

損傷による材料非線形性を考慮に入れた 複合材料積層円筒構造の最小重量設計

MINIMUM WEIGHT DESIGN OF COMPOSITE CYLINDER IN TAKING ACCOUNT OF MATERIAL
NONLINEARITY INDUCED BY DAMAGE

安藤浩平*

By Kohei ANDO

A theoretical model for damage behaviour is proposed which predicts the nonlinear stress-strain relation and the final failure of a composite laminate. The method is based on the application of a modification of plastic flow rule and Prager's law, what we call here the damage flow rule. Moreover, minimum weight design for composite cylinder is carried out based on this model. The main object of our study is to show, in taking account of material nonlinearity of composite laminates, how the minimum weight of the composite cylinder differs from one where nonlinearity is disregarded.

1. まえがき

ここ数年来、航空宇宙工学の分野を中心として複合材料の設計に対する数々の成果^{1), 2)}が報告されている。ここで述べる複合材料とは樹脂、軽金属等のマトリックス相にガラスファイバー、カーボンファイバー等の繊維を分散させたものを指し、例えばその軽量性、材料特性の点で従来の均質等方性材料に比べ数々の長所を有している。構造材に複合材料を適応する場合、上記のマトリックス相と繊維により構成された基本的な単層を重ね合わせたラミネート (Laminate)、すなわち、積層板としこれによって柱、はり、パネルなどを構成することが多い。また、この場合、その力学的要求を満たす材料の設計変数は、繊維の方向や単層の板厚等、数多く存在し、その中で構造物の軽量性、または、経済性の最適状態を追求することは、通常最適設計などのような数値解析によって行われる。図-1に積層板の構造概要図を示す。

ところで、積層板の挙動において損傷と称される特殊な現象が存在することが一般に知られている³⁾この現象は積層板の破壊に関するものであり、通常の均質材料において一般に認められている概念では説明できないものである。特にその損傷モードの1種であるマトリックスクラッキングは、積層状態に強く依存する材料非線形性を誘因し、この意味では積層板は非線形材料として取り扱わなければならない。

従来、積層板の設計には2種類の概念が用いられてきた。第一の概念は積層板を構成する単層の内、いずれか一層にマトリックスクラッキングによる破壊が生じた場合を積層板全体の破壊とし、その時の荷重を

* 工博 五洋建設株式会社 土木本部土木設計部 (〒112 東京都文京区後楽2-2-8)

を設計耐力とするものである(First Failure Criterion)。これによれば、材料破壊を規定する設計拘束関数は設計変数に対して連続なため、容易に数値最適設計に適用することができる。一方、第二の設計概念によれば、ある単層に破壊が生じて、積層板全体にはまだ耐力があり、最終破壊が積層板に生じるまで載荷荷重を増加できるというものである。数値的にはこの概念は載荷荷重を増分として与え、破壊法則によりある単層に破壊が検知された場合、この単層の荷重負担を0とすることでこの破壊した単層を積層板から除き、全単層が破壊するまで増分荷重を与えるという手法によりなされる。この手法は上記の積層板の材料非線形性を与えるということでは、より現実的なものではあるが、実際には単層が破壊しても、その単層の荷重負担がなくなることではなく、単層の持つ破壊により低減された剛性の積層板への寄与は無視できないものである。また、数値最適設計においては、計算の途中で破壊した単層が積層板から除去されるため、設計変数の個数を変化せしめ、この手法に基づいて最適設計を行うことは非常に困難である。よって、積層板を最適設計法によって設計する場合には、その最終破壊材料強度が構成単層の材料強度よりも十分大きいことを知りながら第一の設計概念が用いられており、得られた設計は過大なものである可能性があった⁴⁾。

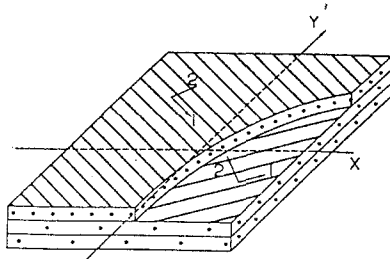


図-1 積層板構造概要図

以上のことを踏まえ、本研究では積層板の材料非線形性に対する新しいモデルを提唱し、それに基づき非線形数値計画法による最小重量設計を行う。ここで、対象とする構造物はフランス国立宇宙研究所で設計が行われた宇宙ロケットARIANE4内の压力容器に対する力学モデルである軸圧縮、及び内圧を受けるカーボン/エポキシ(T300/5208)積層円筒を取り上げる。また、本研究で得られた最小重量は従来のFirst Failure Criterionを用いて得られた最小重量と比較検討される。

2. 損傷流れ則に基づいた積層板の非線形構成則⁵⁾

2.1 損傷モードの分類

積層板の材料挙動を説明するものとして次の3種類からなる損傷モードの存在が報告されている³⁾

1) ファイバー ブレーキング (Fiber breaking)

この損傷モードは繊維主方向に大きな引張り応力が生じた時に発生するもので、繊維の切断として定義される。また、このモードは積層板の最終破壊と見なされる。

2) マトリックス クラッキング (Matrix cracking)

この損傷モードは比較的小さな応力下でマトリックス相内で頻繁に生じる。また、このモードは積層板の剛性、強度などの材料特性を変化させ、環境による影響を促進させる。従来の設計ではこのモードはファイバー ブレーキングと並び、積層板の主たる破壊強度を規定するものとされ積層板全体の破壊強度、もしくは、単層の完全な破壊を定義する便宜上の強度と見なされてきた。

3) 層間剥離 (Delamination)

このモードは隣接した単層の剥離として定義される。一般に、このモードはマトリックス クラッキングに伴って発生し積層板の最終破壊とされる。

2.2 損傷流れ則

上記の損傷モードに基づき、ここでは積層板の構成則について述べる。図-2に積層板の典型的な荷重一

歪み曲線を示す。同図に示すように、積層板の挙動は損傷モードにより3種類の区域に分類される。

1) 弾性域 (非損傷域)

この区域においては積層板は完全な線形弾性材料として扱う。積層板全体の剛性は古典的な積層理論で求められるとして、各単層では次の関係が成立する。

$$\{\varepsilon\}^{(k)} = [S]^{(k)} \{\sigma\}^{(k)} \quad \text{----- (1)}$$

今、平面応力状態を仮定すれば、 $\{\varepsilon\}^{(k)} = (\langle \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12} \rangle^T)^{(k)}$ 、 $\{\sigma\}^{(k)} = (\langle \sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12} \rangle^T)^{(k)}$ と示される。また、ここで、 $\{\varepsilon\}^{(k)}$ 、 $\{\sigma\}^{(k)}$ は第(k)番めの繊維方向を主方向とする材料座標系での歪み、応力を示し、 $[S]^{(k)}$ は同様に材料座標系でのコンプライアンスを示す。なお、マトリックス相のせん断歪みによる非弾性挙動は本研究では無視された。

2) 非弾性域 (損傷域)

弾性限界から更に載荷荷重を増加させると、積層板を構成するいずれかの単層にマトリックス クラッキングが生じる。今、第(k)番めの単層にマトリックス クラッキングが生じたとすれば、この単層に対して構成則は

$$\{\varepsilon\}^{(k)} + \{d\varepsilon\}^{(k)} = ([S]^{(k)} + [dS]^{(k)}) (\{\sigma\}^{(k)} + \{d\sigma\}^{(k)}) \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 $[dS]^{(k)}$ は第(k)番めの単層のマトリックス クラッキングによるコンプライアンスの変化を示す対角行列とする。また、 $\{d\varepsilon\}^{(k)}$ 、 $\{d\sigma\}^{(k)}$ はそれによって生じる歪み、応力の増分を示す。

本研究では、 $[dS]^{(k)}$ は第(k)層めの単層のマトリックス クラッキングの破壊法則に基づく流れ則より求まるとして、

$$[dS]^{(k)} \{\sigma\}^{(k)} = \Lambda^{(k)} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

ここで、 g はマトリックス クラッキングを想定する破壊法則を示し、 $\Lambda^{(k)}$ は応力増分等に依存するスカラー関数である。また、応力 $\{\sigma\}^{(k)}$ は $g(\{\sigma\}^{(k)}) = 0$ を満たしている。

一方、マトリックス クラッキングの堆積は、単層の材料強度自体を変化させ、結果として破壊法則 g は以下のように表すことができる。

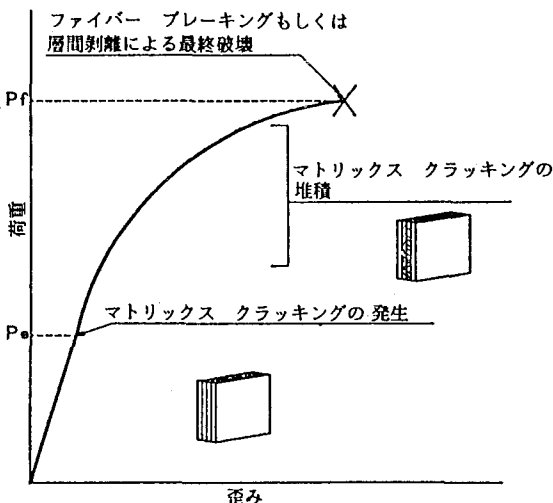


図-2 積層構造における典型的な荷重-歪み曲線

$$g = g \left(\{\sigma\}^{(k)} - \{\alpha\}^{(k)} \right) \quad \text{..... (4)}$$

ここで、 $\{\alpha\}^{(k)}$ は第(k) 番めの単層に対する材料強度の変化を与えるベクトルで、マトリックス クラッキングの材料中への堆積に依存すべきものである。これは、変形されたPrager則より以下のように求まるとした。

$$\begin{aligned} \{d\alpha\}^{(k)} &= D \{dS\}^{(k)} \{\sigma\}^{(k)} \\ &= D \Lambda^{(k)} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\} \quad \text{..... (5)} \end{aligned}$$

ここで、Dは積層状態には独立で構成材料のみに依存するスカラーパラメーターである。本研究では、Dの値は $(\pm 45^\circ)$ ϵ_s の単純引張り試験の結果に基づいて求められた。

また、 g は $\{\sigma\}^{(k)}$ 、 $\{\alpha\}^{(k)}$ の関数と仮定したため、損傷流れの間に、 $\{\sigma\}^{(k)}$ 、 $\{\alpha\}^{(k)}$ のあらゆる変化に対して、以下の関係を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} dg^{(k)} &= \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\}^T \cdot \{d\sigma\}^{(k)} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \alpha^{(k)}} \right\}^T \cdot \{d\alpha\}^{(k)} \\ &= \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\}^T \cdot (\{d\sigma\}^{(k)} - \{d\alpha\}^{(k)}) = 0 \quad \text{..... (6)} \end{aligned}$$

よって、スカラー関数 $\Lambda^{(k)}$ は式(2)、(3)、(5)、及び(6)より、以下のように表され、与えられた荷重増分に対して、収束計算により求めることができる。

$$\begin{aligned} \Lambda^{(k)} &= \frac{\left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\}^T \cdot (\{S\}^{(k)} + \{\Delta S\}^{(k)}) \cdot \{\Delta \epsilon\}^{(k)}}{D \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\}^T \cdot (\{S\}^{(k)} + \{\Delta S\}^{(k)}) \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma^{(k)}} \right\}} \\ &\quad \text{..... (7)} \end{aligned}$$

なお、破壊法則 g は、応力に対する2次関数で降伏条件を与えるMisesの手法に基づいて、

$$\begin{aligned} g \left(\{\sigma\}^{(k)} - \{\alpha\}^{(k)} \right) &= \left(\frac{\sigma_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{(k)} + R_1}{R_2} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\tau_{12}^{(k)} - \alpha_{12}^{(k)}}{R_3} \right)^2 - 1 \quad \text{..... (8)} \end{aligned}$$

ここで、 R_1 、 R_2 、 R_3 は単層の繊維直角方向に対する引張り強度 Y 、圧縮強度 Y' 及び、せん断強度 S と次式のような関係を持つ材料強度パラメーターである。

$$R_1 = \frac{1}{2} (Y - Y') \quad \text{..... (9)}$$

$$R_2 = \frac{1}{2} (Y + Y') \quad \text{..... (10)}$$

$$R_3 = \frac{S}{2} \left(\sqrt{\frac{Y'}{Y}} + \sqrt{\frac{Y}{Y'}} \right) \quad \text{..... (11)}$$

3) 最終破壊

損傷モードの分類で述べたように、積層板の最終破壊はファイバー ブレーキング、あるいは層間剥離によって生じるものとされる。これらの破壊は単層のInsitu Strengthに基づき、次に与える破壊法則により検知できるものとする。

$$f(\{\sigma\}^{(k)}) \geq 0 \quad \text{..... 層間剥離による最終破壊}$$

$$h(\{\sigma\}^{(k)}) \geq 0 \quad \text{..... ファイバー ブレーキングによる最終破壊}$$

ここで、

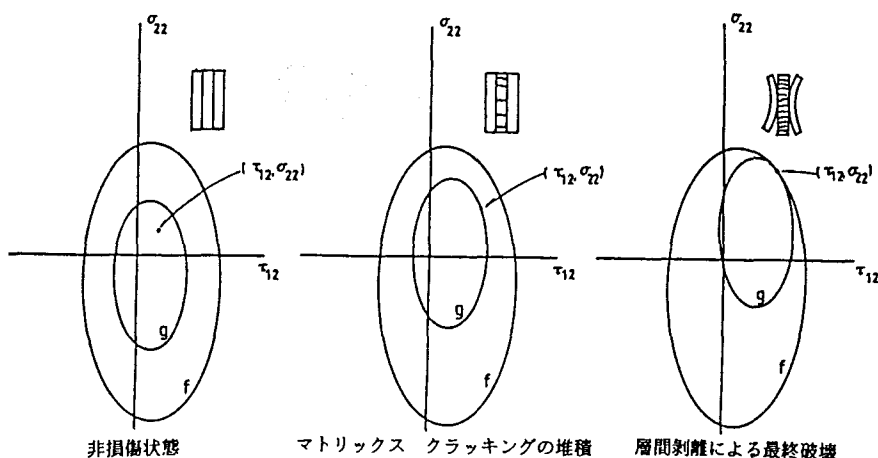
$$f(\{\sigma\}^{(k)}) = \left(\frac{\sigma_{22}^{(k)} - R_4}{R_5} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^{(k)}}{R_6} \right)^2 - 1 \quad \text{..... (12)}$$

$$h(\{\sigma\}^{(k)}) = \left(\frac{\sigma_{11}^{(k)}}{R_7} \right) - 1 \quad \text{..... (13)}$$

R_4, R_5, R_6, R_7 は単層の材料に依存するInsitu Strengthで、 $[0^\circ]_{ss}, [\pm 45^\circ]_{4s}, [90^\circ / \pm 60^\circ / 90^\circ]_{2s}$ の単純引張り試験における最終破壊荷重に基づいて求められた。

なお、式(12)で示される層間剥離に対する破壊法則は式(8)のマトリックス クラッキングに対する破壊法則と同様に $\sigma_{22}^{(k)}, \tau_{12}^{(k)}$ の2次関数で表される。言い換えれば、それぞれの破壊法則は (σ_{22}, τ_{12}) の応力空間内において2種類の大きさの異なる楕円で示され、マトリックス クラッキングの堆積により破壊法則 g が示す楕円は空間内を移動する。そして、層間剥離はこの楕円 g の移動の後、2つの楕円が接した時に生じることが分かる(図-3)。また、通常、楕円 f は楕円 g を包含し、これは層間剥離がマトリックス クラッキングを伴うという観測結果にも合致する。

以上による積層板の非線形構成則はその検証のため、有限要素法に適用され、実験結果⁹⁾との比較がなされた。実験結果は、引張りを受けるカーボン/エポキシ積層板で、 $[\pm 45^\circ]_{4s}, [0^\circ / \pm \theta^\circ / 0^\circ]_{2s}, [90^\circ / \pm \theta^\circ / 90^\circ]_{2s}$ ($\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$)に対する荷重-歪曲線が対象とされた。本研究に基づいて得られた数値解は、非線形性、最終破壊荷重とも実験結果とよく一致することが文献5)に報告されている。



図一 3 層間剝離による最終破壊における破壊法則の相関関係

3. 損傷を考慮に入れた複合材料積層円筒の座屈

積層円筒シェルの最適設計において、座屈荷重に対して構造物を安全なように設計することを目標とする座屈設計は、構成材料強度の吟味と並んで、重要な設計拘束条件を呈する。

一般に積層円筒の座屈解析における支配方程式としては、Donnell の式とFlügg の式が用いられる。Donnell の式に基づいて座屈荷重を求めた場合、その取り扱いが簡単であるが、偏平シェル近似に基づき、たわみが面内変位成分に比し十分大きいことを前提としているため、円筒シェルが細長くかつ周方向波数が少ない場合には大きな誤差を伴う。これに対してFlügg の式は比較的厳密でありより広い範囲にわたる形状に対して適用可能である⁶⁾。

積層円筒の最適設計を行う時、上記の2種類の支配方程式の内、どちらを選択するかは非常に重要な問題ある。通常、Flügg の式に基づく解法で座屈荷重を求めた場合、上で述べたようにその値は比較的正確ではあるが、そのために費される計算時間はDonnell の式に頼る場合よりも大きい。その上、最適設計においてはその収束計算の途中で設計変数が少ない場合でも数回は座屈荷重を評価する必要がある。以上の考慮に基づいて、現在まではDonnell の式を用いること多く、本研究ではマトリックス クラッキングによる材料非線形を考慮に入れるということも踏まえ、Donnell の式により座屈荷重を求めた^{1), 7)}。

一般に、Donnell の式による座屈計算は円筒の半径 R 、長さ L 、面内剛性マトリックス A_{ij} 、曲げ剛性マトリックス D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$ 、ただし、対象積層板を想定し A_{16} 、 A_{26} 、 D_{16} 、 D_{26} は0)、軸方向座屈波数 m 、周方向座屈波数 n の関数として陽的に表すことができ、実際の座屈荷重 N_x は整数 m 、 n に対する最小値に等しい。

本研究では、マトリックス クラッキングによる剛性の変化を考慮に入れて以下の手順に従い一定の内圧下 (N_y) における座屈荷重 N_x を求めた。

①積層円筒の剛性を計算する。

②弾性限界における軸圧縮荷重 N_x^L を求める。

③座屈荷重 N_x を計算し、 $N_x \leq N_x^L$ の場合は座屈は弾性域で生じ、 N_x を座屈荷重とする。 $N_x > N_x^L$ の場合は座屈はマトリックス クラッキングを伴って生じるものとし、座屈荷重は次の手順以降で求められる。

④適当な軸圧縮荷重増分 ΔN_x を N_x^L に加え、座屈荷重を $(N_x^B)_i = N_x^L + \Delta N_x$ と想定する。ここで、 $(N_x^B)_i$ は試行的な座屈荷重とする。

⑤損傷流れ則に基づき、試行的な座屈荷重に対する剛性を求める。

⑥求められた剛性に対し再度座屈荷重を計算し、以下の指示に従う。

$(N_x^B)_i < N_x$ の場合 ——— $(N_x^B)_{i+1} = (N_x^B)_i + \Delta N_x$ とし手順⑤に戻る。

$(N_x^B)_i > N_x$ の場合 ——— $(N_x^B)_{i+1} = (N_x^B)_i - \Delta N_x / 2$ とし手順⑤に戻る。

$(1 - (N_x^B)_i / N_x) < \delta$ の場合 ——— $(N_x^B)_i$ を座屈荷重とし計算を終了する。

なお、ここで δ は十分に小さい数とし、 i は繰り返し計算のステップ数とする。

4. 軸圧縮、内圧を受ける積層円筒の最小重量設計

本項では、本文第2項、第3項で述べられた積層板における損傷という現象を考慮に入れた積層円筒の最小重量設計について述べる。今、円筒の半径、長さ、及び積層層は固定とし、最小重量を目的関数とし、変化させるべき設計変数は各単層における繊維の方向、及び単層の板厚とする。また、各単層の材料はカーボン/エポキシで構成されているとし、繊維の方向、及び単層の板厚が積層板中立軸に対称であるとすれば、各層の繊維の方向に対して $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ また、板厚に対して t_1, t_2, t_3, t_4 、計8個の設計変数が決定される。また、各制約条件は設計変数に対して非線形関数であり、通常、その最適設計は非線形数理計画法によりなされる。本研究では最適設計の手法としては許容方向法が用いられた⁸⁾。なお、図-4に積層円筒の構造概要図、及び構成材料の物性値を示す。

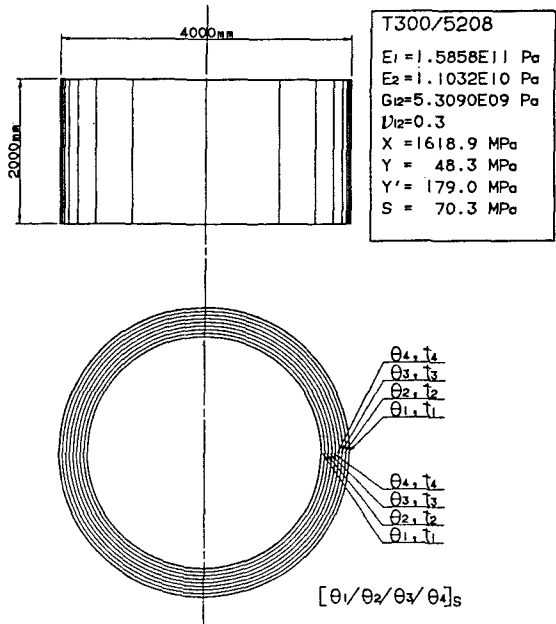


図-4 積層円筒の構造概要図、及び物性値

4. 1 目的関数

今、積層円筒の単位面積あたりの重量を目的関数とすれば、

$$F(\{X\}) = 2 \sum_{i=1}^4 \rho \cdot t_i \quad (12)$$

と示される。

ここで、 $F(\{X\})$ は目的関数を示し、また $\{X\}$ は設計変数ベクトルを示す。また、 ρ は材料の密度を示し、 t_i は第 (i) 番めの単層厚を示す。但し、本論文で取り上げた積層円筒は全て、同一の材料で構成されているため、 $\rho = 1$ と置き、また、重量は無次元量とする。

4. 2 制約条件

設計に許容する損傷モードの種類に応じて、制約条件は次の 2 種類に分類される。

・クラック非許容制約条件

マトリックス クラッキング $g(\{\sigma\}_i) < 0; \forall i$

ファイバー ブレーキング $h(\{\sigma\}_i) < 0; \forall i$

座屈荷重 (弾性) $N_x - N_x^B < 0$

・クラック許容制約条件

層間剥離 $N_x - N_x^D < 0$

ファイバー ブレーキング $N_x - N_x^F < 0$

座屈荷重 (弾性, 非弾性) $N_x - N_x^B < 0$

ここで、 N_x は設計軸圧縮荷重、 N_x^B は座屈荷重、 N_x^D は層間剥離限界荷重、 N_x^F はファイバー ブレーキング限界荷重を示す。なお、それぞれの条件とも設計変数に対する直接制約条件は同様で以下のようのものであった。

$$\begin{aligned} -90^\circ < \theta_i < 90^\circ; \forall i \\ 1 \times 10^{-3} \text{ m} < t_i < +\infty; \forall i \end{aligned}$$

5. 数値計算結果

図-5 に、設計軸圧縮荷重 N_x をパラメーターとして変化させた場合に得られた最小重量を示す。この図では、クラック許容設計条件に基づいて得られた最小重量とクラック非許容設計条件に基づいて得られたものを、軸圧縮荷重のみが載荷される場合と、それに内圧が加えられた場合 ($N_y/N_x = 1.0$) に対して比較されている。

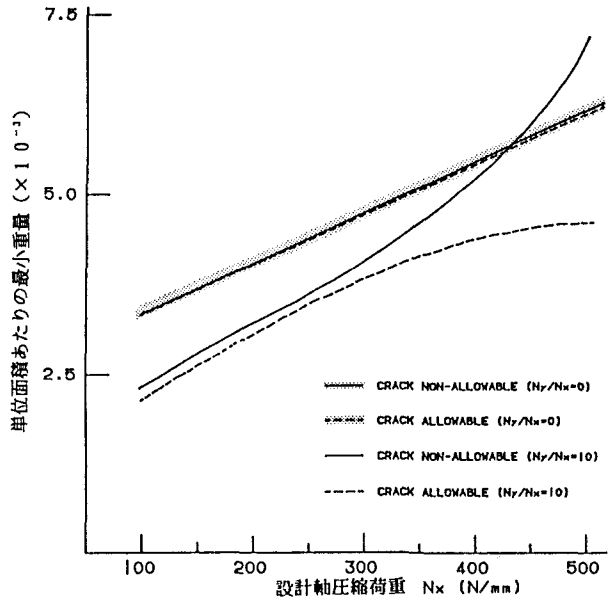
同図に示すように、軸圧縮荷重のみが載荷される積層円筒では設計条件としてクラックを許容し、材料強度を積層板の最終強度としても、その最小重量はクラックを非許容とする従来の設計と変わらない事が明らかになった。これは、軸圧縮荷重のみが載荷される積層円筒では、弾性座屈が大きな影響をおよぼすためと思われる。

一方、内圧が加えられた場合、クラックを許容する場合と、しない場合では、その最小重量における差は設計軸圧縮荷重が大きくなればなる程広がる。ここで、クラック許容設計条件は非許容設計条件より小さい最小重量を与え、 $N_x = 500 \text{ N/mm}$ に対しその差は 3.3 % にも達する事が明らかになった。一般的に座屈荷重に対する円筒の強度に最も大きな影響を及ぼす一番外側の単層の繊維の方向は、座屈耐荷力を効率よく構造に与えるため、 0° 、ないしはそれに近い値を示す。一方、この単層は円筒に内圧が加えられた場合、マトリックス クラッキングが最も生じ易い単層でもある。つまり、クラック非許容設計によれば、このマトリックス クラッキングの最外層における発生を抑えるため、それ以外の単層の板厚が増加し、結果として、クラック許容設計よりも大きい最適重量を呈することになる。なお、この最適状態において Active な設計

条件はクラック非許容設計では、弾性座屈および最外層のマトリックス クラッキングであり、一方クラック許容設計では非弾性座屈であった。

6. 結論

本研究では与えられた複合材料積層板において、構成単層の任意の繊維方向、板厚を考慮できる材料非線形、及び最終破壊法則のモデルを提唱した。また、その材料非線形性に基づく積層円筒の座屈について考察し、最終的には許容方向法により積層円筒の最小重量設計を行った。この研究の最終目的でもあった最小重量設計においては、従来のFirst Failure Criterion による設計とマトリックス クラッキングを許容する設計と比較し、軸圧縮と内圧が載荷される場合には後者による設計は前者によるものより軽量な構造を与えることが明らかになった。



7. あとがき

図一 5 設計軸圧縮荷重の変化に対する最小重量の比較

今回の研究は積層円筒の設計としてはあくまでも試行的なものであり、実際の適用のためには以下の点が今後、検討されねばならない。

- ・設計変数としての繊維方向、及び板厚は材料の成形性を考慮して通常、離散値として与えなければならない (例えば、 $\theta = 0^\circ, 5^\circ, \dots, t = 1\text{ mm}, 2\text{ mm}, \dots$)。
- ・力学的には許容された マトリックス クラッキングに対する周囲の環境からの影響を考慮する必要がある。
- ・損傷に対する動的な取扱いを考慮する必要がある。

参考文献

- 1) B. L. AGARWAL, "Minimum weight design of axially compressed unstiffened and stiffened composite cylinders", Ph. D thesis, University of Cincinnati, 1975.
- 2) K. ANDO, "Optimisation d'une coque cylindrique soumise à la compression axiale : Effet des structures et des matériaux sur le poids optimale", Internal report, Université de Technologie de Compiègne, 1985.
- 3) K. KAMIMURA, "Modelisation théorique de la croissance d'endommagement appliquée à la théorie des plaques stratifiées", J. de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 4, No. 4, pp. 537-555, 1985.
- 4) G. N. VANDERPLAATS, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", Macgraw-Hill Book Co., p. 278, 1984.
- 5) K. ANDO, "Modelisation théorique de l'endommagement des matériaux composites : Application à l'optimisation des structures tenant compte du mode d'endommagement", Doctoral thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1987.
- 6) JSCE, "Guidelines for Stability Design of Steel Structures", JSCE, p. 317, 1987
- 7) S. CHENG, "Stability of heterogeneous orthotropic cylindrical shells under combined loading" AIAA J. vol. 7, No. 4, pp. 892-898, 1963.
- 8) G. N. VANDERPLAATS, "Conmin : A Fortran program for constrained function minimization", AMES Research Center, 1973.
- 9) G. P. SENDECKYJ, M. D. RICHARDSON, et J. E. PAPPAS, "Fracture behavior of THORNEL 300/5208. Graphite-Epoxy Laminates part 1: Unnotched Laminates", Composite Reliability, ASTM, STP580, pp. 528-546

(1988年10月12日受付)