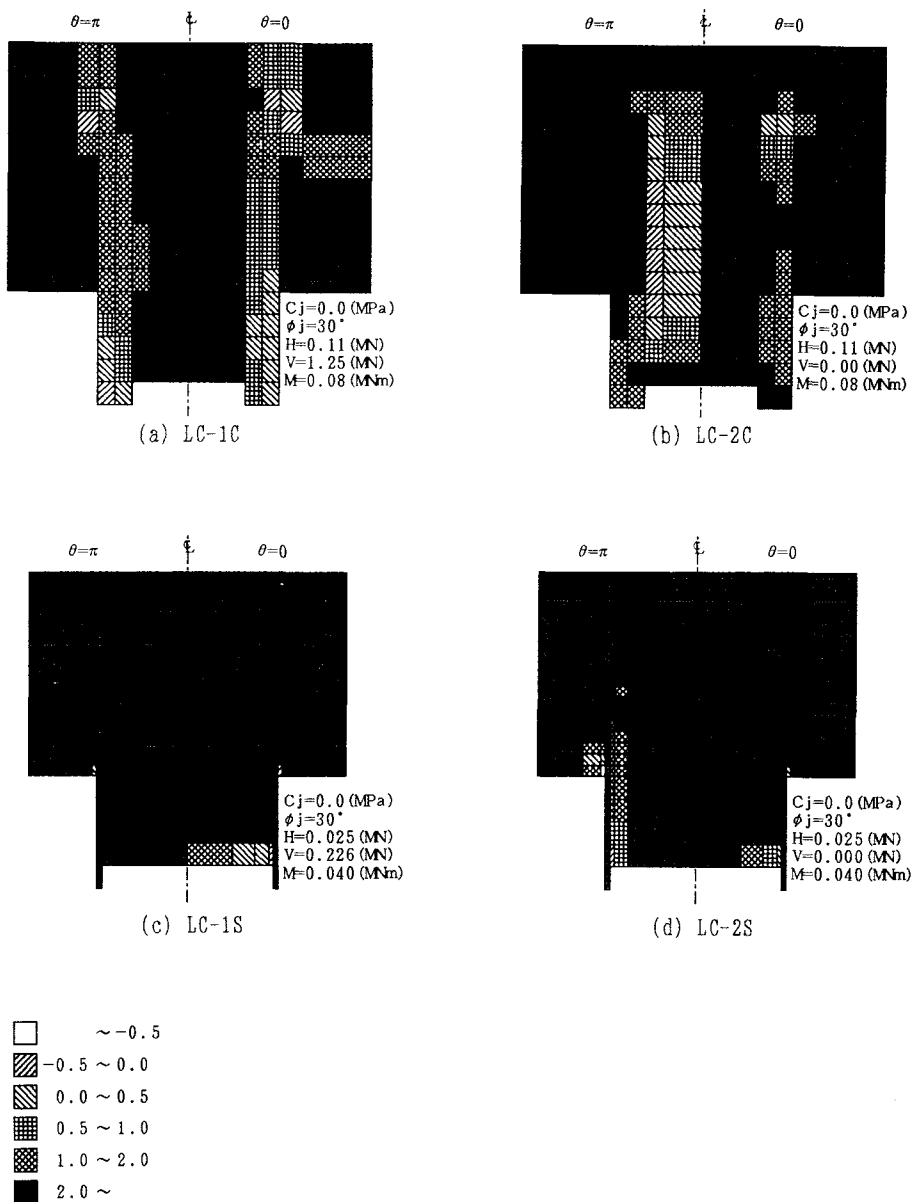


Fig.7 Yielding potential of each element.

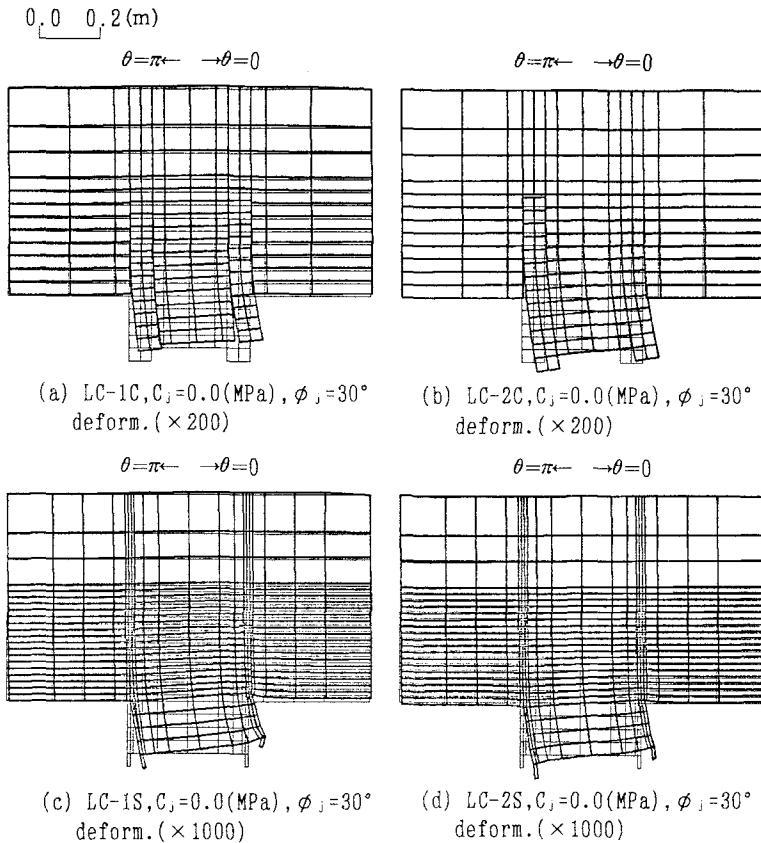


Fig.8 Deformation.

5. 結言

有限要素解析結果に基づいて、要素毎に降伏に至るまでのポテンシャルを計算し、杭頭結合部での降伏の可能性の高い部位の抽出を行い、安全性評価方法に関する考察を行った。

比較的簡単な、破壊条件を用いての評価結果ではあるが、現行設計で行われているフーチングコンクリートの応力に着目した安全性評価のみでなく杭頭結合部における杭の破壊の検討も必要であることが指摘できた。また、杭基礎設計便覧に新たに規定された鋼管杭に対するずれ止め近傍での応力集中により、フーチングコンクリートの降伏の可能性が比較的高いことが明かとなった。適用する降伏条件など、さらに検討すべき点があるものの、杭頭結合部全体としての安全性評価への一つのアプローチを示すことができたと考える。

謝辞

本研究における、数値計算および、計算結果の図形処理の一部において、田中恵一（現鹿島建設㈱）、中島正毅（本学大学院生）両君の協力を得た。記して感謝の意を表する。また、数値計算には、本学情報処理センター設置のFACOM-M760/10 システムを使用した。

参考文献

- 1) 大志万和也、福井次郎:新しい鋼管杭の杭頭結合方法、土木技術資料、27-1、 pp.33~39、1985.
- 2) 日本道路協会:道路橋示方書・同解説、下部構造編、丸善、1980.
- 3) 日本道路協会:杭基礎設計便覧、pp.276~299、丸善、1986.
- 4) 小堀為雄、近田康夫:杭基礎の杭頭結合部における応力分布について、土木学会論文集、No.356(I-3)、 pp.295~301、1985.
- 5) 小堀為雄、近田康夫:剥離、滑動を考慮した杭頭結合部の応力伝達について、土木学会論文集、No.374 (I-6)、 pp.583~592、1986.
- 6) Wilson, E.L.: Structural Analysis of Axi-symmetric Solids, J.A.I.A.A., Vol.3, pp.2269~2274, 1965.
- 7) Zienkiewicz, O.C. (吉識、山田監訳):マトリックス有限要素法 (3訂版)、pp.371~390、培風館、1984
- 8) 黒正他:水平力を受ける杭と基礎の結合部に関する研究、日本建築学会大会学術講演会梗概集、PP.2731~2738、1983.
- 9) Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. and King, I.P.: Stress analysis of rock as a 'no tension' material, Geotechnique, Vol.18, pp.56~66, 1968.
- 10) 近田康夫、田中恵一、小堀為雄:子午面内での回転を考慮した非軸対称荷重下の軸対称ジョイント要素、構造工学論文集、Vol.34A、pp.25~30、1988.
- 11) 例えば、土岐憲三、佐藤忠信、三浦房紀:強震時における地盤と構造物の間の剥離と滑動、土木学会論文報告集、No.302、pp.31~41、1980.
- 12) Zienkiewicz, O.C. 吉識、山田 監訳:マトリックス有限要素法 (3rd Ed.)、pp.495、培風館、1984.
- 13) Chen, W.F. 色部 他監訳:コンクリート構造物の塑性解析、pp.217~221、丸善、1985.
- 14) Owen, D.R.J. and Hinton, E.L.: Finite elements in plasticity -theory and practice-, pp.249~253, Pineridge Press Ltd., 1980.
- 15) 山田喜昭:塑性・粘弾性、pp.103~104、培風館、1980.

(1989年10月12日受付)