

走行車両の不確定な特性を考慮した 道路橋の不規則応答解析

Random Response of Highway Bridge under a Moving Vehicle with Uncertain Properties

岡林 隆敏

By Takatoshi Okabayashi

In actual highway bridges under passage of vehicles, these vehicles have different dynamic characteristics. This paper presents an analytical method for determining the mean value of variance response of highway bridges under a single moving vehicle excited by the random road roughness when a mass and spring constant of vehicle are assumed by random variables. The hierarchy method is applied to this problem and the infinite hierarchy of moment equations are derived.

For the purpose of verifying the results of the present method, the solution derived by the method is compared with that obtained by a Monte Carlo simulation. The coefficients of impact obtained from the method are illustrated for the simple girder bridges with the span length from 20 m to 70 m.

1. はじめに

現実の交通流による道路橋の振動を評価するためには、大型車両の発生確率、車間距離のような様々な不確定要因を考える必要がある。しかし、これらを全て考慮した理論的取り扱いには困難である。不規則路面凹凸上を走行する車両より衝撃係数を算定する場合、これまでの研究では車両の振動特性を確定的に与えている。この場合、車両の固有振動数に近い固有振動数を有する支間の橋梁において、最大の応答を示す。しかし、単一の大型車両走行を考えた場合でも、現実には車両の動的特性にばらつきがあるために、常に特定の支間長の橋梁が最大の応答を示すとは限らない。そこで、本研究では、車両の重量とばね定数を確率変数と仮定し、これらの確率変数に対する平均値として、橋梁の応答の評価を行った。

道路橋振動の主要な原因である路面凹凸については、これを定常確率過程にモデル化し、不規則振動論を適用することにより走行車両による道路橋の解析が行われている。初期の研究では、定常応答理論(1)が適用されていたが、近年様々な非定常応答解析の手法(4)(5)(6)が提案されている。車両の種々の特性が確率変数である場合は、シミュレーションの手法による解析(2)(3)が試みられている。

路面凹凸を正規性定常過程でモデル化し、車両のパラメータ、重量とばね定数は変動が大きく、任意の分布を有する確率変数とする。路面凹凸により加振された車両による道路橋の不規則応答は、共分散方程式(4)(6)で表現することができる。次に、共分散方程式のパラメータが確率変数と考えて、共分散方程式に階層法(7)(8) (Hierarchy Method) を適用する。階層法の打ち切り近似として、高次キュムラント打ち切りの近似(8)(9)を用いた。階層方程式を解くことにより、橋梁の変位の非定常分散応答あるいは、定常分散応答の確率変量に

よる平均値を求める。

本解法の有効性を確認するために、共分散方程式の重量とばね定数を正規乱数で表し、応答を平均するシミュレーションを行う。さらに、支間長 $L=20\sim70\text{m}$ の単純桁橋に対して、車両の不確定変数の変動が橋梁の変位応答へ及ぼす影響について検討する。また、非定常応答解析の最大応答を推定する簡便法である定常応答解析について、その有効性の確認を行う。

2. 橋梁-車両系の運動方程式と路面凹凸のモデル化

2. 1. 橋梁-車両系の運動方程式

1自由度系でモデル化した車両が、一定速度 v で路面凹凸を有する橋梁上を走行するものとする。これを図-1に示した。支点から距離 x 点にある着目点の橋梁の動的たわみ $y(x,t)$ は、 j 次固有モード $\phi_j(x)$ と基準関数 $q_j(t)$ により、

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t) \quad (1)$$

で与えられる。車両の接地力を $P(t)$ とすると、基準関数は、

$$\ddot{q}_j(t) + 2 h_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = P(t) \phi_j(vt)/M_j \quad (2)$$

より得られる。ただし $M_j = \int_0^L \rho \phi_j^2(x) dx$ 、また、 ω_j 、 h_j 、 ρ および L は、それぞれ橋梁の j 次の固有円振動数、減衰定数、単位長さ当たりの質量および支間長である。

走行車両直下の橋梁の変位を $y_v(t)$ 、車両の垂直変位を $z(t)$ 、走行車両から観測した路面凹凸を $r(t)$ とすると、橋梁上を走行する車両の方程式は、

$$\ddot{z}(t) + 2 h_0 \omega_0 (\dot{z}(t) - \dot{y}_v(t) - \dot{r}(t)) + \omega_0^2 (z(t) - y_v(t) - r(t)) = 0 \quad (3)$$

となる。ここに、 ω_0 と h_0 は走行車両の固有振動数と減衰定数である。走行車両のばね上質量で車両の全質量を代表させると、接地力は次式となる。

$$P(t) = mg - m \ddot{z}(t) \quad (4)$$

ただし、 m は車両の全質量、 g は重力加速度である。

2. 2. 路面凹凸のモデル化

路面凹凸のパワースペクトルを図-2に示した。路面凹凸のパワースペクトル密度は

$$S_R(\Omega) = A \Omega^{-n} \quad (5)$$

で近似的に表現することができる。図-2は、川合・森崎(10)の名神高速道路における測定値であり、 $A=10^{-3} \text{ cm}^3/\text{m}$ 、 $n=2$ となっている。著者は、 $x=vt$ で時間領域に変換したスペクトル密度を

$$S(\omega) = S / (\omega^2 + \beta^2) \quad (6)$$

で表示した(4)。ここに、 $S=4\pi^2 v A$ 、 $\beta=2\pi a v$ である。 a の値として $a=0.05$ とした。このパワースペクトル密度は、確率微分方程式

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = w(t) \quad (7)$$

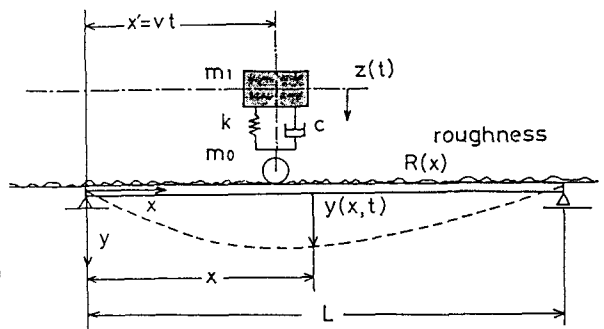


図-1 橋梁-車両系のモデル化

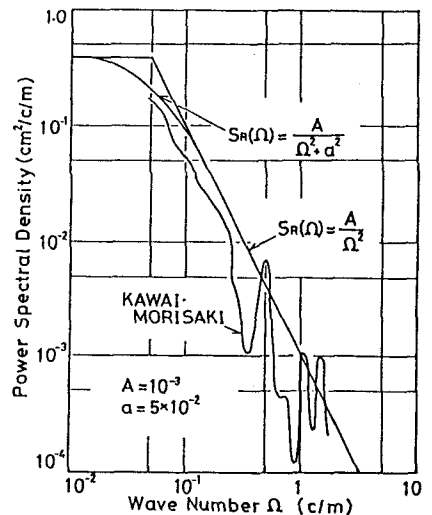


図-2 路面凹凸のパワースペクトル

の定常解過程で表示することができる。ここに、 $w(t)$ は正規性白色雑音過程であり次の確率特性を有する

$$E[w(t)] = 0, E[w(t_1)w(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (8)$$
 なお、 $E[\]$ は集合的平均値を表す演算子であり、 $\sigma^2 = 2\pi S$ の関係がある。

3. 橋梁-車両-路面系の共分散方程式

橋梁の平均値周りの変動のみに着目するために、(4) 式の右辺第2項のみを考える。さらに、橋梁の1次振動のみを考えた場合、橋梁-車両-路面系の状態変数は

$$X(t) = [q_1(t) \dot{q}_1(t) z(t) \dot{z}(t) r(t)]^T \quad (9)$$

で表される。状態変数を用いると、(2)(3)(4)(7)式は、次の確率微分方程式で表現できる。

$$\dot{X}(t) = A_X(t)X(t) + W_X(t), X(t_0) = X_0 \quad (10)$$

ここで、 $W_X(t)$ は白色雑音過程ベクトルである。係数行列 $A_X(t)$ と $W_X(t)$ は、次式で与えられる。

$$A_X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad W_X(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{24} \\ 0 \\ -a_{44} \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (11)$$

なお、 $W_X(t)$ の確率特性は、次式で規定される。

$$E[W_X(t)] = 0, E[W_X(t_1)W_X(t_2)^T] = Q_X(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad (12)$$

a_{ij} の具体的な式と、 $Q_X(t)$ の要素は付録【1】に示した。

系の応答 $X(t)$ の共分散 $R_X(t) = E[X(t)X(t)^T]$ の時間的变化は、確率微分方程式(10)式に対応して

$$\dot{R}_X(t) = A_X(t)R_X(t) + R_X(t)A_X(t)^T + Q_X(t), R_X(t_0) = R_{X0} \quad (13)$$

の共分散方程式で記述できる。この方程式を解くと、橋梁の変位応答の分散の時間的变化が得られる。

共分散方程式の初期条件は、次のように考える。橋梁は車両が進入するまで静止している。車両は路面凹上を走行して、定常状態で橋梁に進入するものとする。道路上を走行する車両-路面系の方程式を、状態空間表示する。状態変数

$$Z(t) = [z(t) \dot{z}(t) r(t)]^T \quad (14)$$

に対する確率微分方程式は、

$$\dot{Z}(t) = A_Z Z(t) + W_Z(t) \quad (15)$$

で与えられる。定常応答を考えると、 $Z(t)$ の共分散 $R_Z(t) = E[Z(t)Z(t)^T]$ は定数となるので、車両-路面系の共分散方程式は、

$$A_Z R_Z + R_Z A_Z^T + Q_Z = 0 \quad (16)$$

で与えられる。 Q_Z は白色雑音過程ベクトル $W_Z(t)$ の強度行列である。なお、 A_Z 、 $W_Z(t)$ および Q_Z の要素は、付録【1】に示した。

路面凹凸上を走行する車両の接地力を橋梁1点に作用させて、橋梁の応答が定常になった状態を考える。共分散方程式(13)式に対する定常応答は、次の連立方程式から得られる。

$$A_X R_X + R_X A_X^T + Q_X = 0 \quad (17)$$

4. 確率変量を有する共分散方程式の解析

4. 1. 階層方程式

確率微分方程式(10)式の係数が、外力と独立な確率変数 Λ を含むものとする。このような方程式を

$$\dot{X}(t, \Lambda) = A_X(t, \Lambda) X(t, \Lambda) + W_X(t, \Lambda), X(t_0, \Lambda) = X_0(\Lambda) \quad (18)$$

で表示する。共分散方程式の数値解析手法に付いては、いくつかの手法(11)(12)が提案されている。本研究

では、式の展開を簡単にするために、共分散方程式を通常のベクトル形式の方程式に変換する。(18)式の $X(t, \Lambda)$ の応答共分散 $R_X(t, \Lambda)$ は対称行列である。このことを考慮して、次の形の方程式に変換する。

$$\dot{H}(t, \Lambda) = G(t, \Lambda) H(t, \Lambda) + F(t, \Lambda), \quad H(t_0, \Lambda) = H_0(\Lambda) \quad (19)$$

なお、係数行列 $G(t, \Lambda)$ および強度行列 $F(t, \Lambda)$ の要素を、付録【2】に示した。本論文では、車両の重量とばね定数の2個を確率変数と考え、これを a_1, a_2 とする。このとき、 $G(t, \Lambda)$ と $F(t, \Lambda)$ は次のように表示できる。

$$G(t, \Lambda) = G_0(t) + \sum a_i G_i(t) + \sum \sum a_i a_j G_{ij}(t) \quad (20)$$

$$F(t, \Lambda) = F_0(t) + \sum a_i F_i(t) + \sum \sum a_i a_j F_{ij}(t) \quad (21)$$

ここで、 $G_0(t)$ 、 $G_i(t)$ および $G_{ij}(t)$ は $G(t, \Lambda)$ において、確率変数を含まない要素、1 個含む要素および2 個含む要素から構成される行列である。同じく、 $F_0(t)$ 、 $F_i(t)$ および $F_{ij}(t)$ は $F(t, \Lambda)$ から導くことができる。これらの行列は、 $G(t, \Lambda)$ と $F(t, \Lambda)$ より容易に誘導することができるので各行列の要素の表示は省略する。ここに、 $i = 1, 2$ および $j = 1, 2$ である。

方程式(19)式の両辺を確率変数 Λ で平均すると、 $\langle a_i H(t, \Lambda) \rangle$ および $\langle a_i a_j H(t, \Lambda) \rangle$ の新しい変数が生じる。 $\langle a_i H(t, \Lambda) \rangle$ に関する方程式を得るために、(19)式の両辺に a_s をかけた後平均操作を行う。これらの式を書くと、次のようになる。なお、 $s = 1, 2$ である。

$$\begin{aligned} \langle \dot{H}(t, \Lambda) \rangle &= G_0(t) \langle H(t, \Lambda) \rangle + \sum G_i(t) \langle a_i H(t, \Lambda) \rangle + \sum \sum G_{ij}(t) \langle a_i a_j H(t, \Lambda) \rangle \\ &\quad + F_0(t) + \sum \langle a_i \rangle F_i(t) + \sum \sum \langle a_i a_j \rangle F_{ij}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle a_s \dot{H}(t, \Lambda) \rangle &= G_0(t) \langle a_s H(t, \Lambda) \rangle + \sum G_i(t) \langle a_s a_i H(t, \Lambda) \rangle \\ &\quad + \sum \sum G_{ij}(t) \langle a_s a_i a_j H(t, \Lambda) \rangle + F_0(t) \langle a_s \rangle + \sum \langle a_s a_i \rangle F_i(t, \Lambda) \\ &\quad + \sum \sum \langle a_s a_i a_j \rangle F_{ij}(t) \end{aligned} \quad (23)$$

この方程式は階層方程式と呼ばれるものであり、際限なく連鎖する。そこで、この方程式を打ち切る仮定を導入する。

4.2 キュムラント打ち切り近似

確率変数 Λ の確率密度関数を $P(\Lambda)$ とすると、確率変数 Λ の特性関数 $\psi(\theta)$ は

$$\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\theta\Lambda) P(\Lambda) d\Lambda \quad (24)$$

で定義される(13)。ここに、 θ は Λ と同じ次元のベクトルであり、 i は虚数単位である。このとき $k_1 \dots k_n$ 次のキュムラントは、次式で定義される統計量である。

$$K_{z_1 \dots z_n} = (i)^{-\sum z_i} \frac{\partial^{\sum z_i}}{\partial x^{z_1} \dots \partial x^{z_n}} \ln \psi(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad (25)$$

次に5次までのキュムラントを示すが、記述を簡略化するために確率変数の平均値を0とした場合のものである。なお、 x_n は Λ の平均値回りの変動であり、 μ_{111} 等は中心回りのモーメントを表している。

$$\begin{aligned} K_1 &= E[\Lambda_1] = 0 & K_{11} &= E[\Lambda_1 \Lambda_2] = \mu_{11} \\ K_{111} &= \mu_{111} & K_{1111} &= \mu_{1111} - \mu_{1100} \mu_{0011} - \mu_{1010} \mu_{0101} - \mu_{1001} \mu_{0110} \\ K_{11111} &= \mu_{11111} - \mu_{11100} \mu_{00011} - \mu_{11010} \mu_{00101} - \mu_{11001} \mu_{00110} \\ &\quad - \mu_{10101} \mu_{01010} - \mu_{10011} \mu_{01100} - \mu_{01011} \mu_{10100} - \mu_{01101} \mu_{10010} \\ &\quad - \mu_{00111} \mu_{11000} - \mu_{00110} \mu_{10001} - \mu_{10110} \mu_{01001} \end{aligned} \quad (26)$$

4次、5次のキュムラントを切り捨てることにより、4次、5次のモーメントは、3次以下のモーメントを用いて、記述できる。従って、(22)(23)式に現れる4次と5次のモーメントは、次のように表される。

$$\begin{aligned} \langle a_i a_j x_m x_n \rangle &= \langle a_i x_m x_n \rangle \langle a_j \rangle + \langle a_j x_m x_n \rangle \langle a_i \rangle + \langle a_i a_j \rangle \\ &\quad - 2 \langle a_i \rangle \langle a_j \rangle \langle x_m x_n \rangle \\ \langle a_i a_j a_s x_m x_n \rangle &= \langle a_i x_m x_n \rangle \langle a_j a_s \rangle + \langle a_j x_m x_n \rangle \langle a_i a_s \rangle \\ &\quad + \langle a_s x_m x_n \rangle \langle a_i a_j \rangle + \langle a_i a_j a_s \rangle - \langle a_i a_j \rangle \langle a_s \rangle \end{aligned} \quad (27)$$

$$-\langle a_1 a_3 \rangle \langle a_j \rangle - \langle a_j a_3 \rangle \langle a_1 \rangle \} \langle x_m x_n \rangle$$

(27)式を(22)(23)式に代入すると、閉じた型の階層方程式を導くことができる。

$$\begin{bmatrix} \langle \dot{H}(t, \Lambda) \rangle \\ \langle a_1 \dot{H}(t, \Lambda) \rangle \\ \langle a_2 \dot{H}(t, \Lambda) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle H(t, \Lambda) \rangle \\ \langle a_1 H(t, \Lambda) \rangle \\ \langle a_2 H(t, \Lambda) \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle F(t, \Lambda) \rangle \\ \langle a_1 F(t, \Lambda) \rangle \\ \langle a_2 F(t, \Lambda) \rangle \end{bmatrix} \quad (28)$$

この方程式の係数行列の要素 $P_{11} \sim P_{33}$ の具体的な式は、付録【3】に示した。

この階層方程式の初期条件は、(13)式の共分散方程式から(28)式を誘導した同じ処理を、車両-路面系の共分散方程式(16)に適用することにより得られる。また、車両の走行による影響を考えない定常応答を得るためには、(28)式の左辺の時間微分の項を0とした連立方程式を用いる。

5. 車両の特性と道路橋の諸元

5.1 車両の重量とばね定数の確率変数によるモデル化

車両の質量 m とばね定数 k を確率変数として、それぞれの平均値を μ_m 、 μ_k で表す。 m および k は、平均値が1で変動係数が v_m および v_k で表すことができる。

表-1 s_m と s_k のモーメント

$\langle s_m^{-1} s_k^j \rangle$	展開項
$\langle s_m^{-1} \rangle$	$1 + v_m^2 + 3v_m^4$
$\langle s_k \rangle$	1
$\langle s_m^{-2} \rangle$	$1 + 3v_m^2 + 15v_m^4$
$\langle s_k^2 \rangle$	$1 + v_k^2$
$\langle s_m^{-1} s_k \rangle$	$1 + v_m^2 + 3v_m^4 - v_m v_k r_{mk}(1 + 3v_m^2)$
$\langle s_m^{-3} \rangle$	$1 + 6v_m^2 + 45v_m^4$
$\langle s_m^{-2} s_k \rangle$	$1 + 3v_m^2 + 15v_m^4 - 2v_m v_k r_{mk}$
$\langle s_m^{-1} s_k^2 \rangle$	$1 + v_m^2 + v_k^2 + 3v_m^4 + v_m^2 v_k^2 - 2v_m v_k r_{mk}(1 - v_m v_k + 3v_m^2)$

$$m = \mu_m s_m, \quad k = \mu_k s_k \quad (29)$$

ここで、 m と k が次の確率変数である場合について考える。

a) 正規確率変数を仮定する場合

車両の質量 m は、 $1/m$ の形で表れている場合がある。 s_m のモーメントを解析的に求める代わりに、これを次のように級数展開して、4次の項まで考慮する。

$$\begin{aligned} s_m^{-1} &= (1 + \tilde{s}_m)^{-1} \\ &= 1 - \tilde{s}_m + \tilde{s}_m^2 - \tilde{s}_m^3 + \tilde{s}_m^4 \end{aligned} \quad (30)$$

ここに、 $\tilde{s}_m = s_m - 1$ であり s_m は平均値回りの正規確率変数である。従って、 $\tilde{s}_m$ の n 次モーメントは、次式で表される。

$$E[\tilde{s}_m^n] = \begin{cases} 0 & n=\text{奇数} \\ 2^{n/2} \pi^{1/2} v_m \Gamma\{(n+1)/2\} & n=\text{偶数} \end{cases} \quad (31)$$

そこで、 s_m と s_k の必要な高次モーメントを表したものが表-1である。なお、 r_{mk} は、 m と k の相関係数である。

b) 対数正規確率変数を仮定する場合

対数正規分布では、 s_m と s_k のモーメントは、次の式のように閉じた形で表される。

$$\begin{aligned} \langle s_m^{-1} s_k^n \rangle &= \exp\{1(1+i)v_m^2/2 + n(n-1)v_k^2/2\} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、この場合は、 m と k が確率的に独立の場合である。

5.2 車両と橋梁の諸元

表-2に車両の諸元を示した。車両の諸元は従来の

表-2 車両の諸元

平均重量	w	20.0	(tf)
平均ばね定数	k	7.251×10	(kg/cm)
粘性減衰定数	C	23.08	(t/cm/sec)
平均固有振動数	f	3.0	(Hz)
減衰係数	h	0.03	
走行速度	V	10.0	(m/sec)
確率密度の変動係数	$v_m v_k$	0.0, 0.1, 0.3, 0.35	

表-3 道路橋の諸元

スパン長 L (m)	総重量 w ($\times 10^4$ kg)	曲げ剛性 $E I$ ($\times 10^{12}$ kg.cm)	固有振動数 f (Hz)
20	4.84	6.21	6.28
30	7.76	12.42	3.79
40	10.68	24.41	2.94
50	13.60	48.20	2.45
60	15.52	65.78	2.11
70	19.44	80.15	1.70

走行車両による道路橋の解析に用いられている値とした。また、質量の分布は、文献(3)を参考にして、変動係数の上限を0.3～0.35とした。ばね定数の変動に関する調査結果を入手することができなかったため、本論文では、ばね定数の変動係数として質量と同じ、上限を0.3～0.35とした。この両方の値を用いると車両の固有振動数の変動が大きくなり過ぎる危険性があるが、本研究の主要な目的が、解析手法の有効性の確認にあるために、これらの変動係数を用いた。道路橋の諸元を表-3に示した。この諸元は、走行車両による道路橋の解析(4)(6)に用いられたものである本論文では、解析の対象を20～70mの支間長の橋梁にした。

6. 数値解析と考察

6-1 非定常応答解析

本解法の有効性を検討するために、階層法の解とシミュレーションの解の比較を行った。なお、シミュレーションは200回の標本関数を平均したものである。車両の重量とばね定数は、互に独立な正規分布をするものとする。非定常応答解析では、(29)式の階層方程式をRunge-Kutta-Gill法を用いて数値解析することにより、変位応答の分散の各確率変数に関する平均値を得ることができる。他方、シミュレーションは次のように行う。車両の質量 m とばね定数 k を正規乱数より発生させ、実現値に対応させて共分散方程式を解き、分散応答の標本関数を得る。この標本関数を平均することにより、シミュレーションの結果が得られる。

図-3は、支間長 $L=40\text{m}$ の橋梁において、車両の質量とばね定数の変動係数を0.35とした場合両解法の結果を示したものである。図の縦軸は、変位応答の標準偏差の値を支間中点の静的たわみで規準化した値であり、横軸は車両の位置である。支間長 $L=40\text{m}$ の橋梁の、振動は、車両の振動数と最も近く、両系は共振する。しかし、車両の質量とばね定数が変動すると、応答レベルが低下する標本も生じるので、車両の特性値が変動しない場合に比べて、応答の平均値は低下することになる。階層法の解とシミュレーションの結果を比較すると、階層法の解には上記した傾向が強く現れ過ぎている。これは、打ち切り誤差と近似化のために生じたものと思われる。

図-4は、車両の質量とばね定数の分布が、正規分布の場合と対数正規分布の場合の応答を比較したものである。いずれの場合も、車両の質量とばね定数は互に独立であり、それぞれの変動係数を0.35とした。図より、応答の確率分布による差は僅かしか表れていない。車両の質量とばね定数のこのような分布が応答に及ぼす影響は少ない。そこで、以後の車両の質量と

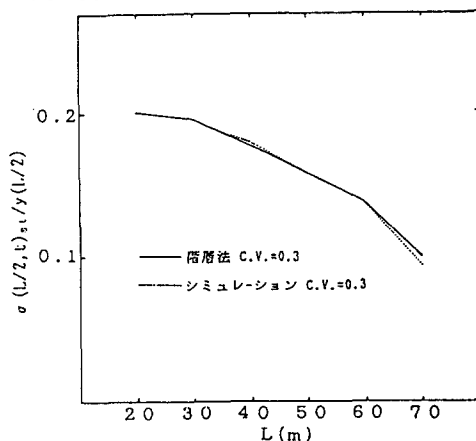


図-3 階層方程式の解とシミュレーションの結果
($L=40\text{m}$)

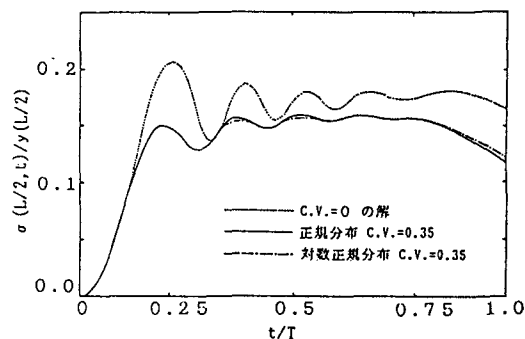


図-4 確率分布による応答の変化 ($L=40\text{m}$)

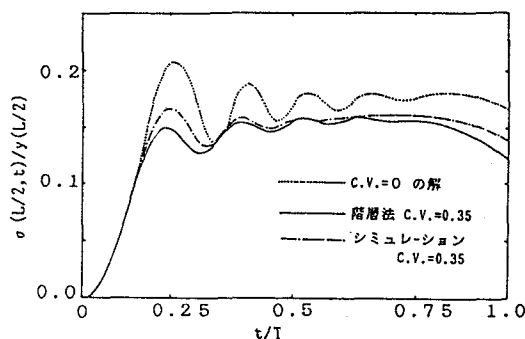


図-5 定常応答解析とシミュレーションの比較

ばね定数は、互に独立な正規分布とする。

6-2. 定常確率過程

非定常応答の最大応答を推定する手法として、著者は定常応答解析を提案した(4)(6)。階層方程式についても、同様に考える。階層法の妥当性を検討するために、シミュレーションを行った。シミュレーションの基礎式は(17)式である。図-5は、階層法による解とシミュレーションの結果を、支間長をパラメータにして示したものである。車両の質量とばね定数の変動係数を0.3とした。支間長40~50mの橋梁では、橋梁と車両の振動数が接近する。車両の質量とばね定数の変動が大きくなると、両系の振動数は離れることになり応答レベルは低下する。短径間および長径間の橋梁の場合では、逆に両系の振動数は離れているが、車両の振動数が変動することにより、両系は共振する場合も生じ、その結果、応答の平均は増大する。

本解法の解とシミュレーションの結果を比較すると、両応答は良い一致を示し、本解法の有効性が確認できた。

6.3. 最大応答の推定

図-6は、非定常応答の最大応答と定常応答を、支間長をパラメータに示したものである。車両の特性に変動がない場合、橋梁系と車両系が共振する支間長 $l=40\text{m}$ 付近で強い非定常性のために、非定常応答解析の最大応答は定常応答より大きな値を示す。この非定常性の原因については、文献(4)で詳しく説明した。それ以外の支間長では、定常応答の解が大きい。図よりわかるように、定常応答の解は非定常応答の最大応答の良い推定値となっている。車両の質量とばね定数の変動を増加させると、いずれの応答の場合でも、支間長間長 $l=40\text{m}$ 近のピークが平滑化されることがわかる。それ以外の支間長においては、両応答も増加する。このことより、車両の質量とばね定数の変動が増加すると、支間長に対する各応答は平坦になる傾向を示す。大型車両の単一走行を考えた場合、実橋では車両の特性は変動する。そこで、衝撃係数は、これらの車両による応答の平均から算定することが考えられる。両応答を比較すると、すべての支間長に対して、定常応答は非定常応答の最大応答の良い推定値となっている。このことより、定常応答解析は、非定常応答の最大応答を推定するための簡便法として有効な解法である。

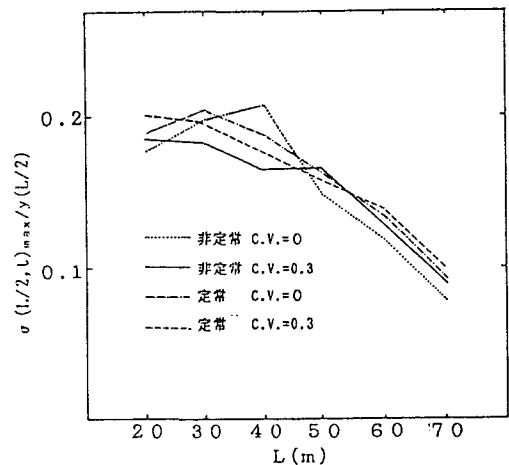


図-6 非定常最大応答と定常応答

7. おわりに

本論文では、不規則路面凹凸上を走行する単一車両による道路橋において、車両の重量とばね定数が変動した場合、変位応答の分散の各変動に対する平均を解析する手法を提案した。さらに、本解法の数値解析より得られた知見について述べたものである。本論文の結論を要約すると、次のようになる。

(1) 橋梁-車両-路面系の共分散方程式に階層法を適用することにより、車両の重量およびばね定数を確率変数でモデル化した場合、4次および5次のキュムラント打ち切り近似を導入して、閉じた形の階層方程式を導入することができた。本解析によれば、非定常応答解析は微分方程式の数値解析に、また定常応答解析は、連立方程式の数値解析に帰着させることができる。

(2) 本解法を車両の質量とばね定数を乱数より発生させるシミュレーションにより比較して、本解法の妥当性を検討した。非定常応答および定常応答いずれの場合でも、両解法は良い一致を示し、本解法の有効性

が確認できた。

(3) 車両の質量とばね定数を正規分布と対数正規分布でモデル化したが、変動係数0.35までは確率分の違いは応答に差を生じさせないことがわかった。

(4) 走行車両の振動特性を確定量として考えると、車両の振動数と振動数が一致する支間長の橋梁において、衝撃係数は最大になる。車両の振動特性に利ばらつきがあると、常にこの支間長の橋梁が最大の応答を示すとは限らなくなり、この支間長における衝撃係数は平滑化される。

(5) 非定常応答解析より得られる最大応答と定常応答解析の結果より、定常応答解析が非定常応答の最大応答を推定する有力な簡便法であることが確認できた。

本論文の解析では単一車両を対象にして、確率論的手法により車種の変動が橋梁の応答に及ぼす影響を評価した。しかし、交通流をモデル化するためには、車両台数および車頭間隔が重要なパラメータになる。このような不確定性を組み込んだ解析手法の開発が、今後の課題である。

参考文献

- 1) 山田・小堀：活荷重に対する道路橋の動的応答－衝撃係数－に関する研究、土木学会論文集第148号、pp.40～50、1967.
- 2) Shinozuka, M. and T. Kobori: Fatigue Analysis of Highway bridge, PROC OF JSCE, No.208, pp.137-148, 1972.
- 3) Nakai, H. and K. Kotoguchi: Dynamic Response of Horizontally Curved Girder Bridges under Random Traffic Flows, PROC OF JSCE, No.244, pp.117～128, 1975.
- 4) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答，土木学会論文集，第286号，pp.15～27，1976.
- 5) 吉村・彦坂・内谷：単一車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析、土木学会論文集，第258号，pp.35～44，1977.
- 6) 岡林・山口：連行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文集，第334号，pp.1～11，1983.
- 7) Richardson, J. M.: The Application of Truncated Hierarchy Techniques in the Solution of Stochastic Linear Differential Equation, Proc. Symp. Appl. Math., Vol. 16, pp. 290～302, 1964.
- 8) 岡林隆敏：不確定変量を有する動的系の非定常不規則応答、土木学会論文集，第308号，pp.1～14，1981.
- 9) Ibrahim, R. A., A. Soundararajan and H. Ilao: Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure, ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 965～970, 1985.
- 10) 川合・森崎：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol. 2, No. 2, pp. 20～28，1965.
- 11) Hoskins, W. D., D. S. Meek and D. J. Walton: The Numerical Solution of $\ddot{x} = A_1 x + x A_2 + D$, $x(0) = c$, IEEE, Trans. Automat. Contr. Vol. AC-22, No. 5, pp. 882～883, 1977.
- 12) Hoshiya, M., K. Ishii and S. Nagata: Recursive Covariance of Structural Responses, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., pp. 1743～1755, 1984.
- 13) Storaonovich, R. L.: Topics in the Theory of Random noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, Cap. 1, pp. 10～15, 1965.

(1989年10月12日受付)

付録【1】 確率微分方程式の係数と外力ベクトル

1) 橋梁-車両-路面系の係数

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -(\omega_1^2 + \omega_0^2 R_1 \phi_1(vt)) & a_{22} &= -(2h_1 \omega_1 - 2h_0 \omega_0 R_1 \phi_1(vt)) \\
 a_{23} &= \omega_0 R_1 \phi_1(vt) & a_{24} &= 2h_0 \omega_0 R_1 \phi_1(vt) \\
 a_{25} &= (2h_0 \omega_0 \beta - \omega_0^2) R_1 \phi_1(vt) & a_{41} &= \omega_0^2 \phi_1(vt) \\
 a_{42} &= 2h_0 \omega_0 \phi_1(vt) & a_{43} &= -\omega_0^2 \\
 a_{44} &= -2h_0 \omega_0 & a_{45} &= -(2h_0 \omega_0 \beta - \omega_0^2)
 \end{aligned}$$

2) 車両-路面系の係数行列と外力ベクトル

$$A_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \quad F_Z(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{44} \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

3) 外力の共分散の強度マトリックス

$$\begin{aligned}
 Q_X(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24}^2 & 0 & a_{24}a_{44} & -a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24}a_{44} & 0 & a_{44}^2 & -a_{44} \\ 0 & -a_{24} & 0 & -a_{44} & 1 \end{bmatrix} \sigma^2 \\
 Q_Z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{44}^2 & -a_{44} \\ 0 & -a_{44} & 1 \end{bmatrix} \sigma^2
 \end{aligned}$$

付録【2】 $G(t, \Lambda)$ と $F(t, \Lambda)$ の要素

$$G(t, \Lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{21} & 0 & 0 & 0 & 2a_{22} & 2a_{23} & 2a_{24} & 2a_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 1 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & a_{21} & 0 & a_{42} & a_{43} & a_{22} & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{23} & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{22} & -\beta & 0 & 0 & a_{23} & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{42} & 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{41} & 0 & 0 & 0 & 2a_{42} & 0 & 0 & 2a_{43} & 0 & 2a_{44} & 2a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{42} & 0 & a_{43} & 0 & a_{44} & -\beta & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta \end{bmatrix}$$

$$F(t, \Lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{24}^2 & 0 & a_{24}a_{44} & -a_{24} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & a_{44}^2 - a_{44} & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

付録【3】(29)式の係数マトリックスの要素

$$P_{11} = G_0(t) + (\langle a_1 \ a_2 \rangle - 2\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle) G_{12}(t)$$

$$P_{12} = G_1(t) + \langle a_2 \rangle G_{12}(t)$$

$$P_{13} = G_2(t) + \langle a_1 \rangle G_{12}(t)$$

$$P_{21} = G_1(t) (\langle a_1 \rangle - 2\langle a_1 \rangle) + G_2(t) (\langle a_1 \ a_2 \rangle - 2\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle) \\ + G_{12}(t) (\langle a_1 \ a_2 \rangle - 2\langle a_1 \ a_2 \rangle \langle a_1 \rangle - \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle)$$

$$P_{22} = G_0(t) + 2\langle a_1 \rangle G_1(t) + \langle a_2 \rangle G_2(t) + 2\langle a_1 \ a_2 \rangle G_3(t)$$

$$P_{23} = G_2(t) \langle a_1 \rangle G_{12}(t) \langle a_2 \rangle$$

$$P_{31} = G_1(t) (\langle a_1 \ a_2 \rangle - 2\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle) + G_2(t) (\langle a_2 \rangle - 2\langle a_2 \rangle) \\ + G_{12}(t) (\langle a_1 \ a_2 \rangle - 2\langle a_1 \ a_2 \rangle \langle a_2 \rangle - \langle a_2 \rangle \langle a_1 \rangle)$$

$$P_{32} = G_1(t) \langle a_2 \rangle + G_{12}(t) \langle a_2 \rangle$$

$$P_{33} = G_0(t) + G_1(t) \langle a_1 \rangle + 2G_2(t) \langle a_2 \rangle + G_{12}(t) \langle a_1 \ a_2 \rangle$$